S. F. Kamornikov, On some properties of the formation of quasinilpotent groups, *Mat. Zametki*, 1993, Volume 53, Issue 2, 71–77

Математические заметки

том 53 выпуск 2 февраль 1993

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФОРМАЦИИ КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

С. Ф. Каморников

Введение. Конечная группа G называется квазинильпотентной, если $C_G(H/K)H = G$ для любого главного фактора H/K группы G. Класс всех квазинильпотентных конечных групп будем обозначать $\mathfrak{N}^*$. Простая проверка показывает, что этот класс, как и класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных конечных групп, является радикальной формацией.

Многие исследования указывают на то, что в определенных вопросах классы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^*$ обладают одинаковыми свойствами. Например, Бендер в [1] отмечает схожесть некоторых свойств квазинильпотентного радикала $F^*(G)$ группы G и ее нильпотентного радикала $F(G)$ (см. также [2, § 13]). Блессеноль и Лауэ в [3] доказали, что в любой конечной группе существуют $\mathfrak{N}^*$-инъекторы. Аналогичный результат для класса $\mathfrak{N}$ получен Фёрстером [4].

В настоящей работе указанный дуализм между $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^*$ подтверждается еще в одном случае. В [5] Виландт показал, что для любых субнормальных подгрупп A, B произвольной конечной группы G справедливы равенства

$$\langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}} = \langle A^{\mathfrak{N}}, B^{\mathfrak{N}}\rangle \quad \text{и} \quad A^{\mathfrak{N}}B = BA^{\mathfrak{N}}.$$

Оказывается, что эти равенства имеют место и для квазинильпотентного корадикала.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых двух субнормальных подгрупп A и B произвольной конечной группы G имеет место равенство*

$$\langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}^*} = \langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle.$$

ТЕОРЕМА 2. *Квазинильпотентный корадикал субнормальной подгруппы произвольной конечной группы G перестановочен с любой другой ее субнормальной подгруппой.*

Заметим, что в [6] равенство $A^{\mathfrak{f}}B = BA^{\mathfrak{f}}$, где A, B — субнормальные подгруппы группы G, доказано для любой локальной формации $\mathfrak{f}$, содержащей $\mathfrak{N}$. Однако теорема 2 не следует из [6], так как формация $\mathfrak{N}^*$ не является локальной.

Терминология. Рассматриваются только конечные группы. Всю терминологию, связанную с формациями конечных групп, можно найти в [7]. Напомним лишь некоторые из определений и обозначений. Если G — группа и $\mathfrak{f}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{f}}$ обозначается $\mathfrak{f}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп H из G, для которых $G/H \in \mathfrak{f}$. Квазинильпотентный корадикал G — это ее $\mathfrak{N}^*$-корадикал.

Через $\mathrm{sn}\,(G)$ обозначается решетка всех субнормальных подгрупп группы G. Если $H \in \mathrm{sn}\,(G)$ и $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_t = H$ — композиционная $(G - H)$-цепь, то будем обозначать ее длину $j\,(G - H)$. Следуя Виландту [5], отображение ω: $\mathrm{sn}\,(G) \to \mathrm{sn}\,(G)$ будем называть оператором на $\mathrm{sn}\,(G)$, если для любых $H, K \in \mathrm{sn}(G)$ выполняются условия:

а) $\omega\,(\langle H, K\rangle) = \langle\omega\,(H), \omega\,(K)\rangle$;

б) из $H \triangleleft K$ всегда следует $\omega\,(H) \triangleleft K$.

Здесь $\omega\,(H)$ — образ H при отображении ω.

При доказательстве теоремы 2 будем использовать следующий результат Виландта (теорема 3.15 из [5]). Если φ и ψ — операторы на $\mathrm{sn}\,(G)$ и из $H, K \in \mathrm{sn}\,(G)$ и $\varphi\,(H) = \psi\,(H) = H$ следует $HK = KH$, то $\varphi\,(A)\,\psi\,(B) = \psi\,(B)\,\varphi\,(A)$ для любых $A, B \in \mathrm{sn}\,(G)$.

Предварительные результаты.

ЛЕММА 1. *Пусть H, K — субнормальные подгруппы группы G и $K \subseteq N_G\,(H)$. Если $\mathfrak{f}$ — непустая радикальная формация, то $(HK)^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}K^{\mathfrak{f}}$.*

Доказательство. Применим индукцию по длине композиционной $(HK - K)$-цепи. Если $j\,(HK - K) = 0$, то $HK = K$. Поэтому $H \subseteq K$. Так как $\mathfrak{f}$ — радикальная формация, то $HK^{\mathfrak{f}}/K^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}$. Из $HK^{\mathfrak{f}}/K^{\mathfrak{f}} \cong H/H \cap K^{\mathfrak{f}}$ следует, что $H^{\mathfrak{f}} \subseteq K^{\mathfrak{f}}$. Теперь $(HK)^{\mathfrak{f}} = K^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}K^{\mathfrak{f}}$.

Предположим, что $t = j\,(HK - K) > 0$. Будем считать, что лемма верна для всех тех субнормальных подгрупп X, Y группы G, которые удовлетворяют условиям $Y \subseteq N_G\,(X)$ и $j\,(XY - Y) < t$. Пусть $HK = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_{t-1} \supset K_t = K$ — композиционная $(HK - K)$-цепь. Рассмотрим группу K_1. Так как $K \subseteq K_1 \subseteq HK$ и $HK = KH$, то ввиду тождества Дедекинда $K\,(K_1 \cap H) = K_1 \cap HK = K_1$. Очевидно, $K \subseteq N_G\,(K_1 \cap H)$ и $j\,(K_1 - K) = t - 1 < t$. Следовательно, по индукции $K_1^{\mathfrak{f}} = (K\,(K_1 \cap H))^{\mathfrak{f}} = K^{\mathfrak{f}}\,(K_1 \cap H)^{\mathfrak{f}}$. А так как $(K_1 \cap H)^{\mathfrak{f}} \subseteq H^{\mathfrak{f}}$, то $H^{\mathfrak{f}}K^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}\,(K_1 \cap H)^{\mathfrak{f}}K^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$.

Покажем теперь, что $H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} = (HK)^{\mathfrak{f}}$. Так как $\mathfrak{f}$ — радикальная формация, то $H^{\mathfrak{f}} \subseteq (HK)^{\mathfrak{f}}$ и $K_1^{\mathfrak{f}} \subseteq (HK)^{\mathfrak{f}}$. Следовательно, $H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} \subseteq (HK)^{\mathfrak{f}}$. Очевидно, $H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$ — нормальная подгруппа группы HK. Так как $H/H \cap H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$ — гомоморфный образ $H/H^{\mathfrak{f}}$, то ввиду изоморфизма

$$HH^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} \cong H/H \cap H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$$

группа $HH^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$ принадлежит $\mathfrak{f}$. Аналогично показывается, что $K_1H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}$. Так как

$$HK/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} = (HH^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}})\,(K_1H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}),$$

то из нормальности подгрупп $HH^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$, $K_1H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$ в $HK/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$ и радикальности формации $\mathfrak{f}$ следует, что $HK/H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}$. Это означает, что $(HK)^{\mathfrak{f}} \subseteq H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$. Итак, $(HK)^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}}$. А так как $H^{\mathfrak{f}}K_1^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}K^{\mathfrak{f}}$, то $(HK)^{\mathfrak{f}} = H^{\mathfrak{f}}K^{\mathfrak{f}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{f}$ — непустая формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{f}$ радикальна, когда для любых двух перестановочных субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство $(AB)^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{f}$ — непустая радикальная формация. Покажем, что для любых двух субнормальных подгрупп A, B произвольной группы G имеем место равенство $(AB)^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$. Заметим, что подгруппа A субнормальна в AB. Поэтому применим индукцию по длине композиционной $(AB — A)$-цепи. Ввиду леммы 1 $(AB)^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$, если $j(AB - A) \leq 1$.

Итак, считаем в дальнейшем, что $j(AB - A) = k > 1$. Будем полагать также, что лемма верна для таких субнормальных подгрупп X и Y группы G, что $j(XY - Y) < k$. Пусть

$$AB = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_{k-1} \supset A_k = A$$

— композиционная $(AB — A)$-цепь. Рассмотрим подгруппу A_1. Из $AB = BA$ и $A \subseteq A_1$ следует ввиду тождества Дедекинда, что $A(A_1 \cap B) = A_1 \cap AB = A_1$. Так как $j(A_1 - A) = k - 1 < k$, то по индукции $A_1^{\mathfrak{f}} = (A(A_1 \cap B))^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}(A_1 \cap B)^{\mathfrak{f}}$. Из радикальности формации $\mathfrak{f}$ следует, что $(A_1 \cap B)^{\mathfrak{f}} \subseteq B^{\mathfrak{f}}$. Следовательно, $A_1^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}(A_1 \cap B)^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$.

Очевидно, $AB = A_1B$. Ввиду леммы 1 $(A_1B)^{\mathfrak{f}} = A_1^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$. Значит, $(AB)^{\mathfrak{f}} = (A_1B)^{\mathfrak{f}} = A_1^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$.

Достаточность. Пусть $(AB)^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}}$ для любых двух субнормальных подгрупп A, B произвольной группы G. Пусть N — нормальная подгруппа $G \in \mathfrak{f}$. Тогда $\{1\} = G^{\mathfrak{f}} = (NG)^{\mathfrak{f}} = N^{\mathfrak{f}}G^{\mathfrak{f}} = N^{\mathfrak{f}}$. Значит, $N \in \mathfrak{f}$.

Пусть N_1, N_2 —нормальные $\mathfrak{f}$-подгруппы G. Тогда из $(N_1N_2)^{\mathfrak{f}} = N_1^{\mathfrak{f}}N_2^{\mathfrak{f}} = \{1\}$ следует, что $N_1N_2 \in \mathfrak{f}$. Значит, формация $\mathfrak{f}$ радикальна. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть $\mathfrak{f}$ — непустая радикальная формация. Если каждая группа из $\mathfrak{f}$ не содержит абелевых композиционных факторов, то для любых двух субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство*

$$\langle A, B\rangle^{\mathfrak{f}} = \langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle.$$

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Обозначим через $\mathfrak{h}$ класс всех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{f}$. Очевидно, $\mathfrak{h}$ — радикальная формация, замкнутая относительно расширений. Поэтому ввиду теоремы 2.4 из [5]

$$G^{\mathfrak{h}} = \langle A, B\rangle^{\mathfrak{h}} = \langle A^{\mathfrak{h}}, B^{\mathfrak{h}}\rangle.$$

Из $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{h}$ следует, что $G^{\mathfrak{h}} \subseteq G^{\mathfrak{f}}$, $A^{\mathfrak{h}} \subseteq A^{\mathfrak{f}}$, $B^{\mathfrak{h}} \subseteq B^{\mathfrak{f}}$. Если $G^{\mathfrak{h}} \neq \{1\}$, то по индукции $\langle (AG^{\mathfrak{h}}/G^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{f}}, (BG^{\mathfrak{h}}/G^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{f}}\rangle = (G/G^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{f}}$. Ввиду леммы 1.2 из [7] имеем

$$\langle A^{\mathfrak{f}}G^{\mathfrak{h}}, B^{\mathfrak{f}}G^{\mathfrak{h}}\rangle/G^{\mathfrak{h}} = G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{h}}.$$

Отсюда $G^{\mathfrak{f}} = \langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle G^{\mathfrak{h}}$. Так как $G^{\mathfrak{h}} = \langle A^{\mathfrak{h}}, B^{\mathfrak{h}}\rangle \subseteq \langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle$, то $G^{\mathfrak{f}} = \langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle$.

Значит, $G^{\mathfrak{h}} = \{1\}$. В этом случае все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{f}$. Поэтому из условия леммы следует, что $A = A'$. По теореме Виландта (см. [8]) $AB = BA$. Применяя теперь лемму 2, получаем $\langle A, B\rangle^{\mathfrak{f}} = (AB)^{\mathfrak{f}} = A^{\mathfrak{f}}B^{\mathfrak{f}} = \langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых неабелевых групп. Тогда для любых двух субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство*

$$\langle A, B\rangle^{\operatorname{form}\mathfrak{X}} = \langle A^{\operatorname{form}\mathfrak{X}}, B^{\operatorname{form}\mathfrak{X}}\rangle.$$

Доказательство. Простая проверка показывает, что $\operatorname{form}\mathfrak{X}$ — радикальная формация и что группа $R \in \operatorname{form}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда R — прямое произведение групп, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Теперь остается применить лемму 3. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех простых неабелевых групп. Тогда для любых двух субнормальных подгрупп A и B произвольной группы G имеет место равенство*

$$\langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}} = \langle A^{\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}}, B^{\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}}\rangle.$$

Доказательство. Применяя лемму 1 из [6], теорему 1.5 из [5] и лемму 4, получаем

$$\langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}} = \langle A^{\operatorname{form}\mathfrak{X}}, B^{\operatorname{form}\mathfrak{X}}\rangle^{\mathfrak{N}} =$$

$$= \langle (A^{\operatorname{form}\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}, (B^{\operatorname{form}\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}\rangle = \langle A^{\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}}, B^{\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}}\rangle.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех простых неабелевых групп. Тогда $\mathfrak{N}^* \subseteq \mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{N}^* \setminus \mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}^* \setminus \mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}$. Ввиду следствия

7.19 из [9] формация $\mathfrak{N}$ form $\mathfrak{X}$ локальна. По лемме 18.3 из [9] группа монолитична и ее монолит N совпадает с $G^{\mathfrak{N}\text{ form }\mathfrak{X}}$. В частности, $C_G(N) \subseteq N$. Так как $G \in \mathfrak{N}^*$, то $G = C_G(N)N = N$. Значит, $G \in \mathfrak{N}$ form $\mathfrak{X}$. Противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Применим индукцию по порядку группы G и сумме длин композиционных цепей

$$\langle A, B\rangle = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_t = A,$$

$$\langle A, B\rangle = B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_s = B.$$

Ввиду предположения индукции считаем, что $G = \langle A, B\rangle$. Из леммы 1 следует, что $t + s > 2$. Будем полагать, что теорема верна для тех субнормальных подгрупп X, Y группы G, которые удовлетворяют условию $j(G - X) + j(G - Y) < t + s$.

Пусть $C = \langle A, A_1 \cap B\rangle$. Если $A \subset C$, то $j(C - A) < j(G - A) = t$. Так как $G/A_1 = A_1B/A_1 \cong B/B \cap A_1$ — простая группа, то $B \cap A_1$ — максимальная нормальная подгруппа B. Отсюда имеем

$$j(C - A_1 \cap B) = j(G - A_1 \cap B) - j(G - C) = j(G - B) + 1 - j(G - C).$$

Так как $j(G - C) \geq 1$, то $j(C - A_1 \cap B) \leq j(G - B)$. Следовательно, $j(C - A) + j(C - A_1 \cap B) < j(G - A) + j(G - B)$. По индукции имеем $C^{\mathfrak{N}^*} = \langle A, A_1 \cap B\rangle^{\mathfrak{N}^*} = \langle A^{\mathfrak{N}^*}, (A_1 \cap B)^{\mathfrak{N}^*}\rangle$. Так как формация $\mathfrak{N}^*$ радикальна, то $(A_1 \cap B)^{\mathfrak{N}^*} \subseteq B^{\mathfrak{N}^*}$. Так как $A \subset C$, то $j(G - C) + j(G - B) < j(G - A) + j(G - B)$. По индукции $G^{\mathfrak{N}^*} = \langle C^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$. Теперь имеем

$$G^{\mathfrak{N}^*} = \langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}^*} = \langle C^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle = \langle A^{\mathfrak{N}^*}, (A_1 \cap B)^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle = \langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle.$$

Итак, $A = C$. Тогда $A_1 \cap B \subseteq A \cap B$, а значит, $A_1 \cap B = A \cap B$. Так как $A_1 \cap B \lhd B$, то $A \cap B \lhd B$.

Пусть $D = \langle A \cap B_1, B\rangle$. Если $B \subset D$, то, рассуждая описанным выше образом, получим $G^{\mathfrak{N}^*} = \langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$. Значит, $D = B$. Тогда $A \cap B_1 \subseteq A \cap B$. Следовательно, $A \cap B_1 = A \cap B$, и, значит, $A \cap B \lhd A$.

Таким образом, $A \cap B \lhd \langle A, B\rangle = G$. Так как $A \cap B = A_1 \cap B$, то $B/A \cap B = B/A_1 \cap B \cong G/A_1$ — простая группа.

Рассмотрим группу $G/A \cap B$. Если $B/A \cap B$ — неабелева группа, то ввиду теоремы Виландта из [10] $N_{G/A\cap B}(B/A \cap B) \supseteq A/A \cap B$. Значит, подгруппы A, B перестановочны, и поэтому по лемме 2 $G^{\mathfrak{N}^*} = (AB)^{\mathfrak{N}^*} = A^{\mathfrak{N}^*}B^{\mathfrak{N}^*} = \langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$.

Итак, $|A/A \cap B| = p$, $|B/A \cap B| = q$, где p, q — простые числа. Пусть $p \neq q$. Тогда $A/A \cap B \subseteq O_p(G/A \cap B)$ и $B/A \cap B \subseteq O_q(G/A \cap B)$. Так как $p \neq q$, то

$$[A/A \cap B,\ B/A \cap B] = \{1\}.$$

Значит, $AB=BA$ и по лемме 2 $G^{\mathfrak{N}^*}=\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$.

Таким образом, пришли к случаю, когда $p=q$. Значит, $G/A\cap B$ — p-группа.

Обозначим $\mathfrak{f}=\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — класс всех простых неабелевых групп. Ввиду леммы 6 $\mathfrak{N}^*\subseteq\mathfrak{f}$. Кроме того, ввиду леммы 5 $\langle A, B\rangle^{\mathfrak{f}}=$ $=\langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle$. Значит, $G^{\mathfrak{f}}=\langle A^{\mathfrak{f}}, B^{\mathfrak{f}}\rangle\subseteq\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle\subseteq G^{\mathfrak{N}^*}$. Пусть $G^{\mathfrak{f}}\neq\{1\}$. По индукции

$$(G/G^{\mathfrak{f}})^{\mathfrak{N}^*}=\langle(AG^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}})^{\mathfrak{N}^*},\ (BG^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}})^{\mathfrak{N}^*}\rangle.$$

Ввиду леммы 1.2 из [7] отсюда имеем

$$G^{\mathfrak{N}^*}/G^{\mathfrak{f}}=\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle G^{\mathfrak{f}}/G^{\mathfrak{f}}=\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle/G^{\mathfrak{f}}.$$

Значит, $G^{\mathfrak{N}^*}=\langle A^{\mathfrak{N}^*},\ B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$.

Итак, полагаем далее, что $G\in\mathfrak{f}$. Пусть $K=G^{\operatorname{form}\mathfrak{X}}$. Так как $G\in\mathfrak{N}\operatorname{form}\mathfrak{X}$, то $K\in\mathfrak{N}$. Из строения $\operatorname{form}\mathfrak{X}$ следует, что $\operatorname{form}\mathfrak{X}\cap\mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$ — единичная формация. Поэтому $G=G^{\mathfrak{E}}=$ $=G^{\operatorname{form}\mathfrak{X}}G^{\mathfrak{N}_p}$. Так как $G/A\cap B\in\mathfrak{N}_p$, то $G^{\mathfrak{N}_p}\subseteq A\cap B$. Значит, $G=K(A\cap B)$.

Покажем, что $A\cap B\in\mathfrak{N}^*$. Допустим, что $S=(A\cap B)^{\mathfrak{N}^*}\neq\{1\}$. Из S_n-замкнутости $\mathfrak{N}^*$ следует, что $(A\cap B)^{\mathfrak{N}^*}\subseteq A^{\mathfrak{N}^*}$ и $(A\cap B)^{\mathfrak{N}^*}\subseteq B^{\mathfrak{N}^*}$. Из характеристичности $(A\cap B)^{\mathfrak{N}^*}$ в $A\cap B$ и нормальности $A\cap B$ в G следует, что $(A\cap B)^{\mathfrak{N}^*}$ — нормальная подгруппа G. По индукции $(G/S)^{\mathfrak{N}^*}=\langle AS/S,\ BS/S\rangle^{\mathfrak{N}^*}=\langle(AS/S)^{\mathfrak{N}^*},\quad(BS/S)^{\mathfrak{N}^*}\rangle=\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle/S$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{N}^*}=\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$.

Значит, $A\cap B\in\mathfrak{N}^*$. Теперь из радикальности $\mathfrak{N}^*$ имеем $G=$ $=(A\cap B)K\in\mathfrak{N}^*$. Так как формация $\mathfrak{N}^*$ S_n-замкнута, то $A\in\mathfrak{N}^*$, $B\in\mathfrak{N}^*$. Отсюда $G^{\mathfrak{N}^*}=\{1\}=\langle A^{\mathfrak{N}^*}, B^{\mathfrak{N}^*}\rangle$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Рассмотрим отображения φ и ψ решетки $\operatorname{sn}(G)$ в себя, определяемые равенствами $\varphi(H)=H^{\mathfrak{N}^*}$ и $\psi(H)=H$ для любого $H\in\operatorname{sn}(G)$. Ввиду теоремы 1 отображение φ является оператором на $\operatorname{sn}(G)$. Очевидно, таковым является и ψ.

Пусть $H, K\in\operatorname{sn}(G)$. Если $\varphi(H)=\psi(H)=H$, то $H=\{1\}$. Поэтому равенство $HK=KH$ очевидно. Отсюда ввиду теоремы 3.15 из [5] имеем $\varphi(A)\psi(B)=\psi(B)\varphi(A)$ для всех $A, B\in\operatorname{sn}(G)$. Это и означает, что $A^{\mathfrak{N}^*}B=BA^{\mathfrak{N}^*}$ для всех $A, B\in\operatorname{sn}(G)$. Теорема доказана.

Следствие. *Для любых двух субнормальных подгрупп A и B произвольной конечной группы G справедливо равенство* $\langle A, B\rangle^{\mathfrak{N}^*} = A^{\mathfrak{N}^*}B^{\mathfrak{N}^*}$.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило
07.05.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bender H. On groups with abelian Sylow 2-subgroups//Math. Z. 1970. Bd 117, N 1—4. S. 164—176.
[2] Huppert B., Blackburn N. Finite Groups III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1982.
[3] Blessenohl D., Laue H. Fittingklassen endlicher Gruppen, in denen gewisse Hauptfaktoren einfach sind//J. Algebra. 1979. V. 56. P. 516—532.
[4] Förster P. Nilpotent injectors in finite groups//Bull. Austral. Math. Soc. 1985. V. 32. P. 293—297.
[5] Wielandt H. Vertauschbare nachinvariante Untergruppen//Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1957. Bd 21, N 1—2. S. 55—62.
[6] Каморников С. Ф. Перестановочные субнормальные подгруппы конечных групп//ДАН БССР. 1989. Т. 33, № 5. С. 396—399.
[7] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[8] Wielandt H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen//Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209—244.
[9] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
[10] Wielandt H. Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen//Math. Z. 1958. Bd 69, N 8. S. 463—465.