

ФУРЬЕ-АНАЛИЗ МНОГОЛУЧЕВЫХ ИНТЕРФЕРОГРАММ

В. К. Животов и М. Ф. Кротов

Фурье-преобразование интерферограмм, полученных с помощью интерферометра Фабри—Перо, позволяет восстанавливать спектр электромагнитного излучения с разрешением интерферометра в спектральном диапазоне, существенно превышающем область свободной дисперсии. По сравнению с двухлучевой фурье-спектроскопией метод позволяет при одинаковом перемещении зеркала получать большее разрешение.

Изменение разности хода лучей в многолучевом интерферометре Фабри—Перо (ИФП) осуществляется либо при сканировании расстояния между зеркалами (микроволновая область спектра), либо при наблюдении интерференционных колец (оптическая, ИК области). При работе в больших порядках интерференции ИФП обладает высокой разрешающей силой. Однако одновременно уменьшается область свободной дисперсии, сужается диапазон измерения спектра. В методе фурье-спектроскопии, основанном на фурье-анализе двухлучевых интерферограмм, разрешающая сила определяется максимальным перемещением подвижного зеркала, спектральный диапазон принципиально ничем не ограничен.

Совмещение методов фурье-спектроскопии и многолучевой интерферометрии позволяет сохранить некоторые достоинства обоих методов. В частности, появляется возможность исследовать спектры с шириной, существенно большей области свободной дисперсии при сохранении разрешения ИФП.

Впервые фурье-спектроскопический подход к обработке многолучевых интерферограмм был предложен в работе [1]. В ней обсуждены вопросы воспроизведения спектра с помощью интегрального фурье-преобразования.

Целью настоящей работы является получение практических формул для вычисления дискретного фурье-преобразования многолучевой интерферограммы и реализация многолучевого фурье-спектрометра.

Вид интерферограммы, спектральный диапазон,
формула для расчета спектра

На интерферометр Фабри—Перо, составленный из двух плоскопараллельных зеркал с коэффициентом отражения R , падает плоская электромагнитная волна с волновым числом $k=2\pi/\lambda$. При нормальном падении интенсивность прошедшей волны представляется функцией Эйри

$$E_R(kx) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 kx} = \frac{1-R}{1+R} \left[1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} R^q \cos 2qkx \right]. \quad (1)$$

Здесь x — расстояние между зеркалами, меняющееся от $x=0$ до $x=x_{\max}$. С большой точностью ряд можно оборвать при $q \geq N$, где N — эффективное число лучей в ИФП: $N = \pi \sqrt{R/(1-R)}$.

Если спектральная плотность излучения $f(k)$ равна нулю вне диапазона $k_1 \div k_2$, то для переменной составляющей

$$\psi(x) = I(x) - \frac{1-R}{1+R} \int_{k_1}^{k_2} f(k) dk = I(x) - \frac{1-R}{1+R} I(0) \quad (2)$$

интерференционной картины $I(x)$ на выходе ИФП получим

$$\psi(x) = 2 \frac{1-R}{1+R} \int_{k_1}^{k_2} f(k) \sum_{q=1}^{\infty} R^q \cos 2qkx dk. \quad (3)$$

Спектральный диапазон $k_1 \div k_2$ в спектре излучения образует в спектре $\psi(x)$ порядки $2k_1 \div 2k_2$, $4k_1 \div 4k_2$, ..., $2qk_1 \div 2qk_2$ с убывающей интенсивностью R^q . Произведя теперь фурье-преобразование многолучевой интерферограммы по частоте $2qk$, получим воспроизведение спектра с соответствующим разрешением [1].

В первом порядке разрешения $\delta k = \pi/x_{\max}$ совпадает с разрешением метода двухлучевой фурье-спектроскопии с тем же перемещением зеркала. Разрешение ИФП $\delta k = \pi/Nx_{\max}$ достигается в N -м порядке. Условие отсутствия перекрытия порядков $2Nk_1 \div 2Nk_2$ в спектре интерферограммы с соседними порядками приводит к ограничению допустимого спектрального диапазона

$$\Delta k = k_2 - k_1 \leq \frac{k_1}{N} = \frac{k_2}{N+1}. \quad (4)$$

Область же свободной дисперсии ИФП σ ограничена максимальным порядком интерференции: $\sigma = k_2/n$ ($n = k_2 x_{\max}/\pi$). Выигрыш в величине спектрального диапазона $\Delta k \sigma = n/(N+1)$ возрастает с увеличением x_{\max} .

Обратимся к интегральному уравнению (3). При замене переменных $qk = k'$ в каждом члене ряда выражение (3) приводится к виду

$$\psi(x) = 2 \frac{1-R}{1+R} \int_{k_1}^{\infty} F(k') \cos 2k'x dk'. \quad (5)$$

Здесь

$$F(k') = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} f\left(\frac{k'}{q}\right) R^q. \quad (6)$$

Функция $F(k)$ непериодична и отлична от нуля на полубесконечном интервале от k_1 до ∞ . Поэтому формально представление ее в виде ряда Фурье невозможно. Нас, однако, интересует лишь один из спектральных порядков $F(k)$, в частности N -й с интенсивностью R^N . Пренебрежем всеми высшими порядками, начиная с $2N$ -го, считая их интенсивности малыми по сравнению с R^N . Предполагая, что функция $F(k)$ (6) отлична от нуля на конечном интервале $k_1 \div 2Nk_2$, а также ее четность и периодичность, легко получить

$$F(k') = \frac{2}{\pi} \frac{1+R}{1-R} \delta x \left[\frac{1}{2} \psi(0) + \sum_{m=1}^M \psi(x_m) \cos 2k'x_m \right]. \quad (7)$$

Здесь x_m — дискретное разбиение оси x , $x_m = m\delta x$ ($m=1, 2, \dots, M$; $M\delta x = x_{\max}$). Положив в (7) $Nk_1 \leq k' \leq Nk_2$, с учетом (4) и (6) получим формулу для расчета спектра

$$f(k) = \frac{2}{\pi} \frac{1+R}{1-R} \frac{N}{R^N} \delta x \left[\frac{1}{2} \psi(0) + \sum_{m=1}^M \psi(x_m) \cos 2Nkx_m \right]. \quad (8)$$

Аппаратная функция, частота разбиения интерферограммы, разрешающая сила

Для $f(k) = \delta(k - k_0)$ интерферограмма (3) имеет вид $\psi_0(x) = 2[(1-R)/(1+R)] \sum_{q=1}^{2N} R^q \cos 2qk_0x$. Подстановка $\psi_0(x)$ в (8) приводит к выражению для аппаратной функции

$$f_0(k) = \frac{1}{\pi} \frac{N}{RN} \delta x \sum_{q=1}^{2N} \left[R^q \frac{\sin 2\left(M + \frac{1}{2}\right) \delta x (kN - k_0q)}{\sin \delta x (kN - k_0q)} + R^q \frac{\sin 2\left(M + \frac{1}{2}\right) \delta x (kN + k_0q)}{\sin \delta x (kN + k_0q)} \right]. \quad (9)$$

Функция $f_0(k)$ имеет максимумы при $k = \pm qk_0/N$, периодична с периодом $\pi/N\delta x$ и занимает в пределах одного периода частотный диапазон от $-2k_2$ до $+2k_2$. Период не должен быть меньше величины этого диапазона. Условие $\pi/N\delta x = 4k_2$ определяет шаг разбиения интерферограммы

$$\delta x = \frac{\pi}{4Nk_2}, \quad (10)$$

который, естественно, связан с шириной спектра интерферограммы $4Nk_2$ в сделанном приближении.

Слагаемое с $q=N$ в (9) имеет максимум на истинной частоте $k = k_0$. При выполнении условия (4) рабочий диапазон $k_0 = k_1 - k_2$ не перекрывается с соседними участками аппаратной функции. В этом диапазоне

$$f_0(k - k_0) = \frac{N}{\pi} \delta x \frac{\sin 2\left(M + \frac{1}{2}\right) \delta x (k - k_0) N}{\sin \delta x (k - k_0) N}$$

Вблизи максимума при $\varphi = 2\left(M + \frac{1}{2}\right) \delta x (k - k_0) N \ll \left(M + \frac{1}{2}\right)$ аппаратная функция приобретает привычный вид

$$f_0(k - k_0) \approx K \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Нормировочный множитель $K = 2NM\delta x/\pi$ здесь именно такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(k - k_0) dk = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k_0) dk.$$

Первый нуль аппаратной функции находится при $\varphi = \pi$, т. е. при $(k - k_0)^0 = \pi/2Nx_{\max}$. Эта величина в N раз меньше, чем в двухлучевой фурье-спекроскопии при том же x_{\max} . Полная ширина аппаратной функции $2(k - k_0)^0 = \pi/Nx_{\max} = \delta k$ в точности совпадает с шириной резонансной кривой ИФП на уровне 0.5

$$\delta k_{\text{ИФП}} = \frac{1/k}{Q} = \frac{k}{N(2x_{\max}/\lambda)} = \frac{\pi}{Nx_{\max}}.$$

Интересный результат получается, если воспользоваться аподизирующей функцией $A(m) = \pi r^m$, где $r \leq 1$ и определяется так:

$$\frac{\pi \sqrt{r}}{1-r} = M. \quad (11)$$

Формула для расчета спектра примет вид

$$f(k) = 2 \frac{1+R}{1-R} \frac{N}{R^N} \delta x \left[\frac{1}{2} \psi(0) + \sum_{m=1}^M r^m \psi(x_m) \cos 2Nkx_m \right]. \quad (12)$$

Подставив в (12) значения $\psi_0(x_m)$, воспользовавшись соотношениями (1) и (11), получим аппаратную функцию

$$f_0^A(k) \approx \frac{2M}{\pi} \frac{N}{R^N} \delta x \sum_{q=1}^{2N} R^q \mathcal{E}_r [\delta x (Nk - qk_0)] + R^q \mathcal{E}_r [\delta x (Nk + qk_0)]. \quad (13)$$

Аналогично с (9) в рабочей области $k_1 \leq k_0 \leq k_2$ нужно положить $q=N$. В результате

$$f_0^A(k - k_0) = \frac{2M}{\pi} N \delta x \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 [N \delta x (k - k_0)]}.$$

Аппаратная функция имеет вид функции Эйри. В окрестности максимума $k=k_0$ с учетом (11)

$$f_0^A(k - k_0) \approx K \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^2} x_{\max}^2 N^2 (k - k_0)^2} = K \frac{1}{1 + (\varphi^2/\pi^2)}. \quad (14)$$

Ширина $f_0^A(k - k_0)$ на уровне 0.5: $\delta k^A = \delta k_{\text{ИФП}} = \pi/Nx_{\max}$.

Вообще выражение (14) без множителя K тождественно равно пропусканию ИФП с $x=x_{\max}$ вблизи $k=k_0$: $\mathcal{E}_R [(k-k_0)x_{\max}]$, которое можно получить из (1). Разница лишь в том, что в $\mathcal{E}_R [(k-k_0)x_{\max}]$ расстояние между соседними максимумами $k-k_0 = \pi/x_{\max} = \sigma$ — область свободной дисперсии ИФП. В то же время в $f_0^A(k-k_0)$ (13) ближайший к $k=k_0$ максимум расположен на расстоянии $k-k_0 = \Delta k = k_1/N$.

Экспериментальное воспроизведение спектра, зеркала ИФП

Для экспериментального измерения интерферограммы нужно изменять расстояние между зеркалами от нуля до x_{\max} . Системы для передвижения зеркал фурье-спектрографов в далекой ИК и ИК областях разработаны достаточно хорошо. В видимой области также существуют системы, осуществляющие сканирование ИФП в широком диапазоне (до сотен тысяч порядков [2]).

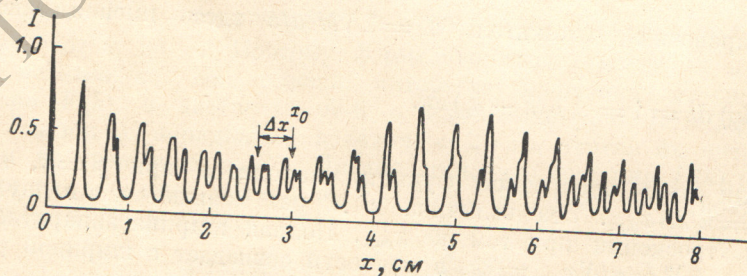


Рис. 1. Многолучевая интерферограмма.

Эксперимент по воспроизведению простого спектра в микроволновой области проведен нами с двойной целью. Первая — наглядно продемонстрировать практические возможности метода, вторая — на конкретном примере обсудить некоторые требования, предъявляемые к зеркалам ИФП.

В эксперименте излучение по волноводу подавалось на рупорно-линзовую антенну, формирующую плоскую волну. За линзой располагался ИФП с подвижным зеркалом. Зеркала — плоские металлические H -по-

ляризованные решетки (вектор E волны перпендикулярен штрихам решетки).

Приемная рупорно-линзовая антенна, детектор излучения — вот вся схема многолучевого фурье-спектрометра. Расстояние между зеркалами с помощью микрометрического винта менялось от $x=0$ до $x_{\max}=8$ см. Источник излучения — три клистрона. Длины волн излучения — 8.26, 8.67 и 7.54 мм. Отношение соответствующих интенсивностей 4 : 3 : 3. Интерферограмма приведена на рис. 1; рассчитанный по формулам (8) и (12) спектр — на рис. 2.

Коэффициент отражения зеркал $R=0.6$. Величина $N=7$. Область свободной дисперсии ИФП $\sigma=\pi/x_{\max}=0.4$ см $^{-1}$. Спектральный диапазон

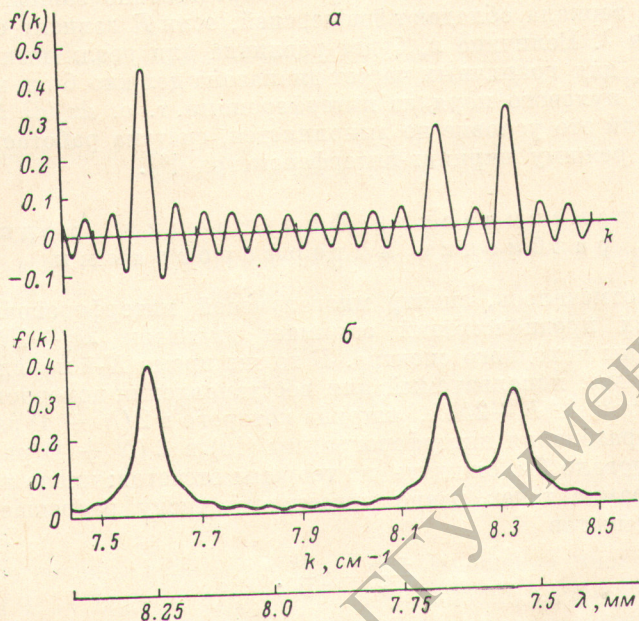


Рис. 2.

а — воспроизведение спектра, б — то же при аподизации.

$\Delta k = k_2 - k_1 = 8.5 - 7.45$ см $^{-1} = 1.05$ см $^{-1} > \sigma$. Если исследовать такой спектральный участок с помощью ИФП обычным способом в пределах одного порядка интерференции $\Delta x = \pi/k_2 = 0.37$ см, то максимальное расстояние между зеркалами $x_0 = \pi/\Delta k = 3$ см (рис. 1). При этом разрешение $\delta k = \pi/Nx_0 = 0.15$ см $^{-1}$.

Спектральное разрешение при фурье-анализе всей интерферограммы определяется по положению первого нуля на рис. 2, а, либо по ширине на уровне 0.5 на рис. 2, б. Обе величины удовлетворительно совпадают с оценкой $\delta k = \pi/Nx_{\max} = 0.056$ см $^{-1}$. Небольшое уширение и колебания аппаратных функций на рис. 2, б связано с тем, что при выводе (13) ряд (1) был оборван на члене с номером $q=M$.

З а м е ч а н и е 1. В выражение (2) для $\psi(x)$ входит величина

$$I(0) = \int_{k_1}^{k_2} f(k) dk$$

— интегральная мощность излучения. Она измеряется

при нулевом расстоянии между зеркалами ИФП в нулевом порядке интерференции. В этой точке излучение с любой длиной волны проходит сквозь ИФП не ослабляясь. Факт полного пропускания двух вплотную сдвинутых отражающих зеркал на первый взгляд парадоксален. Однако формально это следует из (1), физический же смысл состоит в суммировании большого числа убывающих по интенсивности волн, выходящих из ИФП с одинаковой фазой.

Кстати, вовсе не нужно измерять $I(0)$ точно при $x=0$. Полуширина нулевого порядка интерференции ИФП $\Delta x^0 = \pi/2Nk$. Практически пропускание достигает 100% уже при $x \approx \Delta x^0/10$.

З а м е ч а н и е 2. В условие для резонанса ИФП входит значение фазы при отражении от зеркал $\alpha: kx + \alpha = n\pi$ ($n = 0, 1, \dots$ — номер порядка интерференции). В результате нулевой порядок достигается при $x_\alpha = -\alpha/k = -\alpha\lambda/2\pi$. Расстояние x_α компенсирует скачок фазы α . Фаза при отражении от зеркал должна иметь отрицательный знак, только в этом случае нулевой порядок достигается при положительном x_α . Такими, например, H -поляризованные решетки. Для них $\alpha = -\arctg \sqrt{(1-R)/R}$.

З а м е ч а н и е 3. Величина x_α непосредственно зависит от длины волны. Если зеркала обладают дисперсией, если R зависит от λ , то и α есть функция λ . Величина x_α будет различна для различных длин волн. Изменение x_α для граничных частот диапазона должно быть меньше, чем полуширина нулевого порядка интерференции, т. е. $dx_\alpha/d\lambda \Delta\lambda \ll \Delta x^0 = \pi/2Nk$. Если это условие не выполняется, система работает в режиме, аналогичном режиму чирпинг-интерферометра [3].

М а т е м а т и ч е с к а я ф и л ь т р а ц и я , р е д к о е р а з б и е н и е и н т е р ф е р о г р а м м ы

Как уже отмечалось, спектр многолучевой интерферограммы с учетом сделанных предположений занимает диапазон $2k_1 \div 4Nk_2$ независимо от ширины исходного спектра. В то же время N -й порядок спектра интерферограммы, используемый для восстановления исходного спектра, занимает участок $2Nk_1 \div 2Nk_2$, ширина которого в $2(N+1)$ раза меньше. Поэтому шаг разбиения интерферограммы (10) в $2(N+1)$ раза меньше, чем этого следовало бы ожидать из теоремы отсчетов: число измеряемых в интерферограмме точек равно удвоенному числу разрешаемых спектральных элементов

$$\frac{x_{\max}}{\delta x} = 2 \frac{\Delta k}{\delta k} \quad (15)$$

Этот факт, во-первых, не позволяет увеличивать шаг разбиения интерферограммы при уменьшении ширины исследуемого спектра. Во-вторых, нежелательно увеличивает машинное время при расчете на ЭВМ.

Этот недостаток легко преодолеть, если в спектре интерферограммы до проведения фурье-преобразования отфильтровать нужный спектральный порядок. Такую интерферограмму можно получить, вычислив свертку исходной интерферограммы с фурье-образом фильтрующей функции.

Пусть ширина спектра $\Delta k = k_2 - k_1 = k_1/s$ ($s \geq N$). В спектре интерферограммы нужно отфильтровать участок $2Nk_1 \div 2Nk_2$ шириной $\Delta = 2Nk_1/s$. Фильтрующая функция $\Pi(k)$ равна нулю вне этого участка и единице внутри. Ее фурье-образ $\Phi[\Pi(k)] = \Phi(x) = \frac{\sin(x\Delta/2) \cos Nx(k_2 + k_1)}{x}$.

Отфильтрованная интерферограмма $\psi_\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) \Phi(x-z) dz$ должна быть определена в точках $x_p = p\delta_p x$. Величина $\delta_p x = s\pi/2Nk_1$ удовлетворяет (15).

Перейдя к дискретному вычислению свертки (два отсчета на один полупериод $\cos Nx(k_2 + k_1)$), получим для $\psi_\phi(x)$

$$\psi_\phi(x_p) = \sum_{m=1}^{M_0} \psi(x_m) \cos \frac{\pi}{2} (pW - m) \times \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2W} (pW - m)}{pW - m} + (-1)^p \frac{\sin \frac{\pi}{2W} (pW + m)}{pW + m} \right] \quad (16)$$

В формуле (16) величина $W = 2s + 1$, разбиение старой интерферограммы $x_m = m\delta_m x$ ($\delta_m x = s\pi/2Nk_1W$, $M_0\delta_m x = x_{\max}$).

Вычисление свертки по формуле (16) не очень сложно. Наиболее трудоемок для ЭВМ счет тригонометрических функций. В (16) у косинуса всего три значения (0, ± 1). Синусы принимают $4W$ значений. Кроме

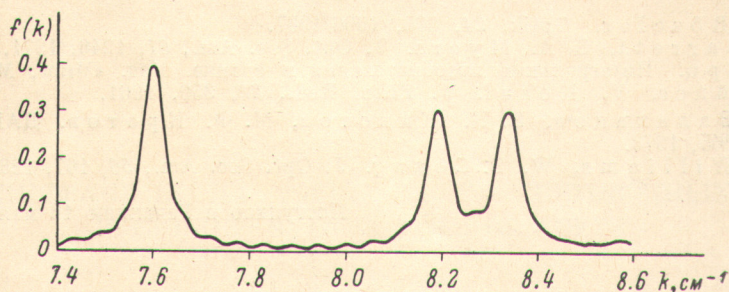


Рис. 3. Воспроизведение спектра рис. 2 при математической фильтрации интерферограммы.

того, число членов ряда (16) можно существенно сократить ввиду быстрого спада к нулю $\Phi(x)$. При этом немного ухудшается форма фильтрующей функции. Вопросы, связанные с конечностью пределов вычисления свертки, подробно обсуждены в работе [4], посвященной применению метода математической фильтрации для улучшения отношения сигнал/шум при дискретном преобразовании Фурье двухлучевых интерферограмм.

Спектр же можно рассчитать по формуле, аналогичной (8) или (12)

$$f(k) = \frac{2}{\pi} \frac{1+R}{1-R} \frac{N}{R^N} \delta_p x \left[\frac{1}{2} \psi_\phi(0) + \sum_{p=1}^P \psi_\phi(x_p) \cos 2Nkx_p \right],$$

здесь число членов ряда $P = x_{\max}/\delta_p x$. Отношение числа членов ряда (8) к $P : M/P = 2s(N+1)/N$ может быть велико. Пример такого расчета приведен на рис. 3. Затраченное машинное время уменьшилось в 10 раз.

З а к л ю ч е н и е

Многочувствительная фурье-спектроскопия дает возможность регистрировать спектры излучения с разрешением ИФП в широком диапазоне частот. Увеличение разности хода приводит к повышению разрешения без уменьшения спектрального диапазона. С другой стороны, фурье-анализ многочувствительных интерферограмм позволяет существенно повысить разрешающую силу двухлучевого фурье-спектрометра с таким же перемещением зеркала.

Преобразование многочувствительной интерферограммы в спектр может быть проведено традиционными для фурье-спектроскопии методами. В данной работе рассмотрено дискретное преобразование Фурье по N -й гармонике. При равномерном перемещении зеркала возможно применение электрических фильтров, настроенных на соответствующие радиочастоты; так как фильтры должны реагировать на высокие гармоники, скорость перемещения зеркала может быть меньшей, чем в двухлучевом случае. Следует иметь в виду и возможность голографического преобразования интерферограммы в спектр [5].

Отметим еще, что в принципе возможно восстановление спектра с разрешением лучшим, чем $\delta k_{\text{ИФП}} = \pi/Nx_{\max}$. В двухлучевой фурье-спектроскопии для превышения разрешения $\delta k = \pi/x_{\max}$ можно воспользоваться аналитическим продолжением интерферограммы в область $x > x_{\max}$ [6]. В нашем случае возможность увеличения оптического пути уже заложена в интерферограмме, так как число образующих ее лучей бесконечно (1). Достаточно провести фурье-преобразование по гармонике с номером

$q > N$. При этом ухудшается отношение сигнал/шум, которое, очевидно, пропорционально R^q .

Авторы благодарят В. Д. Русанова и Ю. В. Тарасова за постоянное внимание и помощь.

Литература

- [1] V. A. Röseler. *Optik*, 24, 606, 1966/1967.
- [2] J. J. Barrett, S. A. Myers. *J. Opt. Soc. Am.*, 61, 1246, 1971.
- [3] Л. Мерц. Интегральные преобразования в оптике. Изд. «Мир», М., 1969.
- [4] J. Copnes, V. Nozal. *J. Phys. Rad.*, 22, 359, 1961.
- [5] Б. Я. Балаханов, В. К. Животов, М. Ф. Кротов. *ДАН СССР*, 208, 805, 1973.
- [6] R. A. Williams, W. S. Chang. *J. Opt. Soc. Am.*, 56, 167, 1966.

Поступило в Редакцию 16 мая 1974 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЬ