

## О ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДНЫХ МОДАХ В КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЯХ С ПОПЕРЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Н. В. Кузьмина и Н. Н. Розанов

Найдены плоские волноводные моды лазера с поперечной неоднородностью показателя преломления и усиления экспоненциального вида (при  $x > 0$ ) при наличии идеального отражения от плоскости  $x=0$ . Проанализирован случай экспоненциального изменения показателя преломления (диэлектрических волновод), который правильно описывает вид волноводных мод и их угловую расходимость при сравнительно малом насыщенном коэффициенте усиления. Определено также влияние на волноводные моды неидеальности отражения от плоскости  $x=0$ .

Характерной особенностью ряда лазеров (например, инжекционных и некоторых типов газовых лазеров) является поперечная неоднородность показателя преломления и усиления. При достаточно резкой оптической неоднородности становится возможным возникновение волноводных мод. Важным частным случаем являются плоские волноводные моды, распространяющиеся в средах, в которых оптические характеристики зависят только от одной декартовой координаты  $\epsilon = \epsilon(x)$ , где  $\epsilon$  — комплексная диэлектрическая проницаемость. Аналитическое определение вида и анализ характеристик плоских волноводных мод для некоторых модельных зависимостей  $\epsilon(x)$  проделаны в работах [1-6]. В настоящей работе рассмотрен, по-видимому, не рассматривавшийся ранее применительно к лазерным задачам и представляющий определенный практический интерес случай экспоненциального изменения диэлектрической проницаемости. В плоскости  $x=0$  предполагается резкий скачок  $\epsilon$ , обеспечивающий идеальное отражение излучения от плоскости  $x=0$ . Методом теории возмущений определено также влияние на волноводные моды неидеальности отражения от плоскости  $x=0$ .

### 1. Плоские волноводные моды в активной среде с ненасыщенным коэффициентом усиления

В соответствии с вышесказанным геометрию считаем плоской (зависимость поля от координаты  $y$  отсутствует) и полагаем

$$E_y|_{x=0} = 0. \quad (1.1)$$

Когерентное излучение распространяется в основном вдоль оси  $x$ , а диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 1 + \Delta\epsilon(x), \\ \Delta\epsilon(x) &= \Delta\epsilon'(x) + i\Delta\epsilon''(x), \\ \Delta\epsilon'(x) &= \Delta\epsilon'_0 e^{-2qx}, \\ \Delta\epsilon''(x) &= \Delta\epsilon''_0 e^{-qx}, \quad x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Будем считать  $|\Delta\varepsilon| \ll 1$ .

Рассмотрим поляризацию  $E_x = E_z = 0$  (как показано ниже, при  $|\Delta\varepsilon| \ll 1$  собственные типы колебаний практически не зависят от состояния поляризации).

Положим

$$E_y = \Psi(x) e^{i\omega t - ik_z z}, \quad (1.3)$$

где  $\omega$  — оптическая частота. Продольная компонента волнового вектора  $k_z$  находится из соотношения

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.4)$$

В свою очередь  $k_x^2 \equiv \lambda$  является собственным значением уравнения типа Шредингера, вытекающего из волнового уравнения после разделения переменных

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + [\lambda - U(x)]\Psi(x) = 0. \quad (1.5)$$

«Комплексный потенциал»  $U(x)$  имеет вид

$$U(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} \Delta\varepsilon(x). \quad (1.6)$$

Граничные условия (для дискретного спектра)

$$\Psi(0) = \Psi(\infty) = 0. \quad (1.7)$$

Сплошной спектр  $0 \leq \lambda < \infty$  [7] отвечает неубывающим в отличие от (1.7) решениям.

Решение (1.5) с учетом (1.6), (1.7), (1.2) выражается [8] через функции Уиттекера [9]

$$\Psi(x) = e^{xq/2} M_{p, \mu}(2i\beta e^{-qx}), \quad (1.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\Delta\varepsilon'_0}, \\ p &= \frac{\Delta\varepsilon''_0}{2q \sqrt{\Delta\varepsilon'_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

а величина  $\mu = \sqrt{-\lambda}$  ( $\text{Re } \mu > 0$ ) определяется из уравнения

$$M_{p, \mu}(2i\beta) = 0. \quad (1.10)$$

Асимптотика при больших  $x$

$$\Psi(x) \sim e^{-\mu x q}. \quad (1.11)$$

Для волны, поляризованной в плоскости падения ( $E_y = 0$ ), нетрудно определить уравнения вида (1.5), однако потенциал  $U$  будет содержать дополнительный член  $W(x)$ , который при  $|\Delta\varepsilon| \ll 1$  имеет вид [10]

$$W(x) = \frac{d^2}{dx^2} [\Delta\varepsilon'(x) + \Delta\varepsilon''(x)]/2. \quad (1.12)$$

Считая эту величину возмущением потенциала, можно определить поправку  $h_1$  к собственному числу  $\lambda^{(0)}$

$$h_1 = \int_0^\infty \Psi_0(x) \Psi_0^*(x) W(x) dx, \quad (1.13)$$

$\Psi_0(x)$  — нормированная собственная функция невозмущенного уравнения (1.5), отвечающая собственному числу  $\lambda^{(0)}$ ,

$$|h_1| \leq \max |W(x)| \int_0^\infty \Psi_0(x) \Psi_0^*(x) dx = |W(0)| = \frac{d^2}{dx^2} [\Delta\varepsilon'(x) + \Delta\varepsilon''(x)]_{x=0}/2. \quad (1.14)$$

## 2. Волноводные моды в среде с экспоненциальной неоднородностью показателя преломления

Более полная картина может быть получена из анализа волноводных мод, формируемых неоднородностью показателя преломления. Последующий учет усиления активной среды как малого возмущения возможен в двух следующих случаях. Во-первых, если градиент линейного (ненасыщенного) усиления мал по сравнению с градиентом показателя преломления

$$\left| \frac{d\Delta\epsilon''(x)}{dx} \right| \ll \left| \frac{d\Delta\epsilon'(x)}{dx} \right|, \quad (2.1)$$

что характерно для инжекционных лазеров [1]. Вторая возможность, реализующаяся в некоторых типах газовых лазеров, связана со значительным уменьшением усиления вследствие насыщения, не затрагивающего значения показателя преломления. Поэтому условие (2.1) будет выполняться тем лучше, чем больше мощность когерентного излучения.

В настоящем разделе мы найдем вид волноводных мод и угловую расходимость их излучения для случая  $\Delta\epsilon''(x) = 0$ . При этом вместо (1.8) получим

$$\Psi(x) = J_\mu(\beta e^{-qx}), \quad (2.2)$$

$J_\mu$  — функция Бесселя;  $\beta$ ,  $q$  и  $\mu$  определены в предыдущем разделе.

Вещественные собственные значения  $\mu$

$$0 < \mu < \beta \quad (2.3)$$

являются корнями уравнения

$$J_\mu(\beta) = 0. \quad (2.4)$$

Число корней (2.4) (и тем самым число волноводных мод) зависит от определяемой соотношением (1.9) величины  $\beta$ . При условии

$$\beta_m < \beta < \beta_{m+1} \quad (2.5)$$

уравнение (2.4) имеет  $m$  корней, удовлетворяющих условиям (2.3). Здесь  $\beta_m$  —  $m$ -тый корень хорошо изученного уравнения [11]

$$J_0(\beta_m) = 0. \quad (2.6)$$

При больших  $m \gg 1$  собственные значения  $\mu_m$  определяются соотношением

$$\mu_m \approx 2 \left( \frac{\beta}{\pi} - m + \frac{1}{4} \right), \quad \beta \gg 1, \quad m \gg 1. \quad (2.7)$$

Приближенные значения первых корней [12]

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \beta - 1.86 \beta^{1/3}, \\ \mu_2 &= \beta - 3.24 \beta^{1/3}, \\ \mu_3 &= \beta - 4.38 \beta^{1/3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Так как  $J_\mu^2(z)$  достигает наибольшего значения при  $z = \mu$ , примерная ширина поперечного распределения  $m$ -той моды

$$x_m^{(\max)} \approx \ln \left( \frac{\beta}{\nu_m} \right). \quad (2.9)$$

Видно, что с ростом  $m$  «поперечные размеры» моды увеличиваются. Асимптотика при больших поперечных удалениях

$$\Psi_m(x) \sim e^{-\nu_m x q}. \quad (2.10)$$

Результаты численного расчета поперечного распределения поля различных нормированных мод  $\Psi_m(x)$  при  $\beta = 60$  представлены на рис. 1.

При этом число волноводных мод равно 19, индекс  $m$  совпадает с числом нулей функции  $\Psi_m(x)$ .

Угловая расходимость излучения в плоскости  $xz$

$$I_m(\theta) = \frac{C}{N_m} \left| \int_0^{\infty} \Psi_m(x) e^{-ix\theta/q} dx \right|^2 \quad (2.11)$$

изображена на рис. 2, 3. Здесь введена нормировка

$$N_m = \int_0^{\infty} \Psi_m^2(x) dx, \quad (2.12)$$

а величина  $\theta = k\varphi/q$  пропорциональна углу  $\varphi$  ( $\varphi \ll 1$ ) в плоскости  $xz$  между направлением распространения излучения и осью  $z$ . Так как функции

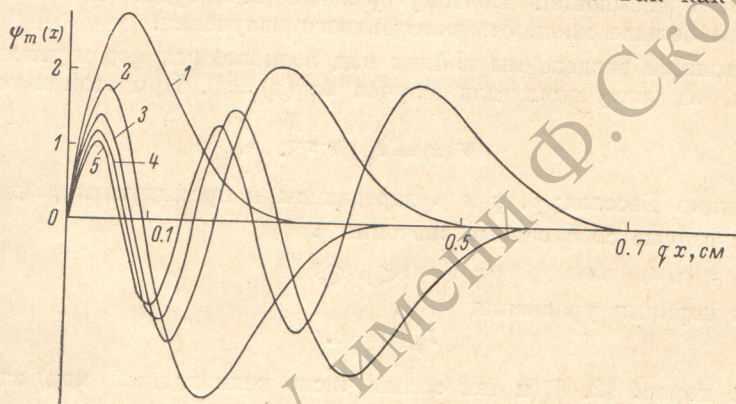


Рис. 1.

$\Psi_m(x)$  — вещественные, угловая расходимость каждой отдельной моды симметрична относительно оси  $z$ . Интересно, что с увеличением индекса

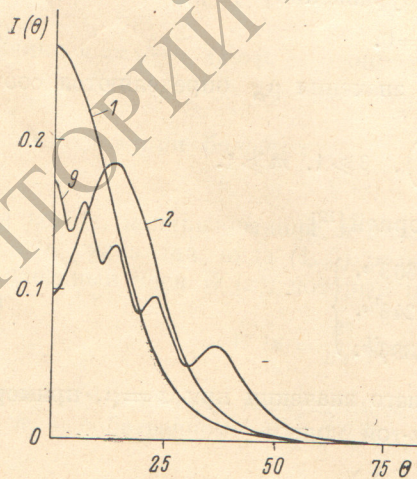


Рис. 2.

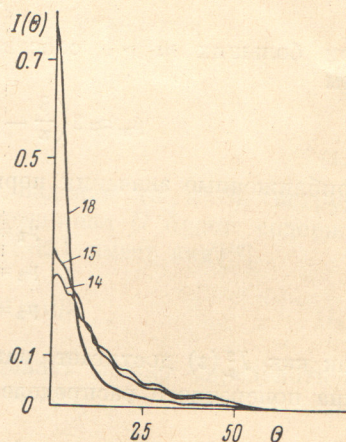


Рис. 3.

моды  $m$  сначала происходит увеличение угловой расходимости, а затем ее сужение, как это видно из рис. 3. Это является результатом «конкуренции» двух факторов, сопровождающих рост индекса моды  $m$ . С одной стороны, увеличивается число нулей функции  $\Psi_m(x)$  и соответственно число максимумов в угловой расходимости излучения. С другой стороны, увеличивается пространственная протяженность последнего, наиболее интенсивного максимума  $\Psi_m(x)$  (рис. 1).

При возрастании  $\beta$  увеличивается число волноводных мод, ширина поперечного распределения мод и их угловая расходимость. Поведение угловой расходимости в исследованных случаях такое же, т. е. с ростом индекса  $m$  сначала происходит увеличение угловой расходимости, а затем ее сужение.

### 3. Об отражении от границы активной среды

Неидеальность отражения когерентного излучения от границы активной среды (плоскость  $x=0$ ) может быть учтена методом теории возмущений. Невозмущенной задаче (идеальное отражение) отвечает собственное значение  $\lambda_m^{(0)}$  и собственная функция  $\Psi_m^{(0)}(x)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d^2 \Psi_m^{(0)}(x)}{dx^2} + [\lambda_m^{(0)} - U(x)] \Psi_m^{(0)}(x) = 0 \quad (3.1)$$

с граничным условием

$$\Psi_m^{(0)}(0) = 0. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) соответствует потенциалу с неограниченной вещественной частью

$$\operatorname{Re} U(x) = +\infty, \quad x \leq 0, \quad (3.3)$$

что может быть вызвано резким и значительным скачком показателя преломления (считаем  $\Delta \varepsilon'(x) < 0$  при  $x < 0$ ).

Конечные значения потенциала  $U(x)$  в возмущенной задаче приводят в виду неограниченности возмущения к невозможности использования обычного [1] варианта теории возмущений.

Вычисление первого приближения проводится в два этапа. На первом, исходя из конкретного вида комплексного потенциала в области  $x < 0$ , можно вычислить малую величину  $\delta_m$  ( $\delta_m \ll \max |\Psi_m^{(0)}(x)|$ ) такую, что

$$\Psi_m(0) = \delta_m. \quad (3.4)$$

Условие (3.4) заменяет (3.2) и сводит второй этап к решению задачи на полуоси  $0 \leq x < \infty$ .

Для собственной функции возмущенной задачи положим

$$\Psi_m(x) = \Psi_m^{(0)}(x + \Delta_m). \quad (3.5)$$

Малая величина  $\Delta_m$  определится из соотношения

$$\Psi_m(0) = \Psi_m^{(0)}(0) + \Delta_m \left. \frac{d\Psi_m^{(0)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \delta_m, \quad \Delta_m = \frac{\delta_m}{\left. \frac{d\Psi_m^{(0)}(x)}{dx} \right|_{x=0}}. \quad (3.6)$$

Уравнение для возмущенной функции  $\Psi_m(x)$  запишем в виде

$$\frac{d^2 \Psi_m(x)}{dx^2} + [\lambda_m^{(0)} - U(x + \Delta_m)] \Psi_m(x) + [\lambda_m^{(1)} + U(x + \Delta_m) - U(x)] \Psi_m(x) = 0. \quad (3.7)$$

Отсюда

$$\lambda_m^{(1)} = \frac{1}{N_m} \int_0^{\infty} \Psi_m^{(0)}(x) [U(x + \Delta_m) - U(x)] \Psi_m^{(0)}(x) dx. \quad (3.8)$$

Считая  $U(x)$  дифференцируемой функцией, получим

$$\lambda_m^{(1)} = -\Delta_m \Phi_m / N_m, \quad (3.9)$$

где

$$\Phi_m = \int_0^{\infty} \Psi_m^{(0)*}(x) \frac{dU(x)}{dx} \Psi_m^{(0)}(x) dx. \quad (3.10)$$

Для рассмотренного в предыдущем пункте случае  
будет

$$U(x) = -Ae^{-2qx}, \quad \Psi_m^{(0)}(x) = J_\mu(\beta e^{-qx})$$

$$\Phi_m = AJ_{\mu+1}^2(\beta). \quad (3.11)$$

Найдем теперь вид  $\Delta_m$  в двух важных случаях.

А. Резкая граница активной среды.

$$U(x) = U_0 = \text{const}, \quad x < 0. \quad (3.12)$$

Считаем

$$|U_0| \gg |\lambda_m^{(0)}|. \quad (3.13)$$

При  $x < 0$

$$\Psi_m(x) = \delta_m e^{\sqrt{U_0 - \lambda_m} x} \approx \delta_m e^{\sqrt{U_0} x}.$$

Берется ветвь  $\text{Re} \sqrt{U_0} > 0$ . Спивая значения производной  $d\Psi_m(x)/dx$  при  $x=0$ , найдем

$$\delta_m = \frac{1}{\sqrt{U_0}} \frac{d\Psi_m^{(0)}(x)}{dx} \Big|_{x=0}, \quad \Delta_m = \frac{1}{\sqrt{U_0}}. \quad (3.14)$$

При условии (3.14) относительные поправки будут малы.

Б. Постоянный градиент.

$$U(x) = U_0 - U_1 \frac{x}{d}, \quad x < 0. \quad (3.15)$$

Полагаем

$$|U_1| \gg |U_0|, \quad |\lambda_m^{(0)}|. \quad (3.16)$$

При этом условии, действуя как в предыдущем случае, найдем

$$\Delta_m = - \frac{(\lambda_m^{(0)} - U_0) d}{4U_1}. \quad (3.17)$$

При резком скачке, отвечающем сравнительно малой величине «ширины переходного слоя»  $d$ , отражение волновых мод от слоя можно считать идеальным.

#### Литература

- [1] А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко, С. Н. Столяров. Волновые свойства  $p-n$ -переходов и электромагнитная теория инжекционных лазеров. Препринт, Минск, 1970.
- [2] Т. И. Кузнецова. Тр. ФИАН, 43, 116, 1968.
- [3] В. С. Летохов, А. Ф. Сучков. Тр. ФИАН, 43, 169, 1968.
- [4] Е. М. Золотов, В. А. Киселев, В. А. Сычунов. Усп. физ. наук, 112, 231, 1974.
- [5] D. Marcuse. IEEE J. Quant. Electron., QE-9, 1000, 1973.
- [6] D. H. Smithgall, F. N. Dabby. IEEE J. Quant. Electron., QE-9, 1023, 1973.
- [7] И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа, 189. Физматгиз, М., 1963.
- [8] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 493. Физматгиз, М., 1965.
- [9] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, том II. Физматгиз, М., 1963.
- [10] Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, М., 1957.
- [11] Дж. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, I, 151, ИЛ, М., 1961.
- [12] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Физматгиз, М., 1968.

Поступило в Редакцию 30 сентября 1974 г.