

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ПРОИЗВОДНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ ПУТИ

Ю. П. Пресняков

Рассматривается задача определения изменений двумерной функции показателя преломления на основе измерения производной оптической длины пути луча, проходящего через исследуемый объект. В основе решаемой задачи лежит определение угла отклонения луча от его первоначального направления по выходе луча из объекта. Задача рассматривается в общем аналитическом виде, приводится способ ее численного решения на ЭВМ и результаты экспериментальной проверки углов отклонения лучей с последующим определением показателя преломления.

При изменении показателя преломления среды  $n_0$  на величину  $\Delta n(x, y)$  оптическая длина пути луча изменится на величину

$$\Phi_i = \frac{1}{\lambda} \int_{L_i} \Delta n(x, y) dL_i, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $L_i$  — траектория луча. Функция  $\Phi_i$  может быть измерена в интерференционных экспериментах, обработка результатов измерений заключается в решении уравнения (1). Обычно используется линейное приближение, т. е. траектории  $L_i$  считаются прямыми. В обзоре [1] даны некоторые методы решения уравнения (1), точное решение которого в линейном приближении можно записать в виде [2, 3]

$$\Delta n(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{r \cos(\varphi - \theta) - p} \frac{\partial \Phi(p, \varphi)}{\partial p}, \quad (2)$$

где  $r \cos \theta = x$ ,  $r \sin \theta = y$ . Внутренний интеграл в (2) берется в смысле главного значения, а функция  $\Phi(p, \varphi)$  предполагается известной для любой прямой  $L_i$ , нормальное уравнение которой имеет параметры  $|p|$  и  $\varphi$ .

В работе [4] отмечалось, что для исследования показателя преломления следует применять теневые методы или любые другие, в которых непосредственно измеряется производная  $\partial \Phi / \partial p$ . Причина такой рекомендации связана с желанием избежать операции дифференцирования экспериментальной функции  $\Phi(p, \varphi)$  в (2) при обработке несдвиговых интерферограмм.

В настоящей работе рассматривается задача вычисления  $\Delta n(x, y)$  по измерениям углов отклонения света, прошедшего через объект.

Используя в (2) соотношение между углом отклонения луча  $\Theta(p, \varphi)$  от прямолинейной траектории  $L_i$  и производной  $\partial \Phi / \partial p$ :  $\Theta(p, \varphi) = (\partial \Phi / \partial p) (\lambda / n_0)$ , получаем выражение

$$\Delta n(r, \theta) = \frac{n_0}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\xi - p} \Theta(p, \varphi), \quad (3)$$

где  $\xi \equiv r \cos(\varphi - \theta)$ , функция  $\Theta(p, \varphi)$  предполагается известной из эксперимента. Внутренний интеграл в (3) является сверткой обобщенной функции  $P \frac{1}{p}$  с функцией  $\Theta(p, \varphi)$ , следовательно, его можно представить в виде преобразования Фурье от произведения фурье-образов подынтегральных функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\xi - p} \Theta(p, \varphi) = F^{-1} \left[ F \left[ P \frac{1}{p} * \Theta(p, \varphi) \right] \right] = F^{-1} [i\pi \operatorname{sign} \omega \Theta_{\omega}(\varphi)] = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} \omega \Theta_{\omega}(\varphi) \exp(-i\omega\xi) d\omega, \quad (4)$$

где  $F[ ]$  и  $F^{-1}[ ]$  — символы прямого и обратного преобразования Фурье,  $*$  — символ свертки,  $\Theta_{\omega}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(p, \varphi) \exp(i\omega p) dp$ . Здесь использована формула  $F \left[ P \frac{1}{p} \right] = i\pi \operatorname{sign} \omega$  [5]. Подставляя (4) в (3) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\Delta n(r, \theta) = \frac{in_0}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} \omega \int_0^{2\pi} \Theta_{\omega}(\varphi) \exp\{-i\omega r \cos(\varphi - \theta)\} d\varphi d\omega. \quad (5)$$

Экспериментально можно измерить функции  $\Theta(p, \varphi_k)$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) при зондировании объекта  $N$  плоскими волнами, волновые векторы которых  $\mathbf{e}_k$  и  $\mathbf{e}_{k+1}$ ,  $k=1, 2, \dots, N-1$ , составляют угол  $180^\circ/N$ , причем все  $\mathbf{e}_k$  лежат в одной плоскости. Для вычислений по формуле (5) аппроксимируем дискретный набор экспериментальных функций по переменной  $\varphi$  тригонометрической суммой

$$\Theta(p, \varphi) = \sum_{m=1}^N a_m(p) \cos(m-1)\varphi. \quad (6)$$

Функции  $a_m(p)$  являются решением системы уравнений

$$\Theta(p, \varphi_k) = \sum_{m=1}^N a_m(p) \cos(m-1)\varphi_k, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Данная аппроксимация удобна тем, что внутренний интеграл в (5) может быть вычислен аналитически с использованием разложения экспоненты в ряд по функциям Бесселя. Выполним интегрирование в (5) для случая  $N=3$

$$\Delta n(r, \theta) = \frac{in_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ -J_0(\omega r) \operatorname{Im} A_1(\omega) + J_1(\omega r) \operatorname{Re} A_2(\omega) \cos \theta + J_2(\omega r) \operatorname{Im} A_3(\omega) \cos 2\theta \} d\omega, \quad (7)$$

где  $A_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a_m(p) \exp(i\omega p) dp$ ,  $m=1, 2, 3$ ,  $J_0, J_1, J_2$  — функции Бесселя. Для  $N > 3$  в выражение для  $\Delta n$  будут входить функции Бесселя с индексами  $m=0, 1, \dots, N-1$ . Для осесимметричного объекта

$$\Delta n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J_0(\omega r) \left\{ \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \Theta(p) \exp(i\omega p) dp \right\} d\omega.$$

Функция  $\Delta n(r, \theta)$  вычислялась на ЭВМ по схеме: исходные данные:  $\Theta(p_i, \varphi_k) \rightarrow$  аппроксимация кубическими сплайнами [6] по переменной  $p \rightarrow$  вычисление функций  $a_m(P)$  по точным формулам решения системы

уравнений (6) → вычисление фурье-образов  $A_i(\omega)$  с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье → вычисление  $\Delta n(r, \theta)$ . Величина верхнего предела интегрирования равна 64.

Метод вычисления  $\Delta n$  по формуле (7) проверен на тест-функции

$$\Delta n(x, y) = 10^{-4} \begin{cases} 1 - \frac{(x-0.2)^2 + y^2}{0.64}, & (x-0.2)^2 + y^2 \leq 0.64; \\ 0, & (x-0.2)^2 + y^2 > 0.64. \end{cases}$$

Значения функций  $\Theta(p, \varphi_k)$  задавались в 12 точках с погрешностью до 5% от  $|\Theta|_{\max}$ . На рис. 1 сплошная кривая — тест-функция  $\Delta n(x, 0)$ , точками отмечены результаты вычислений. Абсолютная погрешность вычисленных значений не превышала 3% от  $|\Delta n|_{\max}$ , что характеризует устойчивость данного алгоритма.

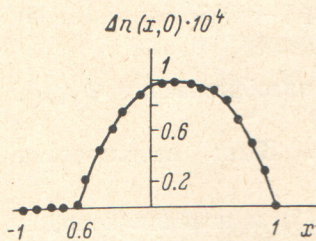


Рис. 1. График тест-функции.

В эксперименте по измерению углов отклонения света для трех направлений просвечивания была использована та же аппаратура и оптическая схема, что и для регистрации интерферограмм углового сдвига в работе [7]. Исключением составляла диафрагма, которая в настоящей работе имела только одно отверстие. Схема одного из каналов регистрации приведена на рис. 2. Принцип действия ее заключается в следующем: диффузор 1, освещенный расширенным лучом многомодового рубинового лазера, фотографируется линзой 4 с диафрагмой 3 на фотопластинку 5 дважды, причем объект 2 присутствует только во время одной экспозиции. Исследовалось несимметричное пламя спирта размером  $2p_0 \approx 25$  мм, расстояние объекта до диффузора  $z=90$  мм, расстояние от линзы до диффузора  $d_0=360$  мм, а от линзы до фотопластинки 310 мм, диаметр диафрагмы 5 мм. В работе [8] показано, что при освещении узким ( $\approx 2$  мм) лучом лазера проявленной фотопластинки в фурье-плоскости возникнут

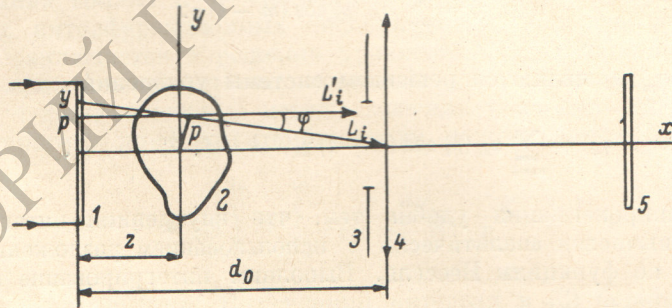


Рис. 2. Схема эксперимента.

параллельные интерференционные полосы, период которых  $T \sim \Theta^{-1}$ , а направление в случае двумерного объекта перпендикулярно плоскости  $(x, y)$ . При перемещении восстанавливающего луча по фотопластинке вдоль оси  $y$  период полос будет изменяться. Для геометрии схемы рис. 2 угол отклонения света связан с периодом полос соотношением

$$\Theta(y) = \frac{\lambda f d_0}{d_i z T(y)}, \quad (8)$$

где  $\lambda$  — длина волны восстанавливающего луча,  $f$  — фокусное расстояние линзы, выполняющей преобразование Фурье в схеме регистрации полос. В настоящей работе использовалась схема безлинзового преобразования Фурье [9] с расстоянием от фотопластинки до экрана  $f=1$  м. Период полос измерялся непосредственно на экране, и по формуле (8) вычислялась функция  $\Theta(y)$ , причем при  $y \ll d_0 p \approx y(1 - z/d_0)$ , а иско-

$$\Theta(p) \approx \Theta\left[y\left(1 - \frac{z}{d_0}\right)\right]. \quad (9)$$

Равенство (9) выполняется тем точнее, чем меньше угол  $\phi$  между траекториями  $L_i$  и  $L'_i$  на рис. 2. Для данной схемы

$$\varphi \approx \frac{p}{d_0 - z} \ll 1.$$

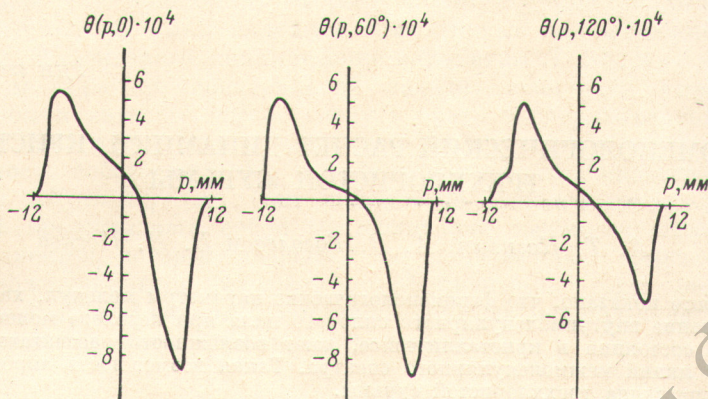


Рис. 3. Результаты измерений углов отклонения света.

Аналогичным образом были обработаны все три фотопластинки. Графики функций  $\Theta(p, \varphi_k)$  приведены на рис. 3. В ЭВМ вводились по 26 измеренных значений каждой из функций  $\Theta(p, \varphi_k)$ . На рис. 4 показан график вычисленной функции показателя преломления пламени вдоль одного из диаметров. Величина  $|\Delta n|_{\max} \approx 1.6 \cdot 10^{-4}$  соответствует результату, полученному в [10] при обработке голографической интерферограммы пламени спиртовки.

Отметим, что рассмотренный метод измерения показателя преломления позволяет регулировать чувствительность изменением геометрии схемы, что имеет важное значение при исследовании оптически плотных объектов со сложной пространственной структурой. Голографические и классические интерферограммы таких объектов не всегда допускают однозначную нумерацию полос. Для обработки интерферограмм дифференциального сдвига также может быть использована формула, отличающаяся от (7) только постоянным множителем.

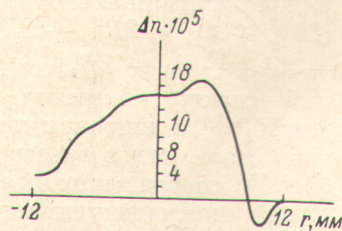


Рис. 4. Рассчитанный на ЭВМ показатель преломления.

Автор благодарен А. Н. Гордееву за выполнение вычислений на ЭВМ.

#### Литература

- [1] D. W. Sweeney, C. M. Vest. Appl. Opt., 12, 2649, 1973.
- [2] M. V. Berry, D. F. Gibbs. Proc. Roy. Soc., A314, 143, 1970.
- [3] H. G. Junginger, W. van Haeringen. Opt. Comm., 5, 1, 1972.
- [4] L. H. Tanner. J. of Phys. E: Sci. Instrum., 3, 987, 1970.
- [5] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1967.
- [6] Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. Изд. «Мир», М., 1972.
- [7] Ю. П. Пресняков, В. Я. Царфин. Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр., 19, 150, 1974.
- [8] Ю. П. Пресняков, В. Я. Царфин. Измерительная техника, № 12, 54, 1974.
- [9] Дж. Гудмен. Введение в фурье-оптику. Изд. «Мир», М., 1970.
- [10] К. С. Мустафин, В. А. Селезнев, Е. И. Штырков. Опт. и спектр., 22, 319, 1967.

Поступило в Редакцию 6 января 1975 г.