

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Скиба, О произведении формаций, *Алгебра и логика*, 1983, том 22, номер 5, 574–583

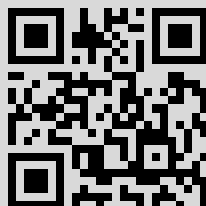
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

28 февраля 2022 г., 17:21:04



О ПРОИЗВЕДЕНИИ ФОРМАЦИЙ

А. Н. СКИБА

По аналогии с многообразиями Кросса формацию $\mathcal{F}$ назовем *формацией Кросса* (или *кроссовой формацией*), если $\mathcal{F}$ — формация, порожденная некоторой конечной группой. Формацию $\mathcal{F} = \text{form } G$, где G — некоторая конечная группа, будем называть *локальной формацией Кросса* (или, иначе, *локальной кроссовой формацией*). В работе [1], посвященной изучению произведений многообразий, А. Л. Шмелькин, в частности, описал условия, при которых произведение двух многообразий есть многообразие Кросса. В настоящей работе описаны условия, при которых произведение двух формаций, одна из которых локальна, является локальной формацией Кросса. Это позволило, во-первых, получить аналоги отмеченного результата А. Л. Шмелькина (следствия 1 и 2), а во-вторых, дать такое доказательство этого результата (см. следствие 3), которое сводится к рассмотрению произведений формаций конечных групп (ср. с [2]).

Работа базируется на полученном Л. А. Шеметковым [3] описании экранов произведений формаций.

Все рассматриваемые формации (не являющиеся многообразиями) предполагаются состоящими лишь из конечных групп. Для любого класса групп $\mathcal{H}$ минимальной локальной не $\mathcal{H}$ -формацией называется [4] всякая не входящая в $\mathcal{H}$ локальная формация, все нетривиальные локальные подформации которой входят в $\mathcal{H}$. Под монолитической группой мы будем подразумевать группу с единственной минимальной нормальной подгруппой. Знак $\subset$ обозначает строгое включение. Локальная формация $\mathcal{M}$ называется *максимальной локальной подформацией* формации $\mathcal{F}$, если $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ и не существует такой локальной формации $\mathcal{H}$, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Для любой группы G и всякого натурального числа n через G^n будем обозначать некоторое прямое произведение n изоморфных копий группы G . В остальных определениях и обозначениях будем следовать книге [5].

Из работы [3] вытекает следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ — некоторые непустые

формации, причем $\pi(\mathfrak{f}_2) \subseteq \pi(\mathfrak{m})$. Тогда если формация $\mathfrak{m}$ имеет локальный экран f_1 , то формация $\mathfrak{m}\mathfrak{f}_2$ имеет такой локальный экран f , что для любого простого числа p имеет место:

- 1) $f(p) = f_1(p)\mathfrak{f}_2$, если $p \in \pi(\mathfrak{m})$;
- 2) $f(p) = \emptyset$, если $p \notin \pi(\mathfrak{m})$.

ЛЕММА 2. Если $\mathfrak{f} = \mathfrak{m}\mathfrak{f}_2$, где $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{m}$ — неединичные локальные формации, а $\mathfrak{f}_2$ — такая формация, что $\pi(\mathfrak{f}_2) \not\subseteq \pi(\mathfrak{m})$, то множество локальных S -замкнутых подформаций формации $\mathfrak{f}$ бесконечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{f}_2) \setminus \pi(\mathfrak{m})$. Ясно, что $\mathfrak{f}_2 \subseteq \mathfrak{f}$. Значит, $p \in \pi(\mathfrak{f})$. Формация $\mathfrak{f}$ локальна. Следовательно, $\pi_p \subseteq \mathfrak{f}$. Пусть A — произвольная группа из π_p . Так как $A \in \mathfrak{f} = \mathfrak{m}\mathfrak{f}_2$, то $A \in \mathfrak{m}$. Но $p \notin \pi(\mathfrak{m})$. Поэтому $A \in \mathfrak{f}_2$. Таким образом, $\pi_p \subseteq \mathfrak{f}_2$. Пусть $q \in \pi(\mathfrak{m})$. Тогда $q \neq p$ и $\pi_q \subseteq \mathfrak{m}$, поскольку формация $\mathfrak{m}$ локальна. Для всякого натурального числа n зафиксируем некоторую циклическую группу P_n порядка p^n . Пусть $Q_n = Q_1 P_n$ — регулярное сплетение, где $|Q_1| = q$. Обозначим через $\mathfrak{f}_n$ локальную формацию, порожденную группой Q_n . Группа Q_n является расширением q -группы с помощью p -группы. Следовательно, $Q_n \in \pi_q \pi_p \subseteq \mathfrak{m}\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}$. Значит, $\mathfrak{f}_n \subseteq \mathfrak{f}$. Поскольку группа Q_n метанильпотентна, то $\mathfrak{f}_n \subseteq \pi_q^e$. Ввиду леммы 1.9 из [6] всякая локальная подформация формации π_q^e S -замкнута. Таким образом, при всяком натуральном n $\mathfrak{f}_n$ — S -замкнутая локальная подформация формации $\mathfrak{f}$. Покажем, что если n и m — различные натуральные числа, то $\mathfrak{f}_n \neq \mathfrak{f}_m$. Пусть f_n и f_m — минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{f}_n$ и $\mathfrak{f}_m$ соответственно. По лемме 3 из [7] $f_n(q) = \text{form}(Q_n / F_q(Q_n))$, $f_m(q) = \text{form}(Q_m / F_q(Q_m))$. Используя свойства сплетений, легко убедиться, что для всякого натурального числа n $Q_n / F_q(Q_n) \simeq P_n$. По теореме 2.2 из [5] $\text{form}(Q_n / F_q(Q_n)) = \text{form}(Q_n / F_q(Q_n))_q = \text{form}(Q_n / F_q(Q_n))_q$. Значит, экспонента любой группы из $\text{form}(Q_n / F_q(Q_n))_q$ не превышает экспоненту группы P_n . Но P_n — циклическая группа. Следовательно, экспонента группы P_n совпадает с ее порядком. Таким образом, $f_n(q) \neq f_m(q)$. Последнее означает, что $\mathfrak{f}_n \neq \mathfrak{f}_m$. Итак, в $\mathfrak{f}$ содержится бесконечное множество локальных S -замкнутых подформаций $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Тогда и только тогда f - локальная формация Кросса, когда $\pi(f)$ - конечное множество и f имеет такой внутренний локальный экран f , что $f(p)$ - формация Кросса при всех $p \in \pi(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдется такая группа G , что $f = \text{lform} G$. Тогда $\pi(f) = \pi(G)$ - конечное множество. Кроме того, по лемме 3 из [7] f имеет такой локальный экран f , что $f(p) = \text{form}(G/F_p(G))$ - формация Кросса при всех $p \in \pi(G)$.

Обратно, пусть $\pi(f) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - конечное множество и $f = \langle f \rangle$, где f - такой внутренний локальный экран формации f , что $f(p)$ - формация Кросса при всех $p \in \pi(f)$. Для всякого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ через G_i обозначим одну из групп, порождающих формацию $f(p_i)$, а через F_i - регулярное сплетение $L_i \wr (G_i/O_{p_i}(G_i))$, где L_i - группа порядка p_i . Покажем, что $f = f_0 = \text{lform} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$. Поскольку f - внутренний экран формации f и F_i - расширение p_i -группы с помощью группы $G_i/O_{p_i}(G_i) \in f(p_i)$, то по лемме 3.11 из [5] $F_i \in f$. Следовательно, $f_0 \subseteq f$. Для доказательства обратного включения покажем, что $f \leq t$, где t - максимальный внутренний локальный экран формации f_0 . Так как $F_i \in f_0$, то по лемме 4.5 из [5] $F_i/F_{p_i}(F_i) \in t(p_i)$. Но, как нетрудно заметить, $F_i/F_{p_i}(F_i) \cong G_i/O_{p_i}(G_i)$. Значит, $G_i \in \mathcal{N}_{p_i} t(p_i)$. По теореме 3.3 из [5] $t(p_i) = \mathcal{N}_{p_i} t(p_i)$. Таким образом, $f(p_i) = \text{form} G_i \subseteq t(p_i)$. Поэтому $f \subseteq f_0$. Следовательно, $f = f_0 = \text{lform} F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ - локальная формация Кросса. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Тогда и только тогда произведение $m \cap h$ неединичной локальной формации m на неединичную формацию h - локальная формация Кросса, когда выполняются следующие условия: 1) $\pi(h) \subseteq \pi(m)$; 2) m - метанильпотентная локальная формация Кросса; 3) $\pi(h) \cap \pi(m(p)) = \emptyset$ для всех $p \in \pi(m)$, где m - минимальный локальный экран формации m ; 4) если $|\pi(m)| > 1$, то h - формация Кросса, причем $m \not\subseteq n$ влечет $h \in n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через f формацию $m \cap h$, а через h - ее минимальный локальный экран.

Предположим, что f - локальная формация Кросса, т.е. для некоторой

группы F справедливо, что $F = \text{form } G$. Покажем, что формации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{W}$ удовлетворяют условиям 1) - 4).

Допустим что $\pi(\mathcal{W}) \not\subseteq \pi(\mathcal{M})$. Тогда по лемме 2 в формации F содержится бесконечное множество локальных S -замкнутых подформаций. Но формация F содержится в S -замкнутой локальной формации, порожденной группой F , причем по теореме 2.1 из [6] в последней формации имеется лишь конечное множество локальных S -замкнутых подформаций. Противоречие. Значит, $\pi(\mathcal{W}) \subseteq \pi(\mathcal{M})$, т.е. $\mathcal{M}$ и $\mathcal{W}$ удовлетворяют условию 1).

Ввиду леммы 1 формация F имеет такой локальный экран f , что $f(p) = \text{mip}(p)\mathcal{W}$ для всех $p \in \pi(\mathcal{M})$ и $f(p) = \emptyset$ при всяком простом $p \notin \pi(\mathcal{M})$. Поскольку $\mathcal{M}$ - внутренний экран формации $\mathcal{M}$, то f - внутренний экран формации F . Предположим, что найдутся такие различные простые числа p и q , что в формации $\text{mip}(p)$ содержится группа Z_q порядка q и $q \in \pi(\mathcal{W})$. Пусть H - некоторая q -группа из $\mathcal{W}$. Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение $Z_q \wr H^n$. Ясно, что $H_n \in \text{mip}(p)\mathcal{W}$ и $O_p(H_n) = 1$. Следовательно, по лемме 3 из [7] $H_n \in h(p)$. Если L - подгруппа порядка q из H , то $Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в H_n . Ввиду [5] степень нильпотентности группы $Z_q \wr L^n$ равна $n+1$. Но по лемме 3 из [7] $h(p) = \text{form}(F/F_p(F))$. Следовательно, по лемме 5 из [9] всякая силовская q -подгруппа из H_n принадлежит формации, порожденной силовской q -подгруппой из $F/F_p(F)$. Последнее означает, что степень нильпотентности группы $Z_q \wr L^n$ не превышает (при любом натуральном n) степень нильпотентности группы $(F/F_p(F))_q$. Противоречие. Итак, в дальнейшем мы можем считать, что если p и q - различные простые числа и группа Z_q порядка q принадлежит формации $\text{mip}(p)$, то $q \notin \pi(\mathcal{W})$. Более того, покажем, что в такой ситуации формация $\mathcal{W}$ абелева. Предположим противное и пусть M - неабелева группа из $\mathcal{W}$. Тогда $q \notin \pi(M)$. Следовательно, как показано в [10] для всякого натурального n существует неприводимый $\text{GF}(q)[M^n]$ -модуль L размерности $\geq 2^n$. Поскольку $M \in \mathcal{W}$ и L - элементарная абелева q -группа, то $R = L \times M^n \in \text{mip}(p)\mathcal{W}$. Но $\text{mip}(p)\mathcal{W} = f(p)$. Следовательно, по лемме 3 из [7] $R/O_p(R) \in h(p)$. Заметим, что группа $R/O_p(R)$ обладает главным фактором $L O_p(R)/O_p(R)$ порядка $\geq q^{2^n}$. С другой стороны, $h(p) = \text{form}(F/F_p(F)) = \text{QR}_0(F/F_p(F))$. Значит, порядок всякого главного фактора любой группы из $h(p)$ не превосходит

$$|F/F_p(F)|$$

. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{H}$ - абелева формация.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ - метанильпотентная локальная формация Кросса. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$, и пусть A - группа минимального по - рядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}^2$. Группа A обладает единственной минимальной нормальной подгруппой R , совпадающей с ее $\mathfrak{N}^2$ -корадикалом. Поскольку формация $\mathfrak{N}^2$ локальна то $R \notin \Phi(A)$. Значит, γ - корадикал группы A не содержит фраттиниевых A -главных факторов. Пусть $f_0 = \text{lform } A$, f_0 - минимальный локальный экран формации f_0 . По лемме 3 из [7] $f_0(p) = \text{lform}(A/F_p(A))$ для всех $p \in \pi(A)$ и $f_0(p) = \emptyset$ при всяком простом $p \notin \pi(A)$. Ввиду следствия 4 из [9] при всяком $p \in \pi(A)$ формация $f_0(p)$ содержит лишь конечное множество подформаций. Следовательно, лишь конечное множество локальных экранов t удовлетворяет условию $t \leq f_0$. Привлекая теперь следствие 4 из [7], видим, что в формации f_0 содержится лишь конечное множество локальных подформаций. Заметим, что $\mathfrak{N}^2 \not\subseteq f_0$, но $\mathfrak{E} \subseteq f_0 \cap \mathfrak{N}^2$. Значит, в формации f_0 содержится минимальная локальная не $\mathfrak{N}^2$ -формация $\mathfrak{M}_0$. По теореме 2 из [7] $\mathfrak{M}_0 = \text{lform } G$, где группа G удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $G^{\mathfrak{N}}$ - неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G ; 2) $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ - минимальная нормальная подгруппа в G , а $H = Q \rtimes N \neq 1$ где $Q = C_H(Q) = N^{\mathfrak{N}}$ - минимальная нормальная подгруппа в H . Пусть G удовлетворяет условию 1), $p \in \pi(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{M}_0 \subseteq f_0 \subseteq \mathfrak{M}$, то по лемме 4, 5 из [5] $G/F_p(G) \in \mathfrak{M}(p)$. Но $G^{\mathfrak{N}}$ - неабелева группа. Значит, $F_p(G) = 1$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}(p)$. Пусть M - неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через G_n обозначим регулярное сплетение $G \sim M^n$. Покажем, что при некотором $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}})$ группа G_n принадлежит $\mathfrak{M}(p)\mathfrak{H}$. Это очевидно в случае, когда G - простая группа. Предположим, что $G^{\mathfrak{N}} \neq G$. Пусть $q \in \pi(G/G^{\mathfrak{N}})$. Тогда, ввиду нильпотентности группы $G/G^{\mathfrak{N}}$, в ней найдется максимальная подгруппа индекса q . Значит, одна из фактор-групп группы G имеет порядок, равный q . Следовательно, при любом $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}})$ формация $\mathfrak{M}(p)$ содержит группу порядка q . Пусть $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}}) \setminus q$. Тогда ввиду замечаний из предыдущего абзаца формация $\mathfrak{H}$ абелева и $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Из последнего легко вытекает, что $\mathfrak{H}$ - корадикал группы G_n совпадает с ее базой T . Но T является прямым произведением групп, изоморфных G . Значит, $T \in \mathfrak{M}(p)$. Таким образом, $G_n \in \mathfrak{M}(p)\mathfrak{H}$.

Легко видеть, что $O_p(G_n) = 1$. Следовательно, ввиду леммы 3 из [7] $G_n \in h(p)$. Используя свойства сплетений, легко убедиться, что группа G_n обладает минимальной нормальной подгруппой порядка $|G_n|^{m_1^{m_2}}$. Но как уже отмечалось, порядки главных факторов всех групп из $h(p)$ не превосходят $|F/F_p(F)|$. Противоречие. Предположим теперь, что G удовлетворяет условию 2). Пусть $p \in \pi(p)$, $q \in \pi(q)$. Легко показать, что $F_p(G) = P$ и $F_q(G) = PQ$. Значит, поскольку $G \in \mathcal{M}$, то $G/F_p(G) \cong H \in \pi(p)$ и $G/F_q(G) \cong N \in \pi(q)$. Ввиду леммы 3.9 из [5] $O_q(N) = 1$. Но N — нильпотентная неединичная группа. Следовательно, в формации $\pi(q)$ имеется такая группа E простого порядка, что $q \notin \pi(E)$. Значит, $\mathcal{H}_q$ — абелева формация и $\pi(N) \cap \pi(\mathcal{H}_q) = \emptyset$. Пусть M — некоторая неединичная группа из $\mathcal{H}_q$. Используя сделанные замечания, легко убедиться, что при любом натуральном n регулярное сплетение $H \wr M^n$ принадлежит $\pi(p) \mathcal{H}_q$. Ввиду леммы 3.9 из [5] $O_p(H) = 1$. Значит, $O_p(H \wr M^n) = 1$. Следовательно, $H \wr M^n \in h(p)$. Но группа $H \wr M^n$ имеет минимальную нормальную подгруппу порядка $|G|^{m_1^{m_2}}$. Это приводит к противоречию. Итак, остается заключить, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}^2$. Покажем, что $\mathcal{M}$ — локальная формация Кросса. Ввиду леммы 1.9 из [6] всякая локальная подформация из $\mathcal{M}$ S -замкнута. Следовательно, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$. Как отмечалось ранее, в формации $\mathcal{F}$ содержится лишь конечное множество локальных S -замкнутых подформаций. Значит, существует такая цепь $\mathcal{E} = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_n = \mathcal{M}$ локальных формаций, что $\mathcal{M}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathcal{M}_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Пусть $H_i \in \mathcal{M}_i \setminus \mathcal{M}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\mathcal{M} = \text{form}(H_1, H_2, \dots, H_n) = \text{form}(H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)$. Таким образом, $\mathcal{M}$ — локальная формация Кросса. Итак, $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию 2).

Предположим, найдутся такие простые числа p и q , что $q \in \pi(\mathcal{H}_q) \cap \pi(\pi(p))$. Так как формация $\mathcal{M}$ метанильпотентна, то по лемме 3 из [7] $\pi(p) \subseteq \mathcal{H}_p$. Следовательно, $q \neq p$ и в формации $\pi(p)$ имеется группа порядка q . Значит, как показано ранее, $q \notin \pi(\mathcal{H}_q)$. Противоречие. Таким образом, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}_q$ удовлетворяют условию 3).

Пусть $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{H}$. Тогда найдется такое $p \in \pi(\mathcal{M})$, что $\mathcal{E} \subset \pi(p)$. Но $\pi(p) \subseteq \mathcal{H}_p$. Следовательно, в формации $\pi(p)$ имеется такая группа M простого порядка, что $p \notin \pi(M)$. Ввиду замечания из второго образца $\mathcal{H}_p$ — абелева. Предположим теперь, что $|\pi(\mathcal{M})| > 1$. Обозначим через $\mathcal{F}_p$ формацию $\text{form}(F/F_p(F) | p \in \pi(F))$. Поскольку всякая формация, порожденная некоторым конеч-

ным множеством групп, совпадает с формацией, порожденной прямым произведением групп из этого множества, то F_0 - формация Кросса. Пусть A - произвольная монолитическая группа из $\mathcal{H}$. Нетрудно заметить, что $O_p(A) = 1$ для некоторого $p \in \pi(m)$. Значит, по лемме 3 из [7] $A \in \text{hip} = \text{form}(F/F_p(F)) \in F_0$. Итак, всякая монолитическая группа из $\mathcal{H}$ входит в F_0 . Следовательно, $\mathcal{H} \subseteq F_0$. Пусть $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$. Тогда $\bar{F} \in m\mathcal{H} \subseteq n^2\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$. Значит, F_0 - разрешимая формация Кросса. Привлекая теперь результаты работы [11] заключаем, что $\mathcal{H}$ - формация Кросса. Пусть $\mathcal{H} \not\subseteq \mathcal{C}$. Тогда ввиду доказанного выше $m \subseteq n$. Следовательно, $\text{hip} = \mathcal{C}$ при всех $p \in \pi(m)$. Таким образом, $f_p = \text{hip} \mathcal{H} = \mathcal{H}$. Но $h \leq f$. Значит, $F/F_p(F) \in \mathcal{H}$ при всех $p \in \pi(F)$, т.е. $F_0 \subseteq \mathcal{H}$. Таким образом, $\mathcal{H} = F_0$ - формация Кросса. Итак, m и $\mathcal{H}$ удовлетворяют условию 4). Этим мы завершили доказательство необходимости.

Докажем теперь достаточность. Пусть $\pi(m) = \{p\}$. Тогда ввиду условия 1) $\bar{F} \subseteq \pi_p$. Но $\bar{F}$ - локальная формация. Значит, $\bar{F} = \pi_p$. Следовательно, $\bar{F} = \text{form } \mathcal{Z}_p$, где $\mathcal{Z}_p$ - группа порядка p . Рассмотрим случай, когда $|\pi(m)| > 1$. Покажем, что $\text{hip} \mathcal{H}$ - формация Кросса при всех $p \in \pi(m)$. Если $m \subseteq n$, то $\text{hip} = \mathcal{C}$ при всех $p \in \pi(m)$ и, следовательно, $\text{hip} \mathcal{H} = \mathcal{H}$ - формация Кросса по условию. Пусть $m \not\subseteq n$. По условию в этом случае $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$. Так как $m \subseteq n^2$, то $\text{hip} \subseteq n$. Значит, $\text{hip} \mathcal{H}$ - разрешимая формация. Так как m - локальная формация Кросса, то hip - формация Кросса. Пусть $\text{hip} = \text{form } A$, $\mathcal{H} = \text{form } B$. Пусть L - произвольная группа из $\text{hip} \mathcal{H}$. Так как $L^m \in \text{hip}$, то экспонента группы L не превосходит произведения экспонент групп A и B . Пусть Q - силовская q -подгруппа группы L ($q \in \pi(L)$). Так как $QL^m/L^m \cong Q/L^m \cap Q$ и по условию $\pi(\text{hip}) \cap \pi(\mathcal{H}) = \emptyset$, то либо $Q \subseteq L^m$, либо $Q \cap L^m = 1$. По лемме 5 из [9] в первом случае $Q \in \text{form } A_q$, во втором $Q \in \text{form } B_q$. Следовательно, степень любой нильпотентной секции из L не превосходит наибольшую из степеней силовских подгрупп группы A (напомним, что $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$). Рассмотрим главный фактор H/K группы L . Так как L^m - нильпотентная группа, то $L^m \subseteq C_L(H/K)$. Значит, $L/C_L(H/K)$ - циклическая группа, поскольку она является неприводимой абелевой группой автоморфизмов. Но $L/C_L(H/K) \in \mathcal{H}$. Следовательно, порядок группы $L/C_L(H/K)$ не превышает экспоненту группы B . Но тогда по лемме 5.2.24 из [12] $|H/K| \leq |A| \cdot |B|^{181}$. Итак, порядки главных факторов, экспоненты и степени нильпотентных секций всех

групп из $\text{supr } \mathcal{W}$ образуют конечное множество. Следовательно, ввиду результатов работы [11] $\text{supr } \mathcal{W}$ - формация Кросса.

Итак, мы показали, что $\text{supr } \mathcal{W} = f(p)$ - формация Кросса при всех $p \in \pi(m) = \pi(f)$. Но f - внутренний локальный экран формации f . Значит, по лемме 3 f - локальная формация Кросса.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Тогда и только тогда произведение неединичных локальных формаций m и $\mathcal{W}$ - локальная формация Кросса, когда $m = \mathcal{W} = n_p$, где p - некоторое простое число.

СЛЕДСТВИЕ 2. Тогда и только тогда произведение неединичных формаций m и $\mathcal{W}$ - формация Кросса, когда выполняются следующие условия: 1) m и $\mathcal{W}$ - формации Кросса; 2) $m \subseteq n$, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$; 3) $\pi(m) \cap \pi(\mathcal{W}) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m\mathcal{W} = \text{form } G$, $\pi = \pi(G) \cup \pi(m) \cup \{q\}$, где q - некоторое простое число, не принадлежащее $\pi(G)$. Ввиду леммы 1 формации $f_1 = n_\pi m$ и $f_2 = n_\pi(m\mathcal{W})$ имеют такие локальные экраны f_1 и f_2 соответственно, что $f_1(p) = m$, $f_2(p) = m\mathcal{W}$ при $p \in \pi$ и $f_1(p) = f_2(p) = \emptyset$, если $p \notin \pi$. Ясно также, что $f_2 = f_1\mathcal{W}$. Предположим сначала, что $\pi(m)$ - конечное множество. Тогда по лемме 3 f_2 - локальная формация Кросса. Ввиду доказанной теоремы $\mathcal{W}$ - абелева формация Кросса, f_1 - метанильпотентная локальная формация Кросса. Значит, $\text{supr } m$ - нильпотентная формация Кросса, где m - минимальный локальный экран формации f_1 , $p \in \pi$. По лемме 3 из [7] для любой монолитической группы H из m найдется такое $p \in \pi$, что $H \in \text{supr } m$. Поэтому $m \subseteq \text{form}(\bigcup_{p \in \pi} \text{supr } m)$. Следовательно, ввиду 1) m - нильпотентная формация Кросса. Поскольку по условию 3) теоремы $\pi(\mathcal{W}) \cap \pi(\text{supr } m) = \emptyset$ при всех $p \in \pi$, то $\pi(m) \cap \pi(\mathcal{W}) = \emptyset$. Так как $m\mathcal{W}$ - формация Кросса, то $G^{\mathcal{W}} \neq 1$. Пусть $m_0 = \text{form } G^{\mathcal{W}}$. Тогда $m_0\mathcal{W} = \text{form } G$. Следовательно, ввиду доказанного $m_0 \subseteq n$ и $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$, т. е. $G \in \mathcal{X}$. Значит, по [11] в $m\mathcal{W}$ всякая подформация кроссова. Пусть $m_1 = \text{form } A$, $A \in m$. Тогда $m_1\mathcal{W} \subseteq m\mathcal{W}$. Следовательно, $m_1 \subseteq n$. Значит, $m \subseteq n$. Но $m\mathcal{W}$ - формация Кросса. Поэтому $\pi(m)$ - конечное множество.

С другой стороны, если m и $\mathcal{W}$ - формации Кросса, $m \subseteq n$, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ и $\pi(m) \cap \pi(\mathcal{W}) = \emptyset$, то, как было показано в ходе

доказательства теоремы, $m \wedge n$ - формация Кросса.

Следствие доказано.

Для всякого многообразия групп F через F^{χ} будем обозначать множество всех конечных групп из F . Хорошо известно, что если многообразие F локально-конечно, то $F = \text{var}(F^{\chi})$. Кроме того, в этом случае оно кроссово в точности тогда, когда F^{χ} - формация Кросса. Действительно, если $F = \text{var } G$, где G - конечная группа, то по теореме 51.1 из [12] и лемме 2.1 из [6] $F^{\chi} = QR_0S(G)$. Значит, F^{χ} - формация, порожденная прямым произведением всех подгрупп группы G . С другой стороны, если F^{χ} - формация Кросса, то, очевидно, F - многообразие Кросса. Учитывая эти замечания докажем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3 [1]. Тогда и только тогда произведение $m \wedge n$ нетривиальных многообразий m и n - многообразие Кросса, тогда m и n имеет ненулевые взаимно простые экспоненты, m нильпотентно, n абелево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \wedge n = \text{var } G$ где G - конечная группа. Тогда $(m \wedge n)^{\chi} = m^{\chi} n^{\chi}$ - формация Кросса. Ввиду следствия 2 m^{χ} нильпотентная, n^{χ} - абелева формация Кросса и $\pi(m^{\chi}) \cap \pi(n^{\chi}) = \emptyset$. Это доказывает необходимость.

Пусть m - нильпотентное, n - абелево многообразия ненулевых взаимно простых экспонент. Тогда многообразия m и n кроссовы. Следовательно, многообразие $m \wedge n$ локально-конечно, а формации m^{χ} и n^{χ} кроссовы, причем $m^{\chi} \subseteq \mathcal{N}$, $n^{\chi} \subseteq \mathcal{A}$ и $\pi(m^{\chi}) \cap \pi(n^{\chi}) = \emptyset$. По следствию 2 $m^{\chi} n^{\chi} = (m \wedge n)^{\chi}$ - формация Кросса. Значит, $m \wedge n$ - многообразие Кросса.

Выражаю искреннюю благодарность Л. А. Шеметкову за внимание к работе и важные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. А. Л. ШМЕЛЬКИН, Сплетения и многообразия групп, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 1 (1965), 91-122.
2. Ю. М. ГОРЧАКОВ, Многообразие, порожденное конечной группой, Алгебра и логика, 6, № 3, (1967), 9-11.
3. Л. А. ШЕМЕТКОВ, Экраны произведения формаций, ДАН БССР, 25, № 8 (1981), 677-680.

4. Л. А. ШЕМЕТКОВ, Экраны ступенчатых формаций, в кн. "6-й Всесоюзный симпозиум по теории групп", Киев, Наукова думка, 1980, 37-50.
5. Л. А. ШЕМЕТКОВ, Формации конечных групп, М., Наука, 1978.
6. А. Н. СКИБА, О формациях с заданными системами подформаций, Подгрупповое строение конечных групп, Минск, Наука и техника, 1981, 155-180.
7. А. Н. СКИБА, О критических формациях, Изв. АН БССР, сер. физ. - матем. н., № 4 (1980), 27-33.
8. H. LIEBECK, Concerning nilpotent wreath products, Proc. Cambridge Phil. Soc., 58 (1962), 443-451.
9. А. Н. СКИБА, О формациях, порожденных классами групп, Изв. АН БССР, сер. физ. - матем. н., № 3 (1981), 33-38.
10. G. HIGMAN, Some remarks on varieties of groups, Quart. J. Math. Oxford, 10, № 2 (1959), 165-178.
11. R. BRYANT, M. BRICE, B. HARTLEY, The formation generated by a finite group, Bull. Austral. Math. Soc., 2, № 3 (1970), 347-357.
12. X. НЕЙМАН, Многообразие групп, М., Мир, 1969.

Поступило 9 февраля 1983 г.