УДК 512.542.6

А. Н. Скиба

О ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ ДЛИНЫ 5

Будем говорить, что длина локальной формации $\mathfrak{F}$ равна n, если найдется такая совокупность формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_n=\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

В данной работе опишем все локальные формации длины 5. Статья базируется на результатах о неприводимых локальных формациях [1—3]. В частности, существенно используется данная в работе [2] классификация минимальных локальных не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формаций.

Все рассматриваемые формации предполагаются состоящими лишь из конечных групп. В обозначениях будем следовать работам [4, 5].

Лемма 1. *Решетка (локальных) формаций модулярна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — произвольные непустые формации, прчем $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$. Покажем, что $\mathfrak{H}\wedge(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{F})\subseteq\subseteq\mathfrak{M}\vee(\mathfrak{H}\wedge\mathfrak{F})$. Пусть $A\in\mathfrak{H}\wedge(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{F})=\mathfrak{H}\cap \mathrm{form}\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{F})$. Тогда A — гомоморфный образ некоторой группы $B\in R_0\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{F})$. В группе B найдутся такие нормальные подгруппы N_1 и N_2, что $B/N_1\in\mathfrak{M}$, $B/N_2\in\mathfrak{F}$ и $N_1\cap N_2=1$. Пусть N — нормальная подгруппа группы B с условием $B/N\simeq A$. Так как имеет место равенство $N_1\cap(N_1\cap N)N_2=(N_1\cap N)(N_1\cap N_2)=N_1\cap N$, то $(N_1/N_1\cap N)\cap((N_1\cap N)N_2)/(N_1\cap N)$ — единичная подгруппа группы $B/N_1\cap N$. Следовательно, поскольку $(B/N_1\cap N)/(N_1/N_1\cap N)\simeq B/N_1\in\mathfrak{M}$ и $(B/N_1\cap N)/((N_1\cap N)N_2/N_1\cap N)\simeq B/(N_1\cap\cap N)N_2\in Q\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$, то $B/N_1\cap N\in R_0(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{F})$. Так как $B/N\in\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}\subseteq\subseteq\mathfrak{H}$, то $B/N_1\cap N\in\mathfrak{H}$. Значит, $B/N_1\cap N\in R_0(\mathfrak{M}\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}))$. Поскольку A является гомоморфным образом группы $B/N_1\cap N$, то из последнего заключаем, что $A\in QR_0(\mathfrak{M}\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}))=\mathfrak{M}\vee\vee(\mathfrak{H}\wedge\mathfrak{F})$. Значит, $\mathfrak{H}\wedge(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{M}\vee(\mathfrak{H}\wedge\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$, то ясно также, что $\mathfrak{M}\vee(\mathfrak{H}\wedge\mathfrak{F})\subseteq\mathfrak{H}\wedge(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{F})$. Таким образом, $\mathfrak{H}\wedge(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{F})=\mathfrak{M}\vee(\mathfrak{H}\wedge\mathfrak{F})$.

Покажем теперь, что модулярной является и решетка всех локальных формаций. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — локальные формации, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$. Чтобы установить справедливость равенства $\mathfrak{H}\cap\cap\,\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{F})=\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}))$, достаточно показать, что $\mathfrak{H}\cap\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{F})\subseteq\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}))$. Пусть m, h и f — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Обозначим через t такой локальный экран, что для всякого простого числа p имеет место равенство $t(p)==\mathrm{form}\,(m(p)\cup f(p))$. Ввиду леммы 1.3 [6] t — экран формации $\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{F})$. Пусть r — такой локальный экран, что $r(p)=\mathrm{form}\,(m(p)\cup(h(p)\cap f(p)))$ при всех простых p. Ввиду леммы 3.7 [4] $\mathfrak{H} \cap \mathrm{lform}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) = \langle h \cap t \rangle$ и $\mathrm{lform}(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})) = \langle r \rangle$. Пусть p — произвольное простое число. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то по лемме 4 [1] $m \leqslant h$. Значит, $m(p) \subseteq h(p)$. Следовательно, ввиду доказанного выше справедливо включение $h(p) \cap \mathrm{form}\,(m(p) \cup f(p)) \subseteq \mathrm{form}\,(m(p) \cup (h(p) \cap f(p))) = r(p)$. Итак, $h \cap t \leqslant r$. Из последнего вытекает, что $\langle h \cap t \rangle \subseteq \langle r \rangle$. Таким образом, остается заключить, что $\mathfrak{H} \cap \mathrm{lform}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}) = \mathrm{lform}(\mathfrak{M} \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}))$. Лемма доказана.

Если существует такая совокупность формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_0$ — пустая формация, $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная подформация в $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то число n назовем длиной формации $\mathfrak{F}$. Таким образом, в дальнейшем, говоря, что длина формации $\mathfrak{F}$ равна n, мы будем иметь в виду следующее: если $\mathfrak{F}$ локальна, то ее длина понимается в смысле определения, данного выше; если же формация $\mathfrak{F}$ не является локальной, то n означает длину $\mathfrak{F}$ в смысле только что данного определения.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, m — натуральное число. Тогда, если экспонента любой группы из $\mathfrak{F}$ делит m и в $\mathfrak{F}$ имеется группа экспоненты m, то m назовем экспонентой формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{F}$ — абелева формация экспоненты $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_t^{n_t}$, то ее длина равна $n_1 + n_2 + \ldots + n_t + 1$.*

Доказательство. В $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество подформаций [7]. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная максимальная подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$ число $p_1^{n_1} \ldots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_i^{n_i - 1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \ldots p_t^{n_t}$ — экспонента формации $\mathfrak{H}$. Действительно, пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A — примарная циклическая группа. Пусть $|A| = p_i^n$. Так как $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,(\mathfrak{H} \cup \{A\})$, то ввиду леммы 5 [8] для всякого $j \neq i$ справедливо, что $p_j^{n_j}$ делит экспоненту формации $\mathfrak{H}$ и, кроме того, $n = n_i$. Если H — максимальная подгруппа группы A, то $H \in \mathfrak{H}$ ввиду выбора группы A. Но экспонента группы H совпадает с ее порядком, равным p_i^{n-1}. Таким образом, экспонента формации $\mathfrak{H}$ равна $p_1^{n_1} \ldots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_i^{n_i - 1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \ldots p_t^{n_t}$. Ввиду соображений индукции длина формации $\mathfrak{H}$ равна $n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i - 1 + n_{i+1} + \ldots + n_t + 1 = n_1 + \ldots + n_{i-1} + n_i + n_{i+1} + \ldots + n_t$. Из последнего и леммы 1 заключаем, что длина формации $\mathfrak{F}$ равна $n_1 + \ldots + n_t + 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация длины n, f — ее минимальный локальный экран. Тогда, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$, то n совпадает с суммой длин формаций, являющихся значениями экрана f.*

Доказательство. Проведем доказательство леммы индукцией по n. Пусть $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, h — ее минимальный локальный экран. Так как $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^2$, то ввиду леммы 1.4 [6] найдется такое $p\in\pi(\mathfrak{F})$, что $h(p)$ — максимальная подформация в $f(p)$ и $h(t)=f(t)$ при всех простых $t\neq p$. Следовательно, сумма длин формаций, являющихся значениями экрана h, на 1 меньше, чем сумма длин формаций, являющихся значениями экрана f. В свою очередь, ввиду леммы 1 длина формации $\mathfrak{H}$ на 1 меньше, чем длина формации $\mathfrak{F}$. Таким образом, поскольку по индукции лемма верна для $\mathfrak{H}$, то ее утверждение оказывается справедливым и для формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

В дальнейшем характеристикой локальной формации $\mathfrak{F}$ будем называть мощность множества $\pi(\mathfrak{F})$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — такая нильпотентная локальная формация, что $\pi(\mathfrak{F})$ — конечное множество. Тогда длина формации $\mathfrak{F}$ совпадает с ее характеристикой.*

Доказательство. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $f(p)=\mathfrak{E}$ при всех $p\in\pi(\mathfrak{F})$ и $f(p)=\varnothing$, если p — простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, по лемме 3 длина формации $\mathfrak{F}$ совпадает с $|\pi(\mathfrak{F})|$. Лемма доказана.

Лемма 5. *В точности тогда длина локальной формации $\mathfrak{F}$ равна 3, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}$ — нильпотентная формация характеристики 3;

2) $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 2.

Доказательство. *Необходимость*. Если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$, то по лемме 4 $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}$. Тогда по лемме 3.1 [2] в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}$. Ясно также, что $|\pi(\mathfrak{H})|=3$.

Достаточность вытекает из леммы 4.

Лемма 6. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формация длины 4, когда $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$, где $G=P\leftthreetimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: 1) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; 2) p-нильпотентная pd-группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.*

Доказательство. *Необходимость*. По результатам работы [2] $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$, где $G=P\leftthreetimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: 1) группа кватернионов порядка 8; 2) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; 3) группа вида $Q\leftthreetimes N$, где $Q=C_{Q\leftthreetimes N}(Q)=(Q\leftthreetimes N)^{\mathfrak{A}}$. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если H удовлетворяет условию 1), то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^2$. Значит, по лемме 3 длина формации $\mathfrak{F}$ совпадает с суммой длин формаций, являющихся значениями экрана f. Ввиду леммы 3 [1] $f(p)=\operatorname{form} H$ и $f(2)=$

$=\mathfrak{E}$. По теореме 2.2 [2] абелева формация экспоненты 4 является максимальной подформацией в $\mathrm{form}\, H$. Следовательно, по лемме 2 длина формации $f(p)$ равна 4. Значит, длина формации $\mathfrak{F}$ равна 5. Это противоречит условию. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть H удовлетворяет условию 3). Обозначим через $\mathfrak{H}$ максимальную локальную подформацию из $\mathfrak{F}$, и пусть h — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}$. По результатам работы [2] h имеет следующие непустые значения: $h(p)=$ $=\mathrm{form}\,(N/O_p(N))$, $h(q)=\mathrm{form}\, N$ и $h(t)=\mathfrak{E}$ при всех $t\in$ $\in\pi(G)\setminus\{p, q\}$. Так как длина формации $\mathfrak{H}$ равна 3 и $\mathfrak{H}$ не входит в $\mathfrak{N}$, то по лемме 5 $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 2. Привлекая теперь теорему 4 [1], видим, что N — группа порядка p. Значит, в рассматриваемом случае H является p-нильпотентной pd-группой Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.

Достаточность устанавливается прямой проверкой с привлечением лемм 2 и 3. Лемма доказана.

Группу будем называть монолитической, если она обладает лишь одной минимальной нормальной подгруппой (монолитом).

Лемма 7. *Пусть f и h — внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Предположим, что найдутся такие простое число p и монолитическая группа A с $O_p(A)=1$, что $A\in f(p)\setminus h(p)$. Тогда, если L — точный неприводимый $GF(p)[A]$-модуль и $\mathfrak{M}=\mathrm{lform}\, L\rtimes A$, то формация $\mathfrak{M}$ входит в $\mathfrak{F}$ и не входит в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 3.11 [4] $L\rtimes A\in\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$, то $(L\rtimes A)/F_p(L\rtimes A)\in h(p)$. Но $F_p(L\rtimes A)=L$. Значит, $A\simeq(L\rtimes A)/L\in h(p)$. Это противоречит определению группы A. Таким образом, формация $\mathfrak{M}$ не входит в $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Для произвольных классов групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{M}\vee\mathfrak{H}$ будем обозначать локальную формацию, порожденную классом $\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H}$.

Лемма 8. *В точности тогда длина локальной формации $\mathfrak{F}$ равна 4, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины 3, $\mathfrak{H}\cap$ $\cap\,\mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — такие две различные минимальные локальные ненильпотентные формации характеристики 2, что $\pi(\mathfrak{H}_1)=\pi(\mathfrak{H}_2)$;

3) $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 3;

4) $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где $G=P\rtimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: а) циклическая примарная группа порядка q^2; б) неабелева *группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; в) p-нильпотентная pd-группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим сначала, что формация $\mathfrak{F}$ неразрешима. Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{S}$-корадикал $A^{\mathfrak{S}}=R$ группы A — ее единственная минимальная нормальная подгруппа. Предположим, что $R\neq A$. Пусть M — такая нормальная в A подгруппа, что $|A/M|$ — простое число, скажем p. Пусть $q\in\in\pi(R)\setminus\{p\}$, Z_p — группа порядка p. Обозначим через Q точный неприводимый $GF(q)[Z_p]$-модуль. Пусть $B=Q\rtimes Z_p$, $\mathfrak{H}==\operatorname{lform} B$. Так как $F_q(A)=1$, то $A/F_q(A)\simeq A\in f(q)$, где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $Z_p\in f(q)$. Ввиду леммы 3.11 [4] это означает, что $B\in\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть $\pi=\pi(R)$. Так как R — прямое произведение простых неабелевых групп, то $|\pi|\geqslant 3$. Следовательно, длина m формации $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{F}$ удовлетворяет неравенству $m\geqslant 3$. Но тогда длина формации $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{F}_0\vee\mathfrak{H}$ не меньше чем 4. Так как $\mathfrak{H}_0\subseteq\mathfrak{F}$, то ввиду условия заключаем, что $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$. Это противоречит нашему предположению о том, что $\mathfrak{F}$ — неразрешимая формация. Таким образом, остается заключить, что $R=A$ — простая неабелева группа. По теореме 4 [1] $\mathfrak{H}=\operatorname{lform} A$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Следовательно, по лемме 4 длина формации $\mathfrak{H}$ равна $|\pi(A)|+1$. Но $|\pi(A)|\geqslant 3$. Значит, поскольку $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$, то в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Пусть формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Обозначим через $\mathfrak{H}$ некоторую максимальную локальную подформацию из $\mathfrak{F}$. Предположим, что характеристики формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ различны и пусть $p\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\pi(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{N}_p$, причем длина $\mathfrak{H}$ равна 3. Следовательно, в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть $\pi(\mathfrak{F})=\pi(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}$. Поэтому, по лемме 3.1 [2] в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная локальная ненильпотентная формация $\mathfrak{H}_1$. По теореме 4 [1] характеристика формации $\mathfrak{H}_1$ равна 2. Значит, $\mathfrak{H}_1$ — формация длины 3. Предположим, что $\mathfrak{H}\subseteq\subseteq\mathfrak{N}$. Тогда $\pi(\mathfrak{H})\setminus\pi(\mathfrak{H}_1)\neq\varnothing$. Пусть $p\in\pi(\mathfrak{H})\setminus\pi(\mathfrak{H}_1)$. Ясно, что $\mathfrak{H}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1\vee\mathfrak{N}_p$, т. е. в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть $\mathfrak{H}$ не входит в $\mathfrak{N}$. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 2. Если $\mathfrak{H}\neq\mathfrak{H}_1$, то $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{H}_1$ и, очевидно, $\pi(\mathfrak{H})==\pi(\mathfrak{H}_1)$. Значит, в этом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формация длины 4. Ввиду леммы 6 $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4). Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Обозначим через h минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Пусть $\pi(\mathfrak{H})=\{p, q\}$. Легко видеть, что на одном из чисел p, q значение экрана f совпадает с $\mathfrak{E}$. Пусть, например, $f(p)\subseteq\mathfrak{E}$. Ввиду леммы 3 [1] $f(q)\subseteq\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{A}$. По лемме 2.1 [2] $h(q)$ — единственная максимальная подформация в $f(q)$. Но $h(q)=\mathrm{form}\,L$, где L — группа порядка p. Пусть Q — группа минимального порядка из $f(q)\setminus h(q)$. Тогда Q — циклическая группа порядка p^2. Пусть P — точный неприводимый $GF(q)[Q]$-модуль и $G=P\rtimes Q$. Ввиду леммы 7 $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4).

Достаточность устанавливается прямой проверкой. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть f и h — минимальные локальные экраны формаций $\langle f\rangle$ и $\langle h\rangle$, $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Тогда если $h(p)$ — собственная подформация в $f(p)$, то найдется такая монолитическая группа A, что $A\in f(p)\setminus h(p)$ и $O_p(A)=1$.*

Доказательство. По лемме 3 [1] в классе $f(p)\setminus h(p)$ найдется группа B с $O_p(B)=1$. Пусть $N_1\times\ldots\times N_m$ — цоколь группы B, $M_i=N_1\times\ldots\times N_{i-1}\times N_{i+1}\times\ldots\times N_m$ для всех $i=1,\ldots,m$. Обозначим через L_i наибольшую нормальную подгруппу группы B, содержащую M_i, но не содержащую N_i. Тогда B/L_i — монолитическая группа с монолитом $L_iN_i/L_i\simeq N_i$. Так как $O_p(B)=1$, то $O_p(B/L_i)=1$. Заметим, что $L_1\cap\ldots\cap L_m=1$, т. е. $B\in R_0(B/L_1,\ldots,B/L_m)$. Следовательно, для некоторого $t\in\{1,\ldots,m\}$ группа B/L_t не принадлежит формации $h(p)$. При этом ясно, что $B/L_t\in f(p)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неразрешимая локальная формация. В точности тогда длина $\mathfrak{F}$ равна 5, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 4;

2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 3, $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}_p=\mathfrak{E}$;

3) $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — различные минимальные локальные ненильпотентные формации, $\mathfrak{H}$ имеет характеристику 3 и $\pi(\mathfrak{M})\subseteq\pi(\mathfrak{H})$;

4) $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$, где $G=P\rtimes(Q\rtimes N)$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, $Q=C_{Q\rtimes N}(Q)=(Q\rtimes N)^{\mathrm{form}\,A}$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q\rtimes N$, A — такая простая неабелева группа, что $p, q\in\pi(A)$, $|\pi(A)|=3$;

5) $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$, где G — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом R, что $|\pi(R)|=3$, $R\neq G$ и $R=G^{\mathrm{form}\,A}$, где A — простая неабелева группа с $\pi(A)=\pi(B)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{S}$, R — ее монолит. Предположим, что $R\neq A$. Тогда в A найдется такая нормальная подгруппа M, что $H=A/M$ — группа простого порядка. Ввиду выбора группы A ее монолит является неразрешимой группой. Значит,

$|\pi(R)|\geqslant 3$. Следовательно, в $\pi(R)$ найдутся такие различные r и q, которые отличны от $|H|$. Пусть $A_1=P\rtimes H$, $A_2=Q\rtimes H$, где P — точный неприводимый $GF(r)[H]$-модуль, Q — точный неприводимый $GF(q)[H]$-модуль. Покажем, что $A_1, A_2\in\mathfrak{F}$. Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $A/F_q(A)\in f(q)$ и $A/F_r(A)\in f(r)$. Но $F_q(A)=1=F_r(A)$. Значит, $A\in f(q)\cap f(r)$. Поэтому $H\in f(q)\cap f(r)$. Отсюда ввиду леммы 3.11 [4] следует, что $A_1, A_2\in\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_i=\operatorname{lform} A_i$, $i=1, 2$. Так как A_1 и A_2 — группы Шмидта, то ввиду теоремы 4 [1] $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — минимальные локальные ненильпотентные формации. Так как q не принадлежит $\pi(A_1)=\pi(\mathfrak{F}_1)$, то по лемме 8 $\mathfrak{F}_4=\mathfrak{F}_1\vee\mathfrak{N}_q$ — формация длины 4. Используя лемму 3 [1], легко убедиться, что $\mathfrak{F}_2$ не входит в $\mathfrak{F}_4$. Значит, длина m формации $\mathfrak{F}_4\vee\mathfrak{F}_2$ удовлетворяет неравенству $m\geqslant 5$. Но $\mathfrak{F}_4\vee\mathfrak{F}_2\subseteq\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_4\vee\mathfrak{F}_2$ — разрешимая формация. Последнее противоречит условию. Таким образом, $R=A$ — простая неабелева группа.

Пусть $\mathfrak{H}=\operatorname{lform} A$ и $\pi=\pi(\mathfrak{H})$. По теореме 4 [1] $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация. Значит, если $|\pi|=4$, то по лемме 4 длина $\mathfrak{H}$ равна 5. В этом случае $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}$ — формация, удовлетворяющая условию 1). Пусть $|\pi|=3$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F})\backslash\pi\neq\varnothing$, и пусть $p\in\pi(\mathfrak{F})\backslash\pi$. Тогда ввиду леммы 1 $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{N}_p$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2). Пусть $\pi(\mathfrak{F})=\pi$. Так как в рассматриваемом случае длина $\mathfrak{H}$ равна 4, то ввиду леммы 1 $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ имеется нетривиальная локальная подформация $\mathfrak{M}_0$, не входящая в $\mathfrak{H}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{H}$, формация $\mathfrak{M}_0$ ненильпотентна. Значит, ввиду леммы 3.1 [2] в $\mathfrak{M}_0$ имеется минимальная локальная ненильпотентная подформация $\mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M})\subseteq\pi(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Пусть теперь всякая нетривиальная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$. Обозначим через h минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}$. По лемме 2.1 [2] и теореме 3.3 [4] найдется такое $p\in\pi(\mathfrak{F})$, что $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p h(p))$-формация. По лемме 8 найдется такая монолитическая группа B с $O_p(B)=1$, что $B\in f(p)\backslash h(p)$. Понятно, что $f(p)=\operatorname{form} B$. Пусть N — монолит группы B. Предположим, что $N\in\mathfrak{S}$. Тогда по лемме VI.7.21 [9] $T=N\rtimes B/C_B(N)\in f(p)$. Ясно, что $O_p(T)=1$. Следовательно, либо $T\in h(p)$, либо $\operatorname{form} T=f(p)$. Легко видеть, что $h(p)=\operatorname{form} A$. Поэтому всякая неединичная группа из $h(p)$ есть прямое произведение групп, изоморфных группе A. Это означает, что T не принадлежит $h(p)$. Таким образом, $f(p)=\operatorname{form} T$. Пусть P — точный неприводимый $GF(p)[T]$-модуль, $G=P\rtimes T$. По лемме 7 $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$. Ввиду леммы 2 [3] $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран h_1, что $h_1(t)=\operatorname{form}(G/F_t(G))$ для всех простых $t\in\pi(G)\backslash\{p\}$. Пусть $\pi(N)=\{r\}$. Легко видеть, что $F_r(G)=PN$ и $G/F_r(G)\simeq$

$\simeq B/C_B(N)$. Значит, $h_1(r) = \mathrm{form}\ (B/C_B(N))$. Ввиду леммы 3 и 4 работы [1] $h(r) = h_1(r)$. Но $h(r) = \mathrm{form}\ (A/F_r(A)) = \mathrm{form}\, A$. Таким образом, $B/C_B(N)$ — прямое произведение групп, изоморфных группе A. Это означает, что $N = T^{\mathrm{form}\, A}$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4).

Пусть N — неабелева группа. Предположим, что $\mathrm{lform}\, B \neq \mathfrak{F}$. Тогда $\mathrm{lform}\, B \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, для всякого $r \in \pi(N)$ имеем $B/F_r(B) \simeq B \in h(r)$. Легко видеть, что $p \in \pi(N)$. Значит, $B \in h(p)$. Это противоречит определению группы B. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, B$. Ввиду леммы 2 [3] $\mathfrak{H}$ имеет такой внутренний локальный экран h_1, что $h_1(r) = \mathrm{form}\ (B/R)$ при всех $r \in \pi(B) = \pi(N) = \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что $(B/N)/O_r(B/N) \in h(r) = \mathrm{form}\, A$ при всех $r \in \pi(B)$. Это означает, что $B/N \in \mathrm{form}\, A$. Из последнего вытекает, что $N = B^{\mathrm{form}\, A}$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 5).

Достаточность. Если $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) или 2), то, очевидно, $\mathfrak{F}$ имеет длину 5. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3). Так как $\pi(\mathfrak{M}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}$. Следовательно, ввиду леммы 1 и теоремы 9 [10] $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee \mathfrak{M}$. Так как по лемме 4 длина $\mathfrak{H}$ равна 4, то $\mathfrak{F}$ — формация длины 5. Пусть $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4). Тогда по лемме 2 [3] $\mathfrak{F}$ обладает максимальной локальной подформацией $\mathfrak{H}$, у которой имеется внутренний локальный экран h со следующими непустыми значениями: $h(p) = \mathrm{form}\, N$ и $h(t) = \mathrm{form}\ (G/F_t(G))$ при всех $t \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Легко видеть, что при всех $t \in \pi(G)$ справедливо, что $h(t) = \mathrm{form}\, A$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, A$. По условию $|\pi(A)| = 3$. Следовательно, ввиду леммы 4 и теоремы 4 [1] $\mathfrak{H}$ — формация длины 4. Поэтому в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — формация длины 5. Аналогично доказывается, что длина $\mathfrak{F}$ равна 5, если $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 5). Теорема доказана.

В дальнейшем все рассматриваемые формации предполагаются разрешимыми. Локальную формацию будем называть приводимой, если она порождается всеми своими нетривиальными локальными подформациями.

Теорема 2. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — приводимая локальная формация длины* 5, *когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee \mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины 4, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — минимальные локальные ненильпотентные формации характеристики 2, $|\pi(\mathfrak{F})| = 3$;

3) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация длины 4, $\mathfrak{M}$ — такая минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация длины 4, что $\pi(\mathfrak{H}) = \pi(\mathfrak{M})$.

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ найдется такая максимальная локальная подформация $\mathfrak{H}$, что $\pi(\mathfrak{F}) \neq \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{H} \vee \mathfrak{N}_p$, где $p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Ввиду леммы 1 длина $\mathfrak{H}$ равна 4. Следовательно, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что характеристика любой максимальной локальной подформации из $\mathfrak{F}$ совпадает с характеристикой $\mathfrak{F}$.

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ по условию приводима, то в ней найдутся, по крайней мере, две различные максимальные локальные подформации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Пусть обе формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ приводимы. Так как длины формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ равны 4 и $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}_2)$, то ввиду лемм 6 и 8 либо обе эти формации имеют вид $\mathfrak{H} \vee \mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{H}$ — локальная формация длины 3, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}$, либо каждая из них есть $\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — такие минимальные локальные ненильпотентные формации характеристики 2, что $\pi(\mathfrak{H}_1) = \pi(\mathfrak{H}_2)$. Заметим, что для каждой данной пары простых чисел p и q существуют лишь две различные минимальные локальные ненильпотентные формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ такие, что $\pi(\mathfrak{M}_1) = \pi(\mathfrak{M}_2) = \{p, q\}$. Но $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}_2$. Таким образом, второе не может иметь места. Предположим, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда ввиду леммы 4 $|\pi(\mathfrak{F}_1)| = 4 = |\pi(\mathfrak{F}_2)|$. Так как $\mathfrak{F}_2$ — формация длины 4, то последнее влечет $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{N}$. Но $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi(\mathfrak{F}_2)$. Значит, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$. Полученное противоречие показывает, что формация $\mathfrak{F}_1$ не входит в $\mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{N}_{p_1}$, где $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 2. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{H}_2 \vee \mathfrak{N}_{p_2}$, где $\mathfrak{H}_2$ — минимальная локальная ненильпотентная формация характеристики 2. Предположим, что $p_1 = p_2$. Тогда $\pi(\mathfrak{H}_1) = \pi(\mathfrak{H}_2)$, причем $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}_2$. По лемме 7 $\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2$ — локальная формация длины 4. Понятно, что $\mathfrak{F} = (\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2) \vee \mathfrak{N}_p$, где $p = p_1 = p_2$ и $(\mathfrak{H}_1 \vee \mathfrak{H}_2) \cap \mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}$. Это означает, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Если $p_1 \neq p_2$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Предположим теперь, что одна из формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ неприводима. Пусть, например, таковой будет $\mathfrak{F}_1$. Ввиду [7] в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество локальных подформаций. Следовательно, в $\mathfrak{F}_1$ содержится минимальная локальная не $\mathfrak{F}_1$-формация $\mathfrak{M}$. При этом понятно, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M}$ и $\pi(\mathfrak{M}) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1)$, т. е. $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность устанавливается прямой проверкой. Теорема доказана.

Следующая лемма доказывается так же, как и лемма 6.

Лемма 10. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формация длины 5, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где $G = P \leftthreetimes H$, $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: 1) группа кватернионов порядка 8; 2) группа вида $Q \leftthreetimes N$, где $Q = C_{Q \leftthreetimes N}(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в $Q \leftthreetimes N$, а N — циклическая группа порядка p^2.*

Типом неприводимой локальной формации $\mathfrak{F}$ будем называть такую упорядоченную пару (n, m) наименьших натуральных чисел, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}^n$, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}^m$, где $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация из $\mathfrak{F}$. Из лемм 6 и 9 вытекает, что тип любой неприводимой локальной формации длины 5 принадлежит множеству $\Omega=\{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$. Мы покажем далее, что в действительности любой элемент из Ω является типом некоторой неприводимой локальной формации длины 5.

Теорема 3. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5 одного из типов (2, 3), (3, 4), когда $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$, где $G=P\rtimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, $H=Q\rtimes N$, где $Q=C_H(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в H, а N — одна из следующих групп: 1) циклическая группа порядка p^2; 2) экстраспециальная группа экспоненты p $(p\neq 2)$; 3) подпрямое произведение таких p-замкнутых групп Шмидта A, что $\Phi(A)=1$ и $\pi(A)=\{p, q\}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Ввиду теоремы 2.1 [2] $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$, где $G=P\rtimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, $H=Q\rtimes N$, где $Q=C_H(Q)$ — минимальная нормальная q-подгруппа в H и либо $Q=H^{\mathfrak{N}}$ (если G — типа (2, 3)), либо $Q=H^{\mathfrak{N}^2}$. Так как $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}^2$, то в $\mathfrak{F}$ содержится минимальная локальная не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формация $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 10 N — циклическая группа порядка p^2.

Пусть $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 2.3 [2] и лемм 6 и 10 длина всякой минимальной локальной не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формации $\geqslant 4$. Но длина $\mathfrak{F}$ равна 5. Значит, длина $\mathfrak{M}$ равна 4, т. е. $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. По лемме 6 $\mathfrak{M}$ — формация характеристики 2. Так как формация $\mathfrak{F}$ по условию неприводима, то всякая нетривиальная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$. Значит, $\pi(\mathfrak{F})=\pi(\mathfrak{H})=\{p, q\}$. Таким образом, по теореме 2.1 [2] минимальный локальный экран m формации $\mathfrak{M}$ таков, что $m(p)=\operatorname{form}(N/O_p(N))$, $m(q)=\operatorname{form} N$ и $m(t)=\varnothing$, если t — произвольное простое число, отличное от p и q. Пусть $Q=H^{\mathfrak{N}}$. Тогда ввиду леммы 3.9 [4] N — p-группа. Значит, по лемме 6 $m(q)$ — формация, порожденная неабелевой группой порядка p^3 простой нечетной экспоненты p. Но $m(q)=\operatorname{form} N$. Следовательно, N — группа экспоненты p ступени нильпотентности 2. Таким образом, $\Phi(N)=N^pN'=N'\subseteq$ $\subseteq Z(N)$. Но группа N — неприводимая группа автоморфизмов для Q. Значит, $Z(N)$ — циклическая группа. Следовательно, $\Phi(N)=N'=Z(N)$ — группа порядка p, т. е. N — экстраспециальная группа.

Предположим теперь, что $Q=H^{\mathfrak{N}^2}$. Сравнивая непустые значения экрана m с непустыми значениями минимального локального экрана минимальной локальной не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формации длины 4, видим, что $\mathrm{form}\, N = \mathrm{form}\, A$, где A — такая p-замкнутая группа Шмидта, что $\Phi(A)=1$ и $\pi(A)=\{p, q\}$. Пусть $L=L_1\times\ldots\times L_n$ — цоколь группы N, $N_i=L_1\times\ldots\times L_{i-1}\times \times L_{i+1}\times\ldots\times L_n$ для всех $i=1, \ldots, n$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы N, содержащую N_i, но не содержащую L_i. Тогда N/M_i — монолитическая группа с монолитом L_iM_i/M_i. По результатам работы [1] $N/M_i \in Q(A)$. Так как по лемме 3.9 [4] $O_q(N)=1$, то $O_q(N/M_i)=1$. Таким образом, $N/M_i \simeq A$. Легко видеть, что $M_1\cap\ldots\cap M_n=1$. Следовательно, N — подпрямое произведение групп, изоморфных группе A.

Достаточность устанавливается прямой проверкой с использованием лемм 6 и 10, а также теоремы 2.1 [2] и леммы 3 [1]. Теорема доказана.

Теорема 4. *В точности тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5 типа (2, 2), когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где $G=P\leftthreetimes H$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: 1) циклическая q-группа порядка q^3; 2) группа кватернионов порядка 8; 3) группа простой нечетной экспоненты q ступени нильпотентности 3.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, h и f — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Обозначим через G группу минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, причем ввиду леммы 1.6 [6] $G=P\leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а H — q-группа $(p\neq q)$. По лемме 3 [1] $f(p) = \mathrm{form}\, H$ и $f(q)=\mathfrak{E}$. Если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то H — абелева группа. Так как при этом H является неприводимой группой автоморфизмов, то она циклична. Привлекая теперь леммы 2 и 3 и учитывая, что длина $\mathfrak{F}$ равна 5, заключаем, что $|H|=q^3$.

Пусть $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-подформация из $\mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 4 [1] и леммы 5 всякая локальная формация длины $\leqslant 3$ входит в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{M}$ имеет длину 4 или 5. Пусть длина $\mathfrak{M}$ равна 4. Тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 2.1 [2] $h(p)$ — единственная максимальная подформация формации $f(p)$. Пусть Q — группа минимального порядка из $f(p)\setminus h(p)$, q^n — ее экспонента. Обозначим через B некоторую циклическую подгруппу порядка q^n из Q. Предположим, что $B=Q$. Тогда поскольку $f(p) = \mathrm{form}\, Q$, то $H\in\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Полученное противоречие показывает, что $B\neq \neq Q$. Ввиду теоремы 2.4 [4] $B\in f(p)$. Следовательно, $B\in h(p)$. Но ввиду леммы 6 $h(p)$ — формация нечетной экспоненты q. Таким образом, Q — группа нечетной экспоненты q. Так как $Q/Z(Q)\in h(p)$ и ступень всякой группы из $h(p)$ не превышает 2, то ступень нильпотентности группы Q не превышает 3. Легко показать, что если ступень Q равна 2, то $Q \in h(p)$. Это противоречит определению группы Q. Значит, ступень нильпотентности группы Q равна 3. В группе Q имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа. Следовательно, существует точный неприводимый $GF(p)[Q]$-модуль L. По лемме 7 $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, L \leftthreetimes Q$. Наконец, если длина $\mathfrak{M}$ равна 5, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и в этом случае утверждение теоремы справедливо в силу леммы 10.

Достаточность. Пусть H удовлетворяет условию 1) и M — ее максимальная подгруппа. Легко проверить, что $\mathrm{form}\, M$ — единственная максимальная подформация формации $f(p) = \mathrm{form}\, H$. Обозначим через L точный неприводимый $GF(p)[M]$-модуль. Тогда $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, L \leftthreetimes M \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3 [1] значение минимального локального экрана формации $\mathfrak{H}$ на p совпадает с $\mathrm{form}\, M$. Следовательно, по лемме 2.1 [2] $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, формация $\mathfrak{F}$ неприводима и ее длина ввиду лемм 2 и 3 равна 5. Если H удовлетворяет условию 2), то по лемме 10 $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5.

Пусть H удовлетворяет условию 3). Так как $\mathrm{form}\, H$ неабелева формация, то в ней имеется минимальная неабелева подформация $\mathfrak{M}$. Ввиду теоремы 2.2 [2] $\mathfrak{M}$ — формация групп экспоненты q ступени нильпотентности $\leqslant 2$. Значит, $\mathfrak{M} \neq \mathrm{form}\, H$. Так как число всех подформаций формации $\mathrm{form}\, H$ конечно [7], то в ней можно выбрать минимальную не $\mathfrak{M}$-формацию $\mathfrak{H}$. Так как экспонента формации $\mathrm{form}\, H$ равна q, то $\mathfrak{H}$ — неабелева формация. Следовательно, поскольку $\mathfrak{H}$ не входит в $\mathfrak{M}$, то ввиду теоремы 2.2 [2] $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная подформация формации $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\, A$. Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \mathrm{form}\, H$. Допустим, что всякое тождество группы A выполняется и в группе H. Тогда ввиду следствия 15.73 [11] H принадлежит S-замкнутой формации $\mathfrak{H}_0$, порожденной группой A. Ввиду теоремы 2.4 [4] $\mathfrak{H}_0 = \mathrm{form}\, A$. Следовательно, $\mathrm{form}\, H = \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что найдется такое тождество v, которое выполняется в группе A, но не выполняется в группе H. Так как H — нильпотентная группа ступени 3, то по результатам работы [12] тождество v эквивалентно некоторой системе тождеств v_1, v_2, v_3, v_4, где $v_1 \in S_1 = \langle x^\alpha = 1 \mid \alpha = 1, 2, \ldots \rangle$, $v_2 \in S_2 = \langle [x, y]^\beta = 1 \mid \beta = 1, 2, \ldots \rangle$, $v_3 \in S_3 = \langle [x, y, y]^\gamma = 1 \mid \gamma = 1, 2, \ldots \rangle$, $v_4 \in S_4 = \langle [x, y, z]^\rho = 1 \mid \rho = 1, 2, \ldots \rangle$. Понятно, что α, β, $\rho \neq 1$. Следовательно, поскольку $\mathrm{form}\, H$ — формация экспоненты q, то $\alpha = \beta = \rho = q$. Это означает, что каждое из тождеств v_1, v_2, v_4 выполняется в группе H. Следовательно, в H не выполняется тождество v_3. Поэтому, $\gamma = 1$. Понятно, что ступень нильпотентности группы A равна 3. Значит, ввиду теоремы III.6.5 [9] $q = 3$. Но тогда по теореме III.6.6 [9] тождество v_3 выполняется и в группе H. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H} = \mathrm{form}\, H$.

Пусть h — такой локальный экран, что $h(p)=\mathfrak{M}$, $h(q)=\mathfrak{E}$ и $h(t)=\varnothing$ при всех простых $t\neq p$, q. Легко видеть, что h — минимальный локальный экран формации $\langle h\rangle$. Следовательно, поскольку $h(p)$ — единственная максимальная подформация формации $f(p)=\mathrm{form}\, H$, то ввиду леммы 4 [1] всякая нетривиальная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\langle h\rangle$. Значит, $\langle h\rangle$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{M}$ — минимальная неабелева формация экспоненты q, то ее длина равна 3. Следовательно, по лемме 3 длина $\langle h\rangle$ равна 4. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация длины 5 типа (3, 3). Тогда $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, G$, где $G=P\rtimes A$, $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а $A=A_q\rtimes A_p$ — такая бипримарная монолитическая группа с монолитом R, что $R=\Phi(A_q)=(A_q)'\subseteq Z(A_q)$, A_p — элементарная группа и для всякого A-главного q-фактора T/L произведение $T/L\rtimes(A/C_A(T/L))$ — группа Шмидта.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не $(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$-формация, входящая в $\mathfrak{F}$. Тогда, поскольку длина $\mathfrak{H}$ не меньше чем 4, ввиду условия теоремы $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 6 $\mathfrak{H}=\mathrm{lform}\, G$, где $G=K\rtimes H$, K — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а $H=Q\rtimes N$, где Q — минимальная нормальная q-подгруппа в H, N — группа порядка p. Обозначим через f и h минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Ввиду леммы 2.1 [2] найдется такое простое число r, что $f(r)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_r h(r))$-формация и $f(t)=h(t)$ при всех простых $t\neq r$. Пусть A — такая монолитическая группа с монолитом R, что $A\in f(r)\setminus h(r)$ и $O_r(A)=1$. Обозначим через P некоторый точный неприводимый $GF(r)[A]$-модуль. Тогда, поскольку формация $\mathfrak{F}$ неприводима, ввиду леммы 7 $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, P\rtimes A$. Значит, $A\in\mathfrak{N}^2\setminus\mathfrak{N}$. Заметим также, что, поскольку $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\pi(\mathfrak{H})=\{p, q\}=\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\pi(A)=\{p, q\}$.

Предположим, что $r=q$. Тогда R — p-группа и $F(A)\in\mathfrak{N}_p$. Но группа A бипримарна. Значит, найдется такой A-главный фактор M/K, что $M\subseteq F(A)$ и $C_A(M/K)\neq 1$. Пусть $B=M/K\rtimes A/C_A(M/K)$. Ввиду леммы VI.7.21 [9] $B\in f(q)$. Так как по лемме 3 [1] $h(q)=\mathrm{form}\, N\subseteq\mathfrak{N}$, то B не принадлежит $h(q)$. Пусть D — точный неприводимый $GF(q)[B]$-модуль и $M=D\rtimes B$. Тогда из леммы 7 и неприводимости $\mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\, M$. Последнее означает, что $f(p)=\mathrm{form}\,(M/F_p(M))=h(p)=\mathrm{form}\,(Q\rtimes N)$. Легко убедиться, однако, что $M/F_p(M)$ — q-группа. Полученное противоречие показывает, что $r\neq q$.

Пусть $r=p$. Ясно, что R — q-группа. Предположим, что R

не входит в $\Phi(A)$. Тогда $R = C_A(R)$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^3$, то по результатам работы [13] $f(p) \subseteq \mathfrak{N}^2$. Значит, $A/R \in \mathfrak{N}$. Легко видеть, что $f(p) = \operatorname{form} A$. Следовательно, $H \in \operatorname{form} A$. Применяя теперь утверждение 1.7 [2], заключаем, что $H \simeq A$, т. е. $A \in \in h(p)$. Это противоречит определению группы A. Таким образом, остается заключить, что $R \subseteq \Phi(A)$. Так как группа A монолитична и метанильпотентна, то $F(A) = A_q$. Так как R не дополняема в A, то $\Phi(A_q) \neq 1$. Но $\Phi(A_q)$ характеристична в A_q. Значит, $\Phi(A_q) \triangleleft A$. Следовательно, $R \subseteq \Phi(A_q)$. По теореме 53.41 [11] A не принадлежит $\operatorname{form} A/R$. Значит, $A/R \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Ввиду леммы 5 [1] $(A/R)_q \in \operatorname{form} H_q$ и $A_p \in \operatorname{form} N$. Следовательно, силовские p-подгруппы элементарны и $R = \Phi(A)$. Легко видеть также, что $R = (A_q)' \subseteq Z(A_q)$. Пусть T/L — такой A-главный фактор, что $T \subseteq A_q$. Обозначим через A_p некоторую силовскую p-подгруппу группы A. Тогда $C = C_A(T/L) = A_q(C \cap A_p)$. Значит, $A/C_A(T/L) = A_qA_p/A_q(C \cap A_p) \simeq A_p/ /A_p \cap C$. Предположим, что $C = A$. Тогда по лемме VI.7.21 [9] формации $f(p)$ принадлежит группа D порядка q. Понятно, что D не порождает $f(p)$. Следовательно, $D \in h(p) = \operatorname{form} Q \leftthreetimes \leftthreetimes N$. Но ввиду утверждения 1.7 [2] группа D не может принадлежать формации $h(p)$. Полученное противоречие показывает, что $C \neq A$. Поскольку $A/C_A(T/L) \simeq A_p/A_p \cap C$ — неприводимая абелева группа автоморфизмов экспоненты p, то $|A/C_A(T/L)| = p$. Значит, $T/L \leftthreetimes (A/C_A(T/L))$ — группа Шмидта. Теорема доказана.

Литература

1. *Скиба А. Н.* О критических формациях.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1980, № 5, с. 21—29.

2. *Скиба А. Н.* Формация со сверхразрешимыми локальными подформациями.— В кн.: Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности.— Новосибирск: Наука, 1984, с. 101—118.

3. *Скиба А. Н.* О минимальных локальных не π-сверхразрешимых формациях.— В кн.: Вопросы алгебры. Мн.: Университетское, 1984, вып. 1, с. 109—117.

4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М.: Наука, 1978.— 272 с.

5. *Шеметков Л. А.* Экраны ступенчатых формаций.— В кн.: VI Всесоюз. симпоз. по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980, с. 37—50.

6. *Скиба А. Н.* О формациях с заданными системами подформаций.— В кн.: Подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1981, с. 155—180.

7. *Bryant R., Bryce R., Hartley B.* The formation generated by finite group.— Bull. Austral. Math. Soc., 1970, v. 2, N 85, p. 91—102.

8. *Скиба А. Н.* О формациях, порожденных классами групп.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, № 3, с. 33—38.

9. *Huppert B.* Endliche Gruppen.— Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1967, Bd 1.— 793 S.

10. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур.— М.: Наука, 1982.— 160 с.

11. *Нейман Х.* Многообразия групп.— М.: Мир, 1969.— 264 с.

12. *Ремесленников В. Н.* Два замечания о трехступенно нильпотентных группах.— Алгебра и логика, 1965, т. 4, № 2, с. 59—66.
13. *Шеметков Л. А.* Экраны произведения формаций.— ДАН БССР, 1981, т. 25, № 8, с. 677—680.

УДК 512.542.6

А. Н. Скиба

О НЕОДНОПОРОЖДЕННЫХ S-ЗАМКНУТЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ

(Локальная) формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной, если найдется такая группа G, что $\mathfrak{F} = \operatorname{form} G$ (соответственно $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$).

В данной статье дается классификация неоднопорожденных S-замкнутых локальных формаций $\mathfrak{F}$ при условии, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^n$ $(n \geqslant 3)$ и всякая нетривиальная S-замкнутая локальная подформация из $\mathfrak{F}$ однопорождена. Все рассматриваемые здесь формации (за исключением многообразий групп) предполагаются состоящими лишь из конечных групп.

Лемма 1. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\langle f \rangle$, $p \in \pi(\langle f \rangle)$. Тогда максимальный внутренний локальный экран h формации $\operatorname{lform} f(p)$ таков, что $h(p) = f(p)$.*

Доказательство. Пусть t — минимальный локальный экран формации $\langle f \rangle$. Тогда по теореме 3.3 [1] $f(p) = \mathfrak{N}_p t(p)$. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех таких групп A из $t(p)$, что $O_p(A) = 1$. Обозначим через $\mathfrak{X}^p$ совокупность всех регулярных сплетений группы P порядка p со всеми группами из $\mathfrak{X}$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{X}^p \subseteq f(p)$. Значит, $\mathfrak{X}^p \subseteq \operatorname{lform} f(p)$. Любая группа G из $\mathfrak{X}^p$ представима в виде произведения LH, где $L = C_G(L)$ — p-группа, а $H \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq h(p)$. По лемме 3 [2] $t(p) = \operatorname{form} \mathfrak{X}$. Поэтому, $t(p) \subseteq h(p)$. Значит, $f(p) \subseteq h(p)$. С другой стороны, поскольку f — внутренний экран формации $\langle f \rangle$, то $\operatorname{lform} f(p) \subseteq \langle f \rangle$. Значит, $h(p) \subseteq f(p)$. Таким образом, $f(p) = h(p)$. Лемма доказана.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем примарной, если найдется такое простое число p, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_n$ — произведение примарных формаций, причем для всех $i = 1, \ldots, n-1$ справедливо $\mathfrak{M}_i \neq \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{E} = \mathfrak{M}_n$. Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} \mathfrak{M}$. Тогда если $p \in \pi(\mathfrak{M}_i)$, но $\{p\} \cap \pi(\mathfrak{M}_j) = \varnothing$ для всех $j < i$, то $f(p) = \mathfrak{M}_{i+1} \ldots \mathfrak{M}_n$.*

Доказательство. Пусть A — произвольная группа с единственной минимальной нормальной подгруппой из $\mathfrak{M}_{i+1} \ldots \mathfrak{M}_n$. Предположим, что $O_p(A) = 1$. Тогда существует точный