12. *Ремесленников В. Н.* Два замечания о трехступенно нильпотентных группах.— Алгебра и логика, 1965, т. 4, № 2, с. 59—66.
13. *Шеметков Л. А.* Экраны произведения формаций.— ДАН БССР, 1981, т. 25, № 8, с. 677—680.

УДК 512.542.6

А. Н. Скиба

О НЕОДНОПОРОЖДЕННЫХ S-ЗАМКНУТЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ

(Локальная) формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной, если найдется такая группа G, что $\mathfrak{F}=\operatorname{form} G$ (соответственно $\mathfrak{F}=\operatorname{lform} G$).

В данной статье дается классификация неоднопорожденных S-замкнутых локальных формаций $\mathfrak{F}$ при условии, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}^n$ $(n\geqslant 3)$ и всякая нетривиальная S-замкнутая локальная подформация из $\mathfrak{F}$ однопорождена. Все рассматриваемые здесь формации (за исключением многообразий групп) предполагаются состоящими лишь из конечных групп.

Лемма 1. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\langle f\rangle$, $p\in\pi(\langle f\rangle)$. Тогда максимальный внутренний локальный экран h формации* $\operatorname{lform} f(p)$ *таков, что $h(p)=f(p)$.*

Доказательство. Пусть t — минимальный локальный экран формации $\langle f\rangle$. Тогда по теореме 3.3 [1] $f(p)=\mathfrak{N}_p t(p)$. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех таких групп A из $t(p)$, что $O_p(A)=1$. Обозначим через $\mathfrak{X}^p$ совокупность всех регулярных сплетений группы P порядка p со всеми группами из $\mathfrak{X}$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{X}^p\subseteq f(p)$. Значит, $\mathfrak{X}^p\subseteq\operatorname{lform} f(p)$. Любая группа G из $\mathfrak{X}^p$ представима в виде произведения LH, где $L=C_G(L)$ — p-группа, а $H\in\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}\subseteq h(p)$. По лемме 3 [2] $t(p)=\operatorname{form}\mathfrak{X}$. Поэтому, $t(p)\subseteq h(p)$. Значит, $f(p)\subseteq h(p)$. С другой стороны, поскольку f — внутренний экран формации $\langle f\rangle$, то $\operatorname{lform} f(p)\subseteq\langle f\rangle$. Значит, $h(p)\subseteq f(p)$. Таким образом, $f(p)=h(p)$. Лемма доказана.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем примарной, если найдется такое простое число p, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}_p$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\ldots\mathfrak{M}_n$ — произведение примарных формаций, причем для всех $i=1,\ldots,n-1$ справедливо $\mathfrak{M}_i\neq\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}_i\cap\mathfrak{M}_{i+1}=\mathfrak{E}=\mathfrak{M}_n$. Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}=\operatorname{lform}\mathfrak{M}$. Тогда если $p\in\pi(\mathfrak{M}_i)$, но $\{p\}\cap\pi(\mathfrak{M}_j)=\varnothing$ для всех $j<i$, то $f(p)=\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n$.*

Доказательство. Пусть A — произвольная группа с единственной минимальной нормальной подгруппой из $\mathfrak{M}_{i+1}\ldots$ $\ldots\mathfrak{M}_n$. Предположим, что $O_p(A)=1$. Тогда существует точный неприводимый $GF(p)[A]$-модуль L. Пусть $G=L\rtimes A$. Ясно, что $L\in\mathfrak{M}_i$. Значит, $G\in\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n\subseteq\mathfrak{F}$. Нетрудно заметить, что $F_p(G)=L$. Значит, $A\simeq G/L=G/F_p(G)\in f(p)$. Предположим, что $O_p(A)\neq 1$. Тогда поскольку $\pi(\mathfrak{M}_i)\cap\pi(\mathfrak{M}_{i+1})=\varnothing$, то $A\in\in\mathfrak{M}_{i+2}\mathfrak{M}_{i+3}\ldots\mathfrak{M}_n$. Пусть N — точный неприводимый $GF(q)[A]$-модуль, где $q\in\pi(\mathfrak{M}_{i+1})$. Легко видеть, что $H=N\rtimes A\in\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{M}_n$. Группа H имеет лишь одну минимальную нормальную подгруппу и $O_p(H)=1$. Значит, существует точный неприводимый $GF(p)[H]$-модуль M. Пусть $K=M\rtimes H$. Понятно, что $K\in\mathfrak{M}_i\ldots\mathfrak{M}_n\subseteq\mathfrak{F}$. Следовательно, $K/F_p(K)\in f(p)$. Но $F_p(K)=M$. Значит, $H\in f(p)$. Поскольку $A\in Q(H)$, последнее означает, что $A\in f(p)$. Итак, всякая группа с единственной минимальной нормальной подгруппой формации $\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n$ принадлежит $f(p)$. Это означает, что $\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n\subseteq f(p)$. Докажем теперь справедливость обратного включения. Пусть A — произвольная группа из $\mathfrak{M}_1\ldots\mathfrak{M}_n$. Тогда $A^{\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n}\in\mathfrak{M}_1\ldots\mathfrak{M}_n$. Поскольку для всех $j<i$ справедливо $\{p\}\cap\pi(\mathfrak{M}_j)=\varnothing$, то в формации $\mathfrak{M}_1\ldots\mathfrak{M}_i$ всякая группа p-нильпотентна. Значит, $A^{\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n}\subseteq\subseteq F_p(A)$. Но тогда $A/F_p(A)\in\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n$. Последнее ввиду леммы 3 [2] означает, что $f(p)\subseteq\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n$. Таким образом, остается заключить, что $f(p)=\mathfrak{M}_{i+1}\ldots\mathfrak{M}_n$. Лемма доказана.

Напомним, что S-замкнутой (локальной) формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$, называют пересечение всех тех S-замкнутых (локальных) формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$. Минимальной S-замкнутой неабелевой формацией называется всякая неабелева S-замкнутая формация, у которой абелевы все нетривиальные S-замкнутые подформации.

Лемма 3. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная S-замкнутая неабелева формация, когда $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, которую порождает одна из следующих групп: 1) группа кватернионов порядка 8; 2) неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p; 3) группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, порожденная A. Предположим, что группа A ненильпотентна. В этом случае A — минимальная ненильпотентная группа и $\Phi(A)=1$. Пусть $A\in\mathfrak{N}$. Тогда ввиду теоремы 2.4 [1] $\mathfrak{F}$ — минимальная неабелева формация. Ввиду теоремы 2.2 [3] последнее означает, что $\mathfrak{F}=\operatorname{form} H$, где H — либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p. К этому остается добавить, что ввиду теоремы 2.4 [1] $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, порожденная группой H.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, порожденная группой Шмидта A, причем $\Phi(A)=1$. Тогда $A=PQ$, где $P=C_A(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа груп-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

пы A, а Q — подгруппа простого порядка q $(q\neq p)$. Пусть $\mathfrak{H}=\operatorname{form} P\times Q$. Поскольку в A имеются лишь два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются P и Q, то ввиду лемм 2.1 [4] S-замкнутая формация, порожденная группой A, совпадает с формацией, порожденной множеством $\{P, A\}$. Следовательно, если B — группа с единственной минимальной нормальной подгруппой и $B\in\mathfrak{F}$, то по следствию 1 [5] либо $B\in\mathfrak{H}$, либо $B\simeq A$. Значит, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная S-замкнутая подформация формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная S-замкнутая неабелева формация. Если A — либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p, то по теореме 2.2 [3] и теореме 2.4 [1] S-замкнутая формация, порожденная группой A, является минимальной S-замкнутой неабелевой формацией. Лемма доказана.

В дальнейшем для любого натурального числа n через $\mathfrak{A}(n)$ будем обозначать формацию всех абелевых групп экспоненты, делящей n.

Лемма 4. *Пусть A — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, $\{p, q\}=\pi(A)$ и $A_p\lhd A$. Тогда S-замкнутая формация $\mathfrak{F}$, порожденная группой A, совпадает с формацией $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)$.*

Доказательство. Формация $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)$ является S-замкнутой как произведение двух S-замкнутых формаций $\mathfrak{A}(p)$ и $\mathfrak{A}(q)$. Следовательно, поскольку $A\in\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)$, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)$. Покажем теперь, что справедливо обратное включечние. Пусть B — произвольная непримарная группа из $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)$ с единственной минимальной нормальной подгруппой P. Так как $B^{\mathfrak{A}(q)}\in\mathfrak{A}(p)$, то B_p — нормальная элементарная абелева подгруппа в B. Из последнего вытекает, что P не входит в подгруппу Фраттини из B. Следовательно, $P=B_p=C_B(P)$. Группа B_q абелева, имеет экспоненту q и является ввиду предыдущего группой автоморфизмов для P. Значит, $|B_q|=q$. Таким образом, B — группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини. Следовательно, группы A и B изоморфны. Таким образом, всякая группа из $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)$ с единственной минимальной нормальной подгруппой принадлежит формации $\mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)\subseteq\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(q)=\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неоднопорожденная S-замкнутая формация, входящая в $\mathfrak{A}^n$ $(n\geqslant 3)$. В точности тогда всякая нетривиальная S-замкнутая подформация из $\mathfrak{F}$ однопорождена, когда $\mathfrak{F}$ — одна из следующих формаций: 1) $\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{A}$; 2) $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(p)$; 3) $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — минимальная S-замкнутая неабелева формация, p — простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{H})$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{A}$. Предположим, найдется такая группа A, что $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

формация, порожденная A. Ввиду леммы 2.1 [4] экспонента любой группы из $\mathfrak{F}$ не превосходит экспоненту группы A. Но в формации $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$ содержатся группы сколь угодно большой экспоненты. Значит, $\mathfrak{F}$ — неоднопорожденная формация. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная нетривиальная подформация из $\mathfrak{F}$, A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{M}$. Ясно, что A — циклическая группа. Если $\mathfrak{M}$ — неоднопорожденная формация, то в $\mathfrak{M}$ содержатся циклические группы сколь угодно больших порядков, а значит, $A \in \mathfrak{M}$. Это противоречит определению группы A. Следовательно, $\mathfrak{M}$ — однопорожденная формация.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}(p)\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ либо $\mathfrak{A}(p)$, либо минимальная S-замкнутая неабелева формация $\mathfrak{H}$, причем в последнем случае p не принадлежит $\pi(\mathfrak{H})$. Так как в этом случае $\mathfrak{F}$ — произведение двух S-замкнутых формаций, то сама формация $\mathfrak{F}$ также S-замкнута. Пусть $\mathfrak{X}$ — многообразие, порожденное $\mathfrak{F}$. Легко видеть, что $\mathfrak{X}$ локально конечно. Следовательно, ввиду леммы 3 и леммы 2.3 [2] заключаем, что решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{X}$ изоморфна решетке S-замкнутых подформаций из $\mathfrak{F}$. Кроме того, $\mathfrak{X} = \mathrm{var}\,(\mathfrak{A}(p))\,\mathrm{var}\,\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}(p)$. Тогда $\mathfrak{X}$ — произведение многообразия абелевых групп экспоненты, делящей p на себя. Из работ [6, 7] следует, что в этом случае многообразие $\mathfrak{X}$ почти-кроссово, т. е. само многообразие $\mathfrak{X}$ не порождается конечной группой, но всякое ее нетривиальное подмногообразие может быть порождено некоторой своей конечной группой (см. [8]). Локально конечное многообразие порождается конечной группой тогда и только тогда, когда конечна решетка его подмногообразий. Следовательно, ввиду отмеченного выше изоморфизма $\mathfrak{F}$ не является однопорожденной формацией, но всякая ее нетривиальная S-замкнутая подформация однопорождена. По результатам работы [9] к аналогичному заключению приходим и в случае, когда $\mathfrak{M}$ — S-замкнутая формация, порожденная либо группой кватернионов порядка 8, либо неабелевой группой порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. Пусть $\mathfrak{H}$ — непримарная формация. Тогда ввиду лемм 3 и 4 $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}(r)\mathfrak{A}(t)$, где r и t — различные простые числа. Так как p не принадлежит $\pi(\mathfrak{H}) = \{r, t\}$, то по следствию 2 [10] многообразие $\mathfrak{X} = \mathrm{var}\,(\mathfrak{A}(p))\,\mathrm{var}\,(\mathfrak{A}(r))\,\mathrm{var}\,(\mathfrak{A}(t))$ почти-кроссово. Это вновь позволяет заключить, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию леммы.

Необходимость. Если найдется такое простое число p, что $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, то ввиду доказанного в первом абзаце $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$. Пусть для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$ не входит в $\mathfrak{F}$. Тогда экспоненты всех групп из $\mathfrak{F}$ ограничены сверху в совокупности. Действительно, если $\pi(\mathfrak{F})$ — бесконечное множество, то в $\mathfrak{F}$ содержится счетное множество $\mathfrak{X}$ неизоморфных групп простых порядков Z_p, Z_q, ... $(p, q, \ldots, \in \pi(\mathfrak{F}))$. Множество $\mathfrak{X} \backslash Z_p$ бесконечно, причем $\{p\} \cap \pi(\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{X} \backslash Z_p) = \varnothing$. Следовательно,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

неоднопорожденная формация form $(\mathfrak{X}\setminus Z_p)$ является собственной подформацией формации form $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Полученное противоречит условию. Значит, $\pi(\mathfrak{F})$ — конечное множество. Если предположить, что экспоненты групп из $\mathfrak{F}$ не ограничены в совокупности сверху, то найдется такое $p\in\pi(\mathfrak{F})$, что в $\mathfrak{F}$ содержатся циклические p-группы сколь угодно больших порядков. Но в $\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{A}$ все собственные подформации однопорождены. Значит, $\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{F}$. Противоречие показывает, что экспоненты всех групп из $\mathfrak{F}$ ограничены в совокупности. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, порожденное формацией $\mathfrak{F}$. Ясно, что экспонента многообразия $\mathfrak{M}$ конечна. Кроме того, поскольку $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{A}^n$, многообразие $\mathfrak{M}$ разрешимо. Значит, оно локально конечно. Следовательно, решетка подмногообразий из $\mathfrak{M}$ изоморфна решетке S-замкнутых подформаций из $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку по условию $\mathfrak{F}$ — неоднопорожденная формация, у которой однопорождены все ее нетривиальные S-замкнутые подформации, то $\mathfrak{M}$ — почти-кроссово многообразие. По теореме 1 [11] $\mathfrak{M}$ может быть одним из следующих многообразий: 1) var $(\mathfrak{A}(p))\times$ $\times$ var $(\mathfrak{A}(p))$, где p — простое число; 2) var $(\mathfrak{A}(p))$ var $(\mathfrak{A}(q))\times$ $\times$ var $(\mathfrak{A}(r))$, где p, q и r — различные простые числа; 3) var $(\mathfrak{A}(p))$ var H, где H — либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, а p — простое число, не делящее порядок группы H. Понятно, что var $(\mathfrak{A}(p))$ var $(\mathfrak{A}(p))=$ var $(\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(p))$, var $(\mathfrak{A}(p))$ var $(\mathfrak{A}(q))$ var $(\mathfrak{A}(r))=$ var $(\mathfrak{A}(p)\,\mathfrak{A}(q)\,\mathfrak{A}(r))$, var $(\mathfrak{A}(p))\times$ $\times$ var $H=$ var $(\mathfrak{A}(p)\,\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ — S-замкнутая формация, порожденная группой H. Значит, $\mathfrak{F}=\mathfrak{A}(p)\,\mathfrak{M}$, где p — простое число, а $\mathfrak{M}$ — либо $\mathfrak{A}(p)$, либо минимальная S-замкнутая неабелева формация p'-групп. Лемма доказана.

Напомним, что экран f называется S-замкнутым, если для любой группы G формация $f(G)$ S-замкнута. Если формация $\mathfrak{F}$ имеет S-замкнутый локальный экран, то пересечение всех ее S-замкнутых локальных экранов будем называть минимальным S-замкнутым локальным экраном $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неоднопорожденная S-замкнутая локальная формация, входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^n$ $(n\geqslant 3)$. В точности тогда всякая нетривиальная S-замкнутая локальная подформация из $\mathfrak{F}$ однопорождена, когда $\mathfrak{F}=$ lform $(\mathfrak{N}_q\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — либо одна из формаций $\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(p)$, либо совпадает с $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — минимальная S-замкнутая неабелева формация p'-групп, p и q — различные простые числа.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Ввиду лемм 3 и 4 формация $\mathfrak{H}$ либо примарна, либо является произведением двух примарных формаций. Значит, по лемме 2 $f(q)=\mathfrak{M}$, $f(p)$ — либо $\mathfrak{E}$, либо $\mathfrak{H}$ и для всех простых $r\neq p$, q формация $f(r)$ либо пуста, либо является примарной однопорожденной. По теореме 2.4 [1] всякая нильпотентная формация S-замкнута. Сле-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

довательно, все значения экрана f являются S-замкнутыми формациями. Отсюда легко вытекает, что сама формация $\mathfrak{F}$ также S-замкнута. Предположим, найдется такая группа A, что $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, A$. Тогда по лемме 3 [2] $f(q) = \mathrm{form}\,(A/F_q(A))$. Но по лемме 5 $f(q) = \mathfrak{M}$ — неоднопорожденная формация. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}$ не является локальной однопорожденной формацией. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — произвольная нетривиальная S-замкнутая локальная подформация из $\mathfrak{F}$. По теореме 4.7 [1] формация $\mathfrak{F}_1$ обладает S-замкнутым локальным экраном. Пусть h — минимальный S-замкнутый локальный экран формации $\mathfrak{F}_1$. Выше показано, что экран f является S-замкнутым. Следовательно, f совпадает с минимальным S-замкнутым локальным экраном формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 4 [2] это означает, что $h \leqslant f$. Предположим, что $h(q) = f(q)$. Ввиду теоремы 4.7 [1] h — внутренний экран формации $\mathfrak{F}_1$. Применяя теперь лемму 3.11 [1], заключаем, что $\mathfrak{N}_q\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Но тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_q\mathfrak{M}) = \mathfrak{F}_1$. Это противоречит определению формации $\mathfrak{F}_1$. Таким образом, $h(q)$ — собственная подформация формации $f(q)$. По лемме 5 всякая нетривиальная подформация из $f(q) = \mathfrak{M}$ однопорождена. Значит, для всякого простого числа $t \in \pi(\mathfrak{F}_1)$ формация $h(t)$ является однопорожденной. Заметим также, что поскольку $\pi(\mathfrak{F}_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то множество $\pi(\mathfrak{F}_1)$ конечно. Следовательно, ввиду леммы 1 [12] $\mathfrak{F}_1$ — локальная однопорожденная формация.

Необходимость. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F})$ — бесконечное множество, $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$. Множество π также бесконечно, поэтому локальная формация $\mathfrak{N}_\pi$ не может быть порождена одной группой. Но $\mathfrak{N}_\pi$ — нетривиальная S-замкнутая подформация из $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_\pi$ — локальная однопорожденная формация. Полученное противоречие показывает, что множество $\pi(\mathfrak{F})$ конечно. Пусть f — минимальный S-замкнутый локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если для всякого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $f(p)$ однопорождена, то по лемме 1 [12] $\mathfrak{F}$ — локальная однопорожденная формация. Последнее противоречит условию. Значит, найдется такое $p \in \pi(\mathfrak{F})$, что $f(p)$ — неоднопорожденная формация. Предположим, что для некоторого простого числа t формация $\mathfrak{N}_t \cap \mathfrak{A}$ входит в $f(p)$. По теореме 4.7 [1] экран f является внутренним для формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 3.11 [1] $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_t \cap \mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $t \neq p$, то по доказанному ранее $\mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_t \cap \mathfrak{A})) = \mathfrak{F}$. Пусть $p = t$. Предположим, что для всех $q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$ справедливо $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A} \cap f(q) \neq \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$. По лемме 5 всякая собственная подформация формации $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$ однопорождена. Значит, найдется такое n, что экспоненты всех абелевых p-групп из всех $f(q)$ не превосходят n. Тогда для любого $q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$ и для любой группы $A \in \mathfrak{F}$ экспонента силовской p-подгруппы из $A/F_q(A)$ не превосходит n. Пусть $\pi(A) = \{q, p\}$. Поскольку всякая силовская p-подгруппа из $A/F_q(A)$ изоморфна силовским p-подгруппам из

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$A/O_{q'}(A)$ и $O_{q'}(A) \subseteq F_p(A)$, то экспонента силовской p-подгруппы из $A/F_p(A)$ не превосходит n. Пусть порядок группы делится, по крайней мере, на три различных простых числа. Пусть $P = \bigcap_{q \in \pi(A) \setminus \{q\}} O_{q'}(A)$. Поскольку операция R_0 не приводит к увеличению экспоненты, то экспонента силовской p-подгруппы из A/P не превосходит n. Но $P \subseteq F_p(A)$. Значит, для любой группы $A \in \mathfrak{F}$ экспонента силовской p-подгруппы из $A/F_p(A)$ не больше, чем n. Пусть G — произвольная циклическая p-группа из $f(p)$. Тогда по лемме 3 [2] G принадлежит S-замкнутой формации, порожденной классом $(\{A/F_p(A) \mid A \in \in \mathfrak{F}\})$. Ввиду предыдущего и леммы 2.1 [4] это означает, что $|G| \leqslant n$. Последнее противоречит тому, что $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A} \subseteq f(p)$. Таким образом, найдется такое $q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$, что $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A} \subseteq f(q)$. В этом случае $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_q(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}))$.

Итак, в дальнейшем мы можем считать, что для всяких r, $t \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{N}_r \cap \mathfrak{A}$ не входит в $f(t)$. Покажем, что если $\mathfrak{M}_1$ — произвольная S-замкнутая неоднопорожденная подформация из $f(t)$, то в $\mathfrak{M}_1$ найдется подформация $\mathfrak{M}_2$, совпадающая с одной из перечисленных в лемме 5 формаций. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — многообразие, порожденное формацией $\mathfrak{M}_1$. Так как по условию $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^n$, то ввиду леммы 4 [2] $f(p) \subseteq \mathfrak{A}^n$. Тогда тем более $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{A}^n$. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}_0$ разрешимо. Легко видеть, что $\pi(\mathfrak{M}_1)$ — конечное множество. Поэтому ввиду отмеченного в начале этого абзаца найдется такое натуральное число m, что экспоненты всех групп из $\mathfrak{M}_1$ не превосходят m. Из последнего вытекает, что многообразие $\mathfrak{M}_0$ локально конечно. Так как $\mathfrak{M}_1$ — неоднопорожденная формация, то по лемме 2.3 [3] $\mathfrak{M}_0$ не порождается своей конечной группой. Следовательно, в $\mathfrak{M}_0$ содержится почти-кроссово подмногообразие $\mathfrak{H}_0$. Пусть $\mathfrak{M}_2$ — класс всех конечных групп из $\mathfrak{H}_0$. Тогда $\mathfrak{M}_2$ — такая неоднопорожденная S-замкнутая подформация формации $\mathfrak{M}_1$, в которой все нетривиальные S-замкнутые подформации однопорождены. Следовательно, поскольку $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{A}^n$, то $\mathfrak{M}_2$ — одна из формаций, перечисленных в лемме 5. Так как $f(p)$ — неоднопорожденная формация, то из доказанного вытекает, что в $f(p)$ содержится одна из следующих формаций: $\mathfrak{A}(t)\mathfrak{A}(t)$, где t — простое число; $\mathfrak{A}(t)\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — минимальная S-замкнутая неабелева формация t'-групп, t — простое число. Пусть $\mathfrak{A}(t)\mathfrak{A}(t) \subseteq f(p)$. Если $p \neq t$, то, как уже показано, $\mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(t)\mathfrak{A}(t))$ — неоднопорожденная локальная подформация из $\mathfrak{F}$. Значит, в этом случае $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(t) \times \times \mathfrak{A}(t))$. Пусть $p = t$. Рассуждая, как и в предыдущем абзаце, можно показать, что найдется такое $q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}$, что ступени нильпотентности силовских p-подгрупп групп из $f(q)$ не ограничены сверху в совокупности. Пусть $\mathfrak{X} = f(q) \cap \mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{H}_1$ — S-замкнутая формация, порожденная $\mathfrak{X}$. Ввиду леммы 2.1 [5] $\mathfrak{H}_1$ не является однопорожденной формацией. Значит, в $\mathfrak{H}_1$ входит одна из формаций, перечисленных в лемме 5. Так как

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{N}_p$, то $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(p)\subseteq\mathfrak{H}_1\subseteq f(q)$. Следовательно, в этом случае $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_q\mathfrak{A}(p)\mathfrak{A}(p))$. Пусть $\mathfrak{A}(t)\mathfrak{H}\subseteq f(p)$. Если $p\neq t$, то $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(t)\mathfrak{H})$. Пусть $p=t$. Предположим, найдется такое m, что порядки главных p-факторов всех групп из $f(q)$ для всех $q\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\{p\}$ не превосходят m. Пусть $A\in\mathfrak{F}$. Если $\{p, q\}=\pi(A)$, то $O_{q'}(A)\subseteq O_p(A)\subseteq F_p(A)$. Заметим, что главные p-факторы из $A/F_q(A)$ изоморфны соответствующим главным p-факторам из $A/O_{q'}(A)$. Значит, порядки всех главных p-факторов из $A/F_p(A)$ не превосходят число m. Пусть порядок группы A делится не менее чем на три простых числа. Тогда $P=\bigcap_{q\in\pi(A)\setminus\{p\}} O_{q'}(A)\subseteq O_p(A)\subseteq F_p(A)$. Поскольку $A/P\in R_0(\{A/O_{q'}(A)\mid q\in\pi(A)\setminus\{p\}\})$, то порядки всех p-главных факторов из $A/F_p(A)$ не превосходят m. Следовательно, ввиду леммы 2.1 [5] порядки главных p-факторов всех групп из $f(p)$ не превосходят m. Из результатов работы [9] следует, что порядки главных p-факторов групп из $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{H}$ не ограничены сверху в совокупности. Но $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{H}\subseteq f(p)$. Полученное противоречие показывает, что найдется такое $q\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\{p\}$, что у групп из формации $f(q)$ порядки главных p-факторов могут быть сколь угодно велики. Ввиду теоремы 51.2 [8] это означает, что $f(q)$ не является однопорожденной формацией. Тогда в $f(q)$ содержится одна из формаций, перечисленных в лемме 5. Учитывая показанное выше, можно считать, что $\mathfrak{A}(p)\mathfrak{H}\subseteq f(q)$. В этом случае $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,(\mathfrak{N}_q\mathfrak{A}(p)\mathfrak{H})$. Теорема доказана.

Литература

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М.: Наука, 1978.— 272 с.
2. *Скиба А. Н.* О критических формациях.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1980, № 4, с. 27—33.
3. *Скиба А. Н.* Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями.— В кн.: Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности: Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— Новосибирск: Наука, 1984, т. 4, с. 101—118.
4. *Скиба А. Н.* О формациях с заданными системами подформаций.— В кн.: Подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1981, с. 155—180.
5. *Скиба А. Н.* О формациях, порожденных классами групп.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, № 3, с. 33—38.
6. *Gupta N. D., Newman M. F.* On metabelian groups.— J. Austral. Math. Soc., 1966, v. 6, N 4, p. 362—368.
7. *Kovacs L. D., Newman M. F.* Just-non-Cross varieties.— Proc. Intern. Conf. Theory of Groups., Canberra, 1965. N. Y., 1967, p. 221—223.
8. *Нейман Х.* Многообразия групп.— М.: Мир, 1969.— 262 с.
9. *Higman G.* Some remarks on varieties of groups.— Quart. J. Math. Oxford, 1959, v. 10, N 2, p. 165—178.
10. *Cossey J.* On non-Cross varieties of *A*-groups.— J. Austral. Math. Soc., 1972, v. 13, N 2, p. 153—166.
11. *Ольшанский А. Ю.* Разрешимые почти-кроссовы многообразия групп.— Мат. сб., 1971, т. 85(127), с. 98—114.
12. *Скиба А. Н.* О произведении формаций.— Алгебра и логика, 1983, т. 22, № 5, с. 574—583.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ