УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81

КРИТЕРИИ π-ОТДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

CRITERIA FOR π-SEPARABILITY OF A FINITE GROUP

I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. В данной статье все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Группа G называется π-*отделимой*, если каждый ее главный фактор является либо π-группой, либо π'-группой. Подгруппа A группы G является π,π'-*субнормальной* в G, если в G имеется цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π-отделимой группой для всех $i = 1, \ldots, n$. В данной статье изучается влияние π,π'-субнормальных подгрупп на строение основной группы.

Ключевые слова: *конечная группа*, π-*отделимая группа*, π,π'-*субнормальная подгруппа*, *холлова подгруппа*.

Для цитирования: *Дергачева*, *И.М.* Критерии π-отделимости конечной группы / И.М. Дергачева, И.П. Шабалина, Е.А. Задорожнюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 81–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81

Abstract. Throughout this paper all groups are finite and G always denotes a finite group. The group G is said to be π-*separable* if every chief factor of G is either a π-group or a π'-group. A subgroup A of G is said to be π,π'-*subnormal* in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π-separable group for all $i = 1, \ldots, n$. In this paper we study the influence of π,π'-subnormal subgroups on the structure of the group.

Keywords: *finite group*, π-*separable group*, π,π'-*subnormal subgroup*, *Hall subgroup*.

For citation: *Dergacheva*, *I.M.* Criteria for π-separability of a finite group / I.M. Dergacheva, I.P. Shabalina, E.A. Zadorozhnyuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 81–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_81 (in Russian)

Введение

В данной статье все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Более того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Группа G называется: π-*отделимой*, если каждый ее главный фактор является либо π-группой, либо π'-группой; π-*разложимой*, если $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является π,π'-*субнормальной* в G, если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π-отделимой группой для всех $i = 1, \ldots, n$.

В данной работе мы докажем следующий результат, дающий новые характеризации π-отделимых групп в терминах π,π'-субнормальности.

***Теорема* 0.1.** *Следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(i) *Группа G является π-отделимой.*

(ii) *Каждая подгруппа группы G является π,π'-субнормальной в G.*

(iii) *Каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы G является π,π'-субнормальной в G.*

(iv) *Каждая нециклическая силовская подгруппа группы G является π,π'-субнормальной в G.*

(v) *В G имеется π,π'-субнормальная холлова π-подгруппа H.*

(vi) *Каждая подгруппа Шмидта группы G является π,π'-субнормальной в G.*

1 Некоторые предварительные результаты

Мы используем $\mathfrak{S}_{\pi,\pi'}$ для обозначения класса всех π-отделимых групп.

Первая лемма может быть доказана прямой проверкой.

***Лемма* 1.1.** *Класс $\mathfrak{S}_{\pi,\pi'}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, всякое расширение*

π-отделимой группы при помощи π-отделимой группы является π-отделимой группой.

Из леммы 1.1. и основного результата работы [1] вытекает следующая лемма.

***Лемма* 1.2.** *Множество всех π, π'-субнормальных подгрупп группы G формирует подрешетку в решетке всех подгрупп группы G.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть A, K и N – подгруппы в G, где A π, π'-субнормальна в G и N нормальна в G.*

(1) *Подгруппа $A \cap K$ π, π'-субнормальна в K.*

(2) *Если K является π, π'-субнормальной подгруппой в A, то K яляется π, π'-субнормальной подгруппой в G.*

(3) *Если K π, π'-субнормальна в G, то $A \cap K$ и $\langle A, K\rangle$ – π, π'-субнормальные подгруппы в G.*

(4) *Подгруппа AN/N является π, π'-субнормальной в G/N.*

(5) *Если $N \le K$ и подгруппа K/N π, π'-субнормальна в G/N, то подгруппа K π, π'-субнормальна в G.*

(6) *Если $K \le A$ и группа A π-отделима, то подгруппа K π, π'-субнормальна в G.*

Доказательство. Предположим, что данная лемма не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Согласно условию, в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π-отделимая группа для всех $i = 1, \ldots, r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \ne G$.

(1) Рассмотрим цепь подгрупп

$$K_0 = K \cap A_0 \le K \cap A_1 \le \cdots \le K \cap A_r = K$$

в группе K. Если A_{i-1} нормальна в A_i, тогда $K \cap A_{i-1}$ нормальна в $K \cap A_i$. Пусть теперь $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π-отделимая группа. Тогда

$$(A_i \cap K)(A_{i-1})_{A_i}/(A_{i-1})_{A_i} \simeq A_i \cap K/(A_{i-1})_{A_i} \cap K$$

π-отделима, где $(A_{i-1})_{A_i} \cap K$ нормальна в $A_i \cap K$ и поэтому

$$(A_{i-1})_{A_i} \cap K \le (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}.$$

Следовательно, $(K \cap A_i)/(K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ – π-отделимая группа. Таким образом, $A \cap K$ π, π'-субнормальна в K.

Утверждения (2) и (5) очевидны.

(3) Данное утверждение является следствием леммы 1.2.

(4) Рассмотрим цепь подгрупп

$$AN/N = A_0N/N \le A_1N/N \le \cdots \le A_rN/N = G/N$$

в группе G/N. Предположим, что $A_{i-1}N/N$ не является нормальной подгруппой в A_iN/N. Тогда $L = A_{i-1}$ не является нормальной подгруппой в $T = A_i$ и поэтому T/L_T – π-отделимая группа согласно условию. Тогда

$$(T/L_T)/(L_T(T \cap N)/L_T) =$$
$$= (T/L_T)/((T \cap NL_T)/L_T) \simeq T/(T \cap NL_T) \simeq$$
$$TN/L_TN \simeq (TN/N)/(L_TN/N)$$

– π-отделимая группа. При этом имеет место включение $L_TN/N \le (LN/N)_{TN/N}$. Следовательно, $(TN/N)/(LN/N)_{TN/N}$ – π-отделимая группа и поэтому AN/N – π, π'-субнормальная подгруппа в G/N.

(6) Так как A π-отделима, то каждая подгруппа группы A π, π'-субнормальна в A. Таким образом, данное утверждение является следствием утверждения (2). □

Напомним, что G называется группой Шмидта, если группа G ненильпотентна, но все ее собственные подгруппы нильпотентны.

***Лемма* 1.4** [3, III, теорема 5.2], [4, VI, теорема 24.2]. *Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – силовская p-подгруппа группы G и $Q = \langle x\rangle$ является циклической силовской q-подгруппой в G, $p \ne q$. Кроме того, $\langle x^q\rangle \le \Phi(G)$ и P имеет экспоненту p или* 4 (*если P – неабелева 2-группа*).

2 Доказательство основного результата

Поскольку все импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (iv), (ii) $\Rightarrow$ (v) и (ii) $\Rightarrow$ (vi) являются очевидными, нам достаточно лишь доказать справедливость импликаций (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Rightarrow$ (i), (v) $\Rightarrow$ (i) и (vi) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Пусть $H \le M \le G$, где M – максимальная подгруппа в G. Тогда M и G/M_G – π-отделимые группы согласно лемме 1.1. Таким образом, M π, π'-субнормальна в G. С другой стороны, H π, π'-субнормальна в M по индукции и поэтому H π, π'-субнормальна в G ввиду леммы 1.3 (2). Таким образом, обе импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii) являются верными.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и M/R – ненильпотентная максимальная подгруппа в G/R. Тогда M максимальна в G и M не является нильпотентной группой, поэтому M π, π'-субнормальна в G по условию. Следовательно, M/R π, π'-субнормальна в G/R ввиду леммы 1.3(4). Таким образом, условие (iii) выполнено для G/R и поэтому G/R является π-отделимой группой ввиду выбора группы G. Следовательно, R не является π-группой и не является π'-группой по лемме 1.1, снова ввиду выбора группы G. Это означает, что $R \nleq \Phi(G)$ и $|\pi(R)|>1$.

Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq R$, тогда ввиду G-изоморфизма $NR/R \simeq N/1$ подгруппа N является либо π-группой, либо π'-группой, что невозможно ввиду доказанного выше. Таким образом, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G.

Пусть p – произвольное нечетное простое число, делящее $|R|$, и R_p – силовская p-подгруппа в R. Ввиду аргумента Фраттини имеет место $G = RN_G(R_p)$, где $G \neq N_G(R_p)$ поскольку R не является абелевой группой. Тогда для максимальной подгруппы M группы G, содержащей $N_G(R_p)$, имеет место $R \nleq M$ и поэтому мы имеем $G = RM$ и $M_G = 1$. Более того, если $R_p \leq G_p$, где G_p – силовская p-подгруппа группы G, то $R_p = R \cap G_p$ и поэтому $G_p \leq N_G(R_p) \leq M$. Следовательно, p не делит $|G:M|$ и $M_G = 1$.

Предположим, что пересечение $D := M \cap R$ является нильпотентным. Тогда D – нильпотентная нормальная подгруппа в M и K_p является силовской p-подгруппой в D. Более того, K_p нормальна в M, поскольку D нильпотентна и, следовательно, подгруппа $Z(J(\mathrm{K}_p))$ нормальна в M. Поскольку $M_G = 1$, то $N_G(Z(J(\mathrm{K}_p))) = M$. Тогда $N_{\mathrm{K}}(Z(J(\mathrm{K}_p))) = D$ – нильпотентная группа. Отсюда следует, что К p-нильпотентна по теореме Глаубермана – Томпсона о нормальных p-дополнениях [2, гл. 8, теорема 3.1]. Но тогда К является p-группой, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $D := M \cap R$ не является нильпотентным и поэтому M не является нильпотентной группой. Но тогда M π,π'-субнормальна в G и, следовательно,

$$G \simeq G/M_G = G/1$$

– G является π-отделимой группой, что противоречит выбору этой группы. Таким образом, импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) является верной.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G и пусть P/R – нециклическая силовская p-подгруппа в G/R для некоторого простого числа p. Тогда для некоторой силовской p-подгруппы G_p группы G имеет место $G_pR/R = P/R$ и G_p не является циклической группой. Следовательно, G_p π,π'-субнормальна в G и поэтому $P/R = G_pR/R$ π,π'-субнормальна в G/R согласно лемме 1.3 (4). Таким образом, гипотеза верна для G/R и поэтому G/R является π-отделимой группой ввиду выбора группы G.

Прежде покажем, что $R < G$. Действительно, предположим, что $R = G$ – неабелева простая группа и пусть P – силовская p-подгруппа в G, где p – наименьший простой делитель числа $|G|$. Тогда P не является циклической группой и поэтому, ввиду условия, в G имеется цепь подгрупп $P = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_r = G$ такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π-отделимая группа для всех $i = 1,\ldots,r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$. Но тогда $G \simeq G/M_G = G/1$ – π-отделимая группа, что противоречит выбору группы G. Значит, R – собственная подгруппа в G.

Покажем теперь, что R также является π-отделимой группой. Прежде заметим, что для любой нециклической силовской подгруппы P группы R в G имеется нециклическая силовская подгруппа G_p такая, что $P = G_p \cap R$. Но тогда P π,π'-субнормальна в R согласно лемме 1.3 (1). Таким образом, условие (iv) выполнено для R и поэтому R является π-отделимой группой ввиду выбора группы G. Но тогда G является π-отделимой группой поскольку π-отделима группа G/R. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (iv) $\Rightarrow$ (i).

(v) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда $1 < H < G$. Так как H π,π'-субнормальна в G, в группе G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_r = G$$

такая, что либо A_{i-1} нормальна в A_i, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π-отделимая группа для всех $i = 1,\ldots,r$. Пусть $M = A_{r-1}$. Мы можем считать, не теряя общности, что $M \neq G$ поскольку $H < G$. Понятно, что условие выполнено для (M,H), поэтому M π-отделима в силу выбора группы G. Понятно также, что $|G:M|$ – π'-число. Это влечет π-отделимость группы G в случае, если M нормальна в G. Таким образом, M не является нормальной в G и поэтому G/M_G – π-отделимая группа. Но в этом случае группа G является π-отделимой поскольку M_G – π-отделимая группа, что противоречит выбору G. Таким образом, импликация (v) $\Rightarrow$ (i) также является верной.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что эта импликация неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Прежде мы покажем, что G/N –

π-отделимая группа. Если G/R нильпотентна, то это очевидно. Предположим, что фактор группа G/R не является нильпотентной и пусть E/R – подгруппа Шмидта в G/R. Пусть H – минимальное добавление к N в E. Тогда

$$H/(H\cap N)\simeq HN/N=E/N$$

– группа Шмидта и $H\cap N\le\Phi(H)$. Пусть $\Phi=\Phi(H)$ и A – подгруппа Шмидта в H.

Из леммы 1.4 вытекает, что

$$(H/(H\cap N))/\Phi(H/(H\cap N))=$$

$$=(H/(H\cap N))/(\Phi/(H\cap N))\simeq H/\Phi=P\rtimes Q,$$

где P – силовская p-подгруппа, Q – силовская q-подгруппа в H/Φ и $|Q|=q$ для некоторых простых чисел $p\neq q$. Отсюда, снова по лемме 1.4, следует, что $A=A_p\rtimes A_q$, где $A=(A_q)^A$. Тогда $A_q\nleq\Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q-подгруппой в H/Φ, и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi}=(A_q)^H\Phi/\Phi=H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H=H$, поэтому

$$E=HN=(A_q)^H N.$$

Согласно лемме 1.3 (3), $(A_q)^H=A^H$ является π,π'-субнормальной подгруппой в G и, следовательно,

$$E/N=(A_q)^H N/N$$

π,π'-субнормальна в G/N по лемме 1.3 (4). Следовательно, гипотеза верна для G/N, поэтому выбор G подразумевает, что G/N – π-отделимая группа.

Рассуждая теперь, как при доказательстве импликации (vi) $\Rightarrow$ (i), можно показать, что N – π-отделимая группа. Но тогда G является π-отделимой группой. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (vi) $\Rightarrow$ (i). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

2. *Gorenstein*, *D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – Harper & Row Publishers, New York – Evanston – London, 1968.

3. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 01.10.2021.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент