МАТЕМАТИКА

УДК 517.5 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

DIRECT AND INVERSE THEOREMS OF APPROXIMATION THEORY FOR THE GENERALIZED MODULUS OF SMOOTHNESS OF SOME CLASS OF FUNCTIONS

G.N. Kazimirov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В статье доказывается совпадение обобщённых модулей гладкости *k*-го порядка, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига типа Гегенбауэра, с разными и одинаковыми сдвигами и как следствие получены прямая и обратная теоремы теории приближений алгебраическими многочленами.

Ключевые слова: *наилучшее приближение алгебраическими многочленами*, *оператор обобщённого сдвига*, *обобщённый модуль гладкости.*

Для цитирования: *Казимиров*, *Г.Н.* Прямая и обратная теоремы теории приближений для обобщённого модуля гладкости некоторого класса функций / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 92–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92

Abstract. This article proves the coincidence of generalized moduli of smoothness of the *k*-s order, defined with the help of Gegenbauers generalized shift operator, with different and identical shifts and, as a consequence, direct and inverse theorems of approximation theory by algebraic polynomials are obtained.

Keywords: *the best approximation by algebraic polynomials*, *Gegenbauers generalized shift operator*, *generalized modulus of smoothness.*

For citation: *Kazimirov*, *G.N.* Direct and inverse theorems of approximation theory for the generalized modulus of smoothness of some class of functions / G.N. Kazimirov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 4 (49). – P. 92–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_4_49_92 (in Russian)

Введение

Ранее были доказаны теоремы о связи между наилучшими приближениями алгебраическими многочленами и обобщёнными модулями гладкости, определяемых с помощью операторов обобщённых сдвигов, предложенных Потаповым М.К. [1]. Но в этих теоремах рассматриваются обобщённые модули гладкости, в которых обобщённые сдвиги берутся с разными шагами для каждой следующей обобщённой разности. В настоящей работе для некоторого класса функций получены прямые и обратные теоремы для обобщённых модулей, в которых каждая следующая разность берётся с одним и тем же шагом.

1 Основные определения

Будем говорить, что $f \in L_q$, $1 \le q < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_q = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q \, dx \right)^{1/q} < +\infty,$$

а для $q = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$. Через $L_{q,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \in L_q$ и

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left\| f(x)(1-x)^\alpha (1-x)^\beta \right\|_q .$$

Рассмотрим оператор обобщённого сдвига типа Гегенбауэра, предложенный в [1]. Положим для $\nu > -\dfrac{1}{2}$

$$T_t(f, x, \nu) = \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^{1} f\left(x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t \right) (1-y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \, dy,$$

где $\gamma(\nu) = \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \, dy.$

Введём также обозначения:

$$\Delta_t^1(f, x, \nu) = T_t(f, x, \nu) - f(x),$$

$$\Delta_t^k(f, x, \nu) = \Delta_t^1(\Delta_t^{k-1}(f, x, \nu), x, \nu), \; k = 2, 3, ...,$$

$$\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x,\nu)=\Delta^1_{t_k}(\Delta^{k-1}_{t_1,\dots,t_{k-1}}(f,x,\nu),x,\nu),$$

$$k=2,3,\dots,$$

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=\sup_{|t_i|\le\delta,i=1,\dots,k}\left\|\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x)\right\|_{q,\alpha,\beta},$$

$$\omega_k(f,\delta,\nu)_{q,\alpha,\beta}=\sup_{|t|\le\delta}\left\|\Delta^k_t(f,x,\nu)\right\|_{q,\alpha,\beta}.$$

Обозначим через $\Lambda^1_{q,\alpha,\beta}$ класс функций $f\in L_{q,\alpha,\beta}$ таких, что $\Delta^1_t(f,x,\nu)=h(x)g(t)$ $\forall x\in[-1,1]$, $\forall t\in[-\pi,\pi]$, где $h\in L_{q,\alpha,\beta}$ и $\sup\limits_{|t|\le\pi}|g(t)|<+\infty$. Будем говорить, что $f\in\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$ (k = 2, 3, …), если $\Delta^1_t(f,x,\nu)=h(x)g(t)$, где $h\in\Lambda^{k-1}_{q,\alpha,\beta}$ и функция g одна и та же во всех классах $\Lambda^l_{q,\alpha,\beta}$ (l = 1, 2, 3, …).

Через $E_n(f)_{q,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции $f\in L_{q,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем n – 1, в метрике $L_{q,\alpha,\beta}$, т. е.

$$E_n(f)_{q,\alpha,\beta}=\inf_{P_n\in P}\left\|P_n(x)-f(x)\right\|_{q,\alpha,\beta},$$

где P – множество алгебраических многочленов степени не выше, чем n – 1, n = 1, 2, … .

2 Вспомогательные утверждения

***Лемма* 2.1.** Пусть числа q,α,β такие, что $1\le q\le\infty$, $-\frac{1}{2}<\alpha\le\nu$ и $-\frac{1}{2}<\beta\le\nu$ при $q=1$, $-\frac{1}{2q}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ и $-\frac{1}{2q}<\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ при $1<q<\infty$, $0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ и $0\le\beta<\nu+\frac{1}{2}$ при $q=\infty$. Тогда, если $f\in L_{q,\alpha,\beta}$ то $T_t(f,x,\nu)\in L_{q,\alpha,\beta}$ и $\left\|T_t(f,x,\nu)\right\|_{q,\alpha,\beta}\le C\|f\|_{q,\alpha,\beta}$, где постоянная C не зависит от f и t.

Лемма 2.1 доказана в [1, с. 235–236].

3 Основные результаты

***Теорема* 3.1** *Пусть даны числа* q,ν,k *такие, что* $1\le q\le\infty$, $\nu>-\frac{1}{2}$, $k=1,2,3,\dots$ *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу*: $-\frac{1}{2}<\alpha\le\nu$ *и* $-\frac{1}{2}<\beta\le\nu$ *при* $q=1$, $-\frac{1}{2q}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *и* $-\frac{1}{2q}<\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *при* $1<q<\infty$, $0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ *и* $0\le\beta<\nu+\frac{1}{2}$ *при* $q=\infty$. *Тогда для* $f\in\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$ *справедливо равенство*:

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=\omega_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}.$$

Доказательство: Заметим, что

$$T_{-t}(f,x)=T_t(f,x).$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $t\in[0,\pi]$. В силу Леммы 2.1 числа $\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}$ и $\omega_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}$ существуют. В силу условия

$$\Delta^1_t(f,x)=h_1(x)g(t),$$

$$\Delta^k_t(f,x)=h_1(x)\cdot\ldots\cdot h_k(x)(g(t))^k,$$

$$\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x)=h_1(x)\cdot\ldots\cdot h_k(x)g(t_1)\cdot\ldots\cdot g(t_k).$$

Тогда

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=$$

$$=\sup_{0\le t_i\le\delta,i=1,\dots,k}|g(t_1)-1|\cdot\ldots\cdot|g(t_k)-1|\|f\|_{q,\alpha,\beta},$$

$$\omega_k(f,\delta)_{q,\alpha,\beta}=\sup_{0\le t\le\delta}|g(t)-1|^k\|f\|_{q,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для $a\ge0$

$$\sup_{a\le z\le b}z^k=\sup_{a\le z_i\le b,\,i=1,\dots,k}z_1\cdot\ldots\cdot z_k,$$

то теорема доказана. □

Примеры функций, принадлежащих классу $\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$:

1) полиномы Якоби [3, с. 469];

2) функция $f(x)=\sin(\arccos x)$, которая не является многочленом.

Действительно. Сделаем в (1.1) замену $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, $\theta=\arccos x$, $y=\cos\gamma$. Тогда, используя формулы сферической тригонометрии, получим

$$T_t(f,\cos\theta,\nu)=\frac{1}{\gamma(\nu)}\int_0^\pi f(\cos c)\sin^{2\nu}\gamma d\gamma=$$

$$=T_t(f,\cos\theta,\nu)=\frac{1}{\gamma(\nu)}\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\sin^{2\nu+1}\gamma d\gamma=$$

$$=f(x)\frac{1}{\gamma(\nu)}\int_0^\pi\frac{\sin^{2\nu+1}\gamma}{\sin\alpha}d\gamma.$$

***Теорема* 3.2.** *Пусть даны числа* q,ν,k *такие, что* $1\le q\le\infty$, $\nu>-\frac{1}{2}$, $k=1,2,3,\dots$ *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу*: $-\frac{1}{2}<\alpha\le\nu$ *и* $-\frac{1}{2}<\beta\le\nu$ *при* $q=1$, $-\frac{1}{2q}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *и* $-\frac{1}{2q}<\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$ *при* $1<q<\infty$, $0\le\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ *и* $0\le\beta<\nu+\frac{1}{2}$ *при* $q=\infty$. *Тогда для* $f\in\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$ *справедливы неравенства*:

$$C_1E_n(f)_{q,\alpha,\beta}\le\omega_k\left(f,\frac{1}{n},\nu\right)_{q,\alpha,\beta}\le$$

$$\le\frac{C_2}{n^{2r}}\sum_{m=1}^n m^{2r-1}E_m(f)_{q,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n (n=1, 2, 3, …).

Доказательство: Следует из теоремы 3.1 и ранее полученного результата в [2, с. 37–38].

Заключение

В статье доказано совпадение обобщённых модулей гладкости, определяемых при помощи оператора обобщённого сдвига вида (1.1), в которых обобщённые разности рассматриваются с разными и одинаковыми шагами для функций из класса $\Lambda^k_{q,\alpha,\beta}$. Как следствие, получены прямая и обратная теоремы о приближении алгебраическими многочленами непериодических функций из этого класса. Ранее аналогичный результат был получен в работе [4] для оператора обобщённого сдвига

$$T_t(f,x)=\frac{1}{2}\Big[f\left(x\cos t+\sqrt{1-x^2}\sin t\right)+ +f\left(x\cos t-\sqrt{1-x^2}\sin t\right)\Big].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов*, *М.К.* Об условиях совпадения некоторых классов функций / М.К. Потапов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1981. – Вып. 6. – С. 223–238.

2. *Казимиров*, *Г.Н.* О теоремах Джексона для *k-го* обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, № 3054-В94. – С. 1–40.

3. *Виленкин*, *Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – Москва: «Наука», 1965.

4. *Казимиров*, *Г.Н.* О совпадении обобщённых модулей гладкости на некотором классе функций / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 69–70.

Поступила в редакцию 28.06.2021.

Информация об авторах

Казимиров Григорий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент