

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

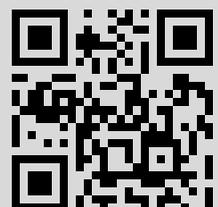
В. И. Мироненко, Отражающая функция и метод малого параметра,  
*Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 3, 334–337

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

2 марта 2022 г., 15:31:27



══════ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ══════

УДК 517.925

## ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

© 2004 г. В. И. Мироненко

Объединяя свойства симметрий, выражаемые понятием отражающей функции [1, 2], с методом малого параметра [3, с. 130–149], формулируются достаточные условия наличия периодических решений у многомерных дифференциальных систем. Основным результатом работы является метод доказательства сформулированных утверждений, опирающийся на две леммы.

Напомним, что для вектор-столбца  $x$  и вектор-функции  $V(t, x)$  размерностей  $n$  и  $m$  соответственно,  $\partial V/\partial x$  есть матрица  $\partial V/\partial x = (\partial V_i/\partial x_j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $i, j$  – номер строки и столбца соответственно.

Все рассматриваемые ниже дифференциальные системы считаются удовлетворяющими теореме существования и единственности решения задачи Коши [3, с. 56].

**Лемма 1.** Пусть для дифференцируемой функции  $F(t, x)$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ , со значениями в  $\mathbb{R}^n$  выполнено соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad (1)$$

где  $X(t, x)$  – правая часть дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

удовлетворяющей теореме существования и единственности решения задачи Коши. Тогда если  $F(0, x_0) = x_0$ , то решение  $x(t)$ ,  $x(0) = x_0$ , этой системы, существующее при всех  $t \in [0; \alpha) \subset I$ , может быть продолжено и на  $(-\alpha; 0] \cap I$  и для этого решения выполнено тождество  $x(-t) \equiv F(t, x(t))$ ,  $t \in (-\alpha; \alpha) \cap I$ .

**Доказательство.** Пусть решение  $x(t)$  существует на  $[0; \alpha) \subset I$ . Определим функцию  $y(t) := F(-t, x(-t))$ ,  $t \in (-\alpha; 0]$ . Для нее, согласно (1), выполнены тождества

$$\frac{dy}{dt}(t) \equiv -\frac{\partial F}{\partial t}(-t, x(-t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(-t, x(-t))X(-t, x(-t)) \equiv X(t, F(-t, x(-t))) \equiv X(t, y(t)),$$

доказывающие, что  $y(t)$  – решение системы (2).

Так как, кроме того,  $y(0) = F(0, x(0)) = x(0)$ , то  $y(t)$  является единственным продолжением  $x(t)$  на  $(-\alpha; 0]$  и, значит,  $y(t) \equiv x(-t)$ ,  $t \in (-\alpha; 0]$ . Лемма 1 доказана.

**Замечание 1.** В том случае, когда для функции  $F$ , удовлетворяющей соотношению (1), справедливо тождество  $F(0, x) \equiv x$ ,  $x \in D$ , эта функция названа отражающей [1, с. 11], а соотношение (1) – основным соотношением для отражающей функции. Геометрически уравнение  $\bar{x} = F(t, x)$  задает интегральное многообразие [4, с. 12] расширенной системы  $dx/dt = X(t, x)$ ,  $d\bar{x}/dt = -X(-t, \bar{x})$ , содержащее область  $D$  гиперплоскости  $t = 0$ . (Уравнение инвариантности гладкого многообразия см. в [5, с. 92].) Если же  $F(0, x) = x$  лишь для  $x$  из некоторого собственного подмножества в  $D$ , функция  $F$  названа отражающей функцией соответствующего семейства решений системы (2) (см. [2]).

**Лемма 2.** Пусть выполнены все условия леммы 1, а система (2)  $2\omega$ -периодична по  $t$ . Тогда если  $F(0, x_0) = x_0$ , то продолжимое на  $[-\omega; \omega]$  решение  $x(t)$ ,  $x(0) = x_0$ , будет  $2\omega$ -периодичным тогда и только тогда, когда  $F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $x(t)$  –  $2\omega$ -периодическое решение. Тогда  $x(\omega) = x(-\omega) = F(\omega, x(\omega))$  и необходимость доказана.

**Достаточность.** Из утверждения леммы 1 вытекают равенства  $x(-\omega) = F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$ , из которых следует, что точка  $x(\omega)$  является неподвижной точкой отображения за период  $[-\omega; \omega]$  для системы (2). Поэтому в силу основного принципа в теории периодических решений [6, с. 12] решение  $x(t)$  периодично, и лемма 2 доказана.

**Замечание 2.** Здесь, как и всюду в [1, 2] и других работах, связанных с отражающей функцией, под отображением за период понимается оператор сдвига [6, с. 11] вдоль решений системы (2) на симметричном промежутке  $[-\omega; \omega]$ , а не, как обычно, на промежутке  $[0; 2\omega]$ .

**Теорема 1.** Пусть для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x, y, \varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = Q(t, x, y, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in G \subset \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in [-\varepsilon_0; \varepsilon_0], \quad (3)$$

с непрерывными по всем своим аргументам функциями  $P, Q, \partial P/\partial x, \partial P/\partial y, \partial Q/\partial x, \partial Q/\partial y$  и решениями  $x = \varphi(t; t_0; x_0; y_0; \varepsilon), y = \psi(t; t_0; x_0; y_0; \varepsilon)$  выполнены условия:

- 1) функции  $P$  и  $Q$   $2\omega$ -периодические по  $t$ ;
- 2) переопределенная относительно  $\Phi$  система

$$Q(-t, \Phi, -y, \varepsilon) = Q(t, x, y, \varepsilon), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} P(t, x, y, \varepsilon) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q(t, x, y, \varepsilon) + P(-t, \Phi, -y, \varepsilon) = 0$$

имеет решение  $\Phi = \Phi(t, x, y, \varepsilon), t \in [-\omega; \omega], x \in D, y \in G$ , для которого  $\Phi(0, x, 0, \varepsilon) \equiv \Phi(\omega; x, 0, \varepsilon) \equiv x, x \in D$ ;

3) при значении параметра  $\varepsilon = 0$  система (3) имеет семейство продолжимых на  $[0; \omega]$  решений  $x = \varphi(t; 0, x_0(s), 0, 0), y = \psi(t; 0, x_0(s), 0, 0), s \in [s_1, s_2]$ , начинающихся при  $t = 0$  на непрерывной кривой  $K: x_0 = x_0(s), y_0 = 0$ , для которых функция  $\psi(\omega; 0, x_0(s), 0, 0)$  на концах отрезка  $[s_1; s_2]$  принимает значения разных знаков.

Тогда система (3) при достаточно малых  $|\varepsilon|$  имеет хотя бы одно  $2\omega$ -периодическое решение вида

$$x = \varphi(t; 0, x_0(s), 0, \varepsilon), \quad y = \psi(t; 0, x_0(s), 0, \varepsilon), \quad s \in [s_1, s_2]. \quad (4)$$

Если к тому же  $\frac{\partial}{\partial s} \psi(\omega; 0, x_0(s), 0, 0)$  не меняет знака на  $[s_1; s_2]$ , то такое  $2\omega$ -периодическое решение единственно.

**Доказательство.** 1. Из лемм 1 и 2 следует, что решение вида (4) будет  $2\omega$ -периодическим тогда и только тогда, когда имеет место равенство  $y(x_0(s), \varepsilon) := \psi(\omega; 0, x_0(s), 0, \varepsilon) = 0$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в силу условий теоремы основное соотношение (1) для системы (3) выполнено при  $F = (\Phi, -y)^T$ . Поэтому равенство  $F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$  из леммы 2 выполнено тогда и только тогда, когда  $y(x_0(s), \varepsilon) = 0$ .

2. По теореме о непрерывной зависимости решений от параметра [3, с. 130] функция  $y(x_0(s), \varepsilon)$  непрерывна по  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  функция  $y(x_0(s), \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = y(x_0(s), 0)$  по условию теоремы на концах отрезка  $[s_1; s_2]$  принимает значения разных знаков. Поэтому существует  $\varepsilon_1 > 0$ , для которого при всех  $|\varepsilon| < \varepsilon_1$  выполнено неравенство  $y(x_0(s_1), \varepsilon)y(x_0(s_2), \varepsilon) < 0$ , т.е.  $y(x_0(s), \varepsilon)$  принимает на  $[s_1; s_2]$  значения разных знаков. Тогда по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции на  $[s_1; s_2]$  существует  $s$ , для которого  $y(x(s), \varepsilon) = 0$ . Отсюда, согласно первому пункту доказательства, следует периодичность решения (4) при указанном  $s$  и первая часть утверждения теоремы.

3. В том случае, когда производная  $\frac{\partial \psi}{\partial s}(\omega, 0, x_0(s), 0, 0) \equiv \frac{\partial y}{\partial s}(x_0(s), \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$  не меняет знака на  $[s_1; s_2]$ , производная  $\frac{\partial y}{\partial s}(x_0(s), \varepsilon)$  при достаточно малых  $\varepsilon$  также не меняет знака на  $[s_1; s_2]$ , а функция  $y(x_0(s), \varepsilon)$  строго монотонна по  $s$ . Поэтому она не может принимать нулевое значение при разных значениях  $s$ , откуда в силу первого пункта доказательства следует единственность периодического решения вида (4). Теорема доказана.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + ax = e(t) + f(x, \dot{x}, t, \varepsilon), \quad a \neq \pi^2 k^2 / \omega^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

эквивалентное системе  $\dot{x} = y, \dot{y} = -ax + e(t) + f(x, y, t, \varepsilon)$ .

Будем считать, что непрерывно дифференцируемая  $2\omega$ -периодическая по  $t$  функция  $f$  удовлетворяет условиям  $f(x, -y, -t, \varepsilon) \equiv f(x, y, t, \varepsilon)$ ,  $f(t, x, y, 0) \equiv 0$ , а  $e(t)$  – четная непрерывная  $2\omega$ -периодическая функция. Тогда условия теоремы выполняются при  $\Phi \equiv x$ . При  $\varepsilon = 0$  система вырождается в линейную систему, для которой при  $a > 0$  указанное в теореме семейство решений имеет вид

$$x = s \cos \sqrt{a} t - (\dot{\varphi}(0)/\sqrt{a}) \sin \sqrt{a} t + \varphi(t), \quad y = -s\sqrt{a} \sin \sqrt{a} t - \dot{\varphi}(0) \cos \sqrt{a} t + \dot{\varphi}(t),$$

где  $\varphi(t)$  – единственное  $2\omega$ -периодическое решение уравнения  $\ddot{x} + ax = e(t)$ ,  $x_0(s) = s + \varphi(0)$ .  
Функция

$$\psi(\omega; 0, x_0(s), 0, 0) \equiv -s\sqrt{a} \sin \sqrt{a}\omega - \dot{\varphi}(0) \cos \sqrt{a}\omega + \dot{\varphi}(\omega) \equiv -s\sqrt{a} \sin \sqrt{a}\omega - \dot{\varphi}(0) \cos \sqrt{a}\omega + \dot{\varphi}(\omega)$$

принимает значения разных знаков на концах любого отрезка, содержащего точку

$$s = [-\dot{\varphi}(0) \cos \sqrt{a}\omega + \dot{\varphi}(\omega)]/(\sqrt{a} \sin \sqrt{a}\omega).$$

Поэтому при  $a > 0$  выполнены все условия теоремы 1, а рассматриваемое уравнение второго порядка имеет при достаточно малых  $\varepsilon$  единственное  $2\omega$ -периодическое решение указанного в теореме вида. При  $a < 0$  условия теоремы также выполнены. Этот результат впервые доказан в [7]. Там же приведен пример использования его в механике.

**Пример 2.** Рассматриваем  $2\omega$ -периодическую по  $t$  систему

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1 + f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon), \quad \frac{dy_1}{dt} = -b^2 x_1 + f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = y_2 + f_3(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon), \quad \frac{dy_2}{dt} = ax_2 + e(t) + f_4(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon).$$

Будем считать, что для нее выполнены следующие условия:

- 1) число  $a$  и функция  $e(t)$  такие же, как и в примере 1;
- 2) для функций  $f_1, f_2, f_3, f_4$  справедливы тождества

$$\begin{aligned} &bf_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \cos 2bt - f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \sin 2bt + \\ &+ bf_1(-t, x_1 \cos 2bt - (y_1/b) \sin 2bt, x_1 b \sin 2t + y_1 \cos 2bt, x_2 - y_2, \varepsilon) \equiv 0, \\ &f_3(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) + f_3(-t, x_1 \cos 2bt - (y_1/b) \sin 2bt, x_1 b \sin 2t + y_1 \cos 2bt, x_2 - y_2, \varepsilon) \equiv 0, \\ &f_4(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \equiv f_4(-t, x_1 \cos 2bt - (y_1/b) \sin 2bt, x_1 b \sin 2t + y_1 \cos 2bt, x_2 - y_2, \varepsilon), \\ &f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \sin 2bt + f_2(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \cos 2bt + f_2(-t, x_1, y_1, x_2, y_2, \varepsilon) \equiv 0, \\ &f_i(t, x_1, y_1, x_2, y_2, 0) \equiv 0, \quad i = \overline{1, 4}; \end{aligned}$$

3) для некоторых постоянных  $A_k$ ,  $k = \overline{0, 4}$ , выполнено неравенство  $|f_1(t, x_1, y_1, x_2, y_2, 0)| \leq A_0 + A_1|x_1| + A_2|y_1| + A_3|x_2| + A_4|y_2|$ .

Тогда у этой системы имеется хотя бы одно  $2\omega$ -периодическое решение. Для доказательства достаточно заметить, что в данном случае

$$\Phi = (x_1 \cos 2bt - (y_1/b) \sin 2bt, x_1 b \sin 2bt + y \cos 2bt, x_1)^T,$$

а  $\psi(\omega; 0, x_{10}(s), y_{10}(s), x_{20}(s), 0, 0)$  такое же, как и в примере 1.

Рассмотрим теперь систему вида (3), считая  $y$  вектор-столбцом,  $y \in G \subset \mathbb{R}^m$ .

**Теорема 2.** Пусть для системы (3) с  $y \in G \subset \mathbb{R}^m$  выполнены условия 1) и 2) теоремы 1 и условие

3<sup>0</sup>) при  $\varepsilon = 0$  система (3) имеет семейство продолжимых на  $[0; \omega]$  решений  $x = \varphi(t; 0, x_0, 0, 0)$ ,  $y = \psi(t; 0, x_0, 0, 0)$ ,  $x_0 \in G_0$ , начинающихся при  $t = 0$  в ограниченной области  $G_0 \subset \mathbb{R}^m$ , для которого вращение векторного поля  $\psi(\omega; 0, x_0, 0, 0)$  на границе  $G_0$  не равно нулю.

Тогда система (3) при достаточно малых  $|\varepsilon|$  имеет хотя бы одно  $2\omega$ -периодическое решение вида

$$x = \varphi(t; 0, x_0, 0, \varepsilon), \quad y = \psi(t; 0, x_0, 0, \varepsilon). \quad (5)$$

**Доказательство.** 1. Точно так, как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в том, что решение вида (5) будет  $2\omega$ -периодическим тогда и только тогда, когда  $\psi(\omega; 0, x_0, 0, \varepsilon) \equiv 0$ .

2. Пусть  $\Gamma$  – граница  $G_0$ , а  $\gamma(\varepsilon)$  – вращение векторного поля  $\psi(\omega; 0, x_0, 0, \varepsilon)$  на  $\Gamma$ . Из условий теоремы следует, что  $\gamma(\varepsilon)$  – непрерывная и целочисленная функция  $\varepsilon$ . Так как, кроме того, по условию теоремы  $\gamma(0) \neq 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon$  будет также выполняться неравенство  $\gamma(\varepsilon) \neq 0$ . Тогда, согласно теореме 4.2 из [8, с. 20], рассматриваемое векторное поле будет равняться нулю хотя бы в одной точке  $G_0$ . Поэтому, согласно первому пункту, теорема доказана.

Примером к данной теореме может служить система  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x + f(t, x, y, \varepsilon)$ , где  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $y \in \mathbb{R}^2$ , а  $f$  –  $2\omega$ -периодическая,  $\omega \notin \mathbb{N}$ , непрерывно дифференцируемая функция, для которой выполнены условия  $f(t, x, y, 0) \equiv 0$  и  $f(-t, x, -y, \varepsilon) \equiv f(t, x, y, \varepsilon)$ . Здесь в качестве соответствующего семейства решений можно взять семейство, для которого  $y_1 = x_0 \sin t$ ,  $y_2 = x_0 \cos t$ ,  $x_0^T = (x_{10}, x_{20})$ ,  $x_{10}^2 + x_{20}^2 \leq 1$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
2. Мироненко В.И. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1636–1641.
3. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.
4. Митропольский Ю.В., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., 1973.
5. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М., 1987.
6. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1960.
7. Muracchini A., Colafranceschi. // Riv. Mat. Univ. Parma. 1983. V. 4. № 9. P. 339–349.
8. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.

Гомельский государственный университет  
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию  
31.08.2002 г.