

**Экзаменационные тесты по ТФКП
для студентов 3-го курса
Вариант I**

I. Ответьте на вопросы (за все задание 18 баллов, за каждое по 2 балла)

1. Комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда $\arg z = \underline{-\frac{\pi}{3}}$.
2. Комплексное число $z = \sqrt{3} - i$. Тогда $|z| = \underline{2}$.
3. В алгебраической форме комплексное число $\frac{1-i}{1+i}$ имеет вид $\underline{-i}$.
4. В показательной форме комплексное число $1 - i$ представимо в виде $\underline{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$.
5. Аргумент комплексного числа $(1+i)^{16}$ равен $\underline{0}$.
6. Модуль комплексного числа $(1+i)^8$ равен $\underline{16}$.
7. Значение корня $w_k = \sqrt[4]{1-i}$, $k = 0, 1, 2, 3$, $-\frac{\pi}{2} < \arg w_k < 0$ равно $\underline{\sqrt[8]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}}$.
8. Расстояние между точками $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 1 + 2i$ равно $\underline{\sqrt{2}}$.
9. Решением уравнения $|z| + z = 2 + i$ является $\underline{\frac{3}{4} + i}$.

II. Решите следующие задачи (за все задание 18 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Функция $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ равна $\underline{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}}$.
2. Если $z = x + iy$, то $|e^z|$ равен $\underline{e^x}$.
3. Значениями $\operatorname{Ln} i$ являются $\underline{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Значениями i^i являются $\underline{e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. Все значения $\operatorname{Arcth} 2$ образуют множество $\underline{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Решением уравнения $\sin z = 2$ является множество $\underline{\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \cdot \pi - i \ln \left|1 \pm \sqrt{3}\right|}$.

III. Выберите правильный вариант ответа (за все задание 12 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Какая функция является аналитической в $\mathbb{C}$?: (C).
(A) $z + \bar{z}$ (B) $z + |z|$ (C) $z^2 + 2z$ (D) $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$
2. Какая функция является гармонической в $\mathbb{C}$?: (C).
(A) $x^2 + y^2$ (B) $x^2 + 2y^2$ (C) xy (D) $x^2 - 2y$
3. Значение $\cos(iz)$ равно: (A).
(A) $\cosh z$ (B) $\sinh z$ (C) $i \sin z$ (D) $i \cos z$
4. Функция $f = u + iv$, $f(0) = 0$ является аналитической в $\mathbb{C}$, $v = xy$. Тогда f : (D).

(A) z^2 (B) z^3 (C) $2z^2$ (D) $z^2/2$

IV. Решить задачи (за все задание 20 баллов, за каждое по 5 баллов)

1. С помощью формулы Коши $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$ вычислить интеграл $\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2 + 1)}$

Здесь $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, $z_0 = 0 \Rightarrow \int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2 + 1)} = 2\pi i f(0) = 2\pi i$

2. Функцию $\frac{1}{z+2}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0 = 1$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3+z-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$$

3. Функцию $\frac{1}{z(z-1)}$ разложить в ряд Лорана в кольце $K = \{z: 0 < |z| < 1\}$

При $|z| < 1$ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow \frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$

4. Вычислить $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+1}{z(z-1)}$

Так как $\frac{1}{f(z)} = \frac{z(z-1)}{z+1} \Rightarrow z=0$ — полюс 1-го порядка,

$\varphi(z) = z+1$, $\psi(z) = z(z-1) \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = -1$

V. Решить задачи (за все задание 24 баллов, за каждое по 6 баллов)

С помощью теории вычетов вычислить интегралы:

а) $\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, б) $\int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz$ в) $\int_0^{2\pi} \frac{dz}{4 + \cos x}$ г) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

а) $\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} = 2\pi i \left[\frac{e^z}{(z^2-9)} \right]_{z=0}^{(1)} = -\frac{2\pi i}{9}$

$$\text{б) } \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^3} + \dots \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 2\pi i$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dz}{4 + \cos x} &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{4 + \frac{z+z^{-1}}{2}} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{8 + z + z^{-1}} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 8z + 1} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=-4+\sqrt{15}} \frac{1}{z^2 + 8z + 1} = \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{2z+8} \right]_{z=-4+\sqrt{15}} = \frac{2\pi\sqrt{15}}{15} \end{aligned}$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{x^2+1} = \pi i \left[\frac{1}{z-i} \right]_{z=i}^{(1)} = \frac{\pi}{4}$$

VI. Решить задачи (за все задание 8 баллов, за каждое по 4 баллов)

1. С помощью вычетов разложить на простые дроби $\frac{z-3}{z^3-z}$

$$\frac{z-3}{z^3-z} = \frac{z-3}{z(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1},$$

$$A = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z-3}{z^3-z} = 3, \quad B = \operatorname{Res}_{z=1} \frac{z-3}{z^3-z} = -1, \quad C = \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z-3}{z^3-z} = -2$$

2. С помощью теоремы Руше определить число корней уравнения $z^4 - 3z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1$.

Полагаем $\psi(z) = -3z$, $\varphi(z) = z^4 + 1$. Тогда при $|z| = 1$, $|\psi(z)| = 3 > 2 = |z|^4 + 1 \geq |\varphi(z)|$.

Так как число нулей $\psi(z)$ в круге $|z| < 1$ равно 1, то по теореме Руше наше уравнение имеет один корень. Ответ: 1.