

Контрольная работа по ТФКП  
3 курс математический факультет

Расчёт номера варианта контрольной работы:

Всего вариантов – 5.

Номер по списку в журнале следует разделить на 5. К остатку в результате деления прибавить 1.

Пример: порядковый номер в журнале – 11.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ - & \\ \hline 10 & 2 \\ 1(\text{ост.}) & \end{array}$$

$1+1=2$  – второй вариант.

№ варианта	№ задания														
	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71
1	1	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72
2	2	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	73
3	3	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74
4	4	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

В задачах 1-5 требуется выяснить, какие линии заданы указанными уравнениями, и изобразить эти линии на чертежах.

1.  $z=i+2e^{it}$ , ( $3\pi \leq t \leq 5\pi$ ).
2.  $z=it+2$ , ( $-\infty < t < \infty$ ).
3.  $z=(1+i)t^2+i$ , ( $-\infty < t < \infty$ ).
4.  $z=1/t+it$ , ( $-\infty < t < \infty$ ).
5.  $z=(1-i)t+i$ , ( $-\infty < t < \infty$ ).

В задачах 6-10 найти и изобразить на чертеже линии, заданные указанными уравнениями.

6.  $\left| \frac{z-1}{z+3} \right| = 1$ .
7.  $|z-2| + |z+2| = 4$
8.  $|z-2| + |z+2| = 6$ .
9.  $|z-2| + |z+2| = 1$ .
10.  $|z-2| - |z+2| = 1$ .

В задачах 11-15 требуется выделить действительную и мнимую части каждой из указанных функций.

11.  $w = z^2 + az + b$ , ( $a, b$  – действительные числа).

12.  $w = z^2 - 1/z^2$ .

13.  $w = \bar{z}^2 + |z|^2$ .

14.  $w = e^{i\alpha} z + e^{i\beta} \bar{z}$ , ( $\alpha, \beta$  – действительные числа).

15.  $w = \frac{z + I}{z - i}$ .

В задачах 16 – 20 требуется установить, имеют ли данные функции предел в указанных точках; если предел существует, найти его.

16.  $w = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$ ,  $z = 0$ .

17.  $w = \frac{|z|}{z}$ ,  $z = 0$ .

18.  $w = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ,  $z = 0$ ,

19.  $w = \frac{|z|}{z}$ ,  $z = 0$ .

20.  $w = \frac{z}{z-i}$ ,  $z = \infty$ .

В задачах 21 – 25 требуется выяснить, в каких точках комплексной плоскости имеют производную указанные функции. Чему равна производная в каждой из этих точек? Являются ли данные функции аналитическими в каких-нибудь точках плоскости?

21.  $w = z^2 + i|z|^2$ .

22.  $w = 1/z$ .

23.  $w = x^2 + iy^2$ .

24.  $w = yx + i(x^2 - y^2)$ .

25.  $w = \operatorname{tg} y - i \operatorname{tg} x$ .

В задачах 26 -28 выяснить, существует ли аналитическая функция  $f(z)$ , у которой:

26.  $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$ ;

27.  $\operatorname{Im} f(z) = xy$ ;

28.  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  ?

В задачах 29-30 проверить, являются ли указанные функции гармоническими.

29.  $x^2 + y^2$ .

30.  $\frac{x}{x^2 + y^2}$ .

В задачах 31-35 найти аналитические функции  $f(z) = u + iv$  по заданной действительной или мнимой части:

31.  $u(x,y) = e^x \sin y$ ;

33.  $u(x,y) = \frac{x^2 - x + y^2}{x^2 + y^2}$ ;

32.  $u(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$ ;

34.  $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ ;

35.  $u(x,y) = 3x^2y - y$ ,  $f(0) = 0$ .

В задачах 36-40 вычислить логарифмы следующих чисел и изобразить на чертеже несколько значений логарифма:

36.  $i$ .

38.  $-i$ .

40.  $5$ .

37.  $1 - i\sqrt{3}$ .

39.  $1 + i\sqrt{3}$ .

В задачах 41 -45 найти все значения указанных степеней. Ответ записать в показательной форме. Значение, отвечающее  $k = 0$ , записать в алгебраической форме, вычислив действительную и мнимую части с двумя верными десятичными знаками.

41.  $1^{-i}$

43.  $(1 - i)^{i-1}$

44.  $(1 + i)^i$

42.  $i^i$

45.  $1^i$

В задачах 46-50 найти взаимно-однозначное конформное отображение данной области на полуплоскость  $Im w > 0$ . Выполнить чертёж.

46. Верхняя полуплоскость с разрезом вдоль отрезка мнимой оси  $[0, ih]$  (рис. 1)

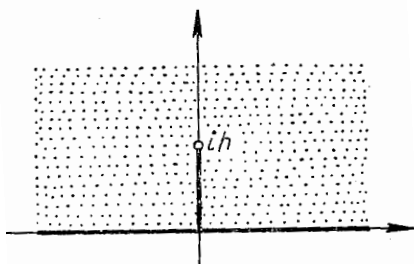


Рис. 1

47. Полуокруг  $|z| < 1, \text{Im } z > 0$  (рис.2)

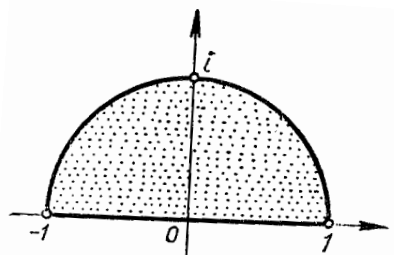


Рис. 2

48. Полоса с вырезом (рис 3)

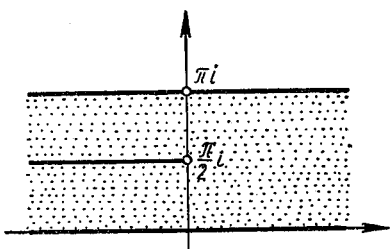


Рис. 3

49. Луночка (рис. 4)

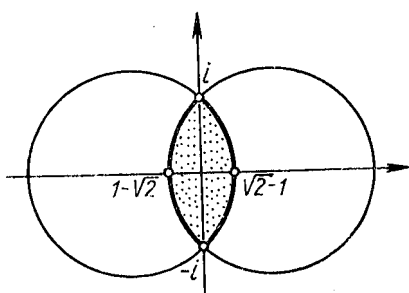


Рис. 4

50. Верхняя полуплоскость с вырезанным полуокругом (рис. 5)

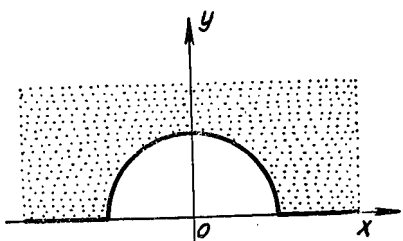


Рис. 5

В задачах 51-60 найти круг сходимости каждого из данных степенных рядов.

$$51. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(2+i)^n}.$$

$$52. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}.$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot z^n}{n^n}.$$

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^n.$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}.$$

В задачах 56-60 вычислить указанные интегралы

$$56. \int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z+1| = 1/2$$

$$57. \int_C \frac{e^z dz}{z^2-1}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z| = 2$$

$$58. \int_C \frac{\operatorname{sh} z dz}{z(z+\pi i/4)}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z| = 1$$

$$59. \int_C \frac{(z^2+5z-4) dz}{(1-z)^3}, \quad \text{где } C - \text{эллипс } x^2/4 + y^2/2 = 1$$

$$60. \int_C \frac{e^z dz}{z(z-1)^2}, \quad \text{где } C - \text{окружность } |z-1| = 1/2$$

В задачах 61-64 разложить данные функции в ряд Лорана в указанных кольцах.

$$61. \frac{z}{(z-i)(z+3)}, \quad 1 < |z| < 3$$

$$63. z^3 e^{1/z}, \quad 0 < |z| < \infty$$

$$62. \frac{1}{z(1-z)}, \quad 0 < |z| < 1$$

$$64. \frac{3}{z^2+z-2}, \quad 1 < |z| < 2$$

65. Найти все возможные разложения в ряд Лорана по степеням следующей функции

$$\frac{1}{z^2 - 4z + 3}, \alpha=1$$

В задачах 66 -70 вычислить указанные определённые интегралы.

$$66. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \cos\varphi/3}.$$

$$69. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 + \cos\varphi}.$$

$$67. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 + 2 \sin\varphi}.$$

$$70. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos\varphi)^2}.$$

$$68. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 3 \sin\varphi)^2}.$$

В задачах 71 -75 вычислить несобственные интегралы, используя сведения из теории вычетов.

$$71. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

$$72. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$73. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2) dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$74. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$75. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{9 + x^2} dx.$$