В. И. Мироненко, Метод отражающей функции для краевых задач, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 6, 774–779

1996. Т. 32, № 6. С. 774 — 779

УДК 517.925.5

МЕТОД ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В. И. Мироненко

В настоящей работе излагается методика применения отражающей функции [1, 2] к изучению двухточечных и обобщенных [3] краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваем систему

$$dx/dt = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\tau \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью и общим решением в форме Коши $\varphi(t; t_0, x_0)$.

Приведем необходимые нам сведения из работы [1].

1) Отражающей функцией (ОФ) системы (1) называется функция $F(t,x) := \varphi(-t; t, x)$, определенная в некоторой симметричной по t области пространства (t,x), содержащей гиперплоскость $t = 0$.

2) Для каждого решения $x(t)$ системы (1) с ОФ $F(t,x)$, определенного на симметричном промежутке $]-\alpha; \alpha[$, верно тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$.

3) Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является ОФ для (1) тогда и только тогда, когда выполняется основное соотношение $\partial F/\partial t + (\partial F/\partial x) X(t,x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x$. (Это напоминает ситуацию с интегрирующим множителем. В [1] приведены случаи, когда ОФ явно находится для неинтегрируемых в квадратурах систем.)

4) Всякая дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая тождествам $x \equiv F(0,x) \equiv \equiv F(-t, F(t,x))$, является ОФ для целого класса систем вида $dx/dt = -2^{-1}(\partial F/\partial x)^{-1} \partial F/\partial t + +(\partial F/\partial x)^{-1} R(t,x) - R(-t, F)$, где R — произвольная непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Этими системами исчерпывается множество всех систем, ОФ которых совпадает с F или ее сужением.

Рассмотрим теперь задачу отыскания решений $x(t)$ системы (1), удовлетворяющих условию

$$\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0 \tag{2}$$

или условию

$$\int\limits_0^\omega V(t, x(t), x(-t))\, dt = 0. \tag{3}$$

Заменой $\tau = t - (\alpha + \beta)/2$ к задаче (1), (2) сводится любая двухточечная задача вида $\Phi(x(\beta), x(\alpha)) = 0$, а к задаче (1), (3) — любая задача вида $\Phi(x(\beta), x(\alpha)) + \int\limits_\alpha^\beta K(t, x(t))\, dt = 0$, если после указанной замены условие (3) записать в виде

$$\int\limits_0^\omega \Big[K(t, x(t)) + K(-t, x(-t)) + \frac{d}{dt}\Big(\psi(t) \Phi(x(t), x(-t))\Big)\Big]\, dt = 0,$$

где $\psi(t)$ — любая дифференцируемая функция, для которой $\psi(0) = 0, \quad \psi(\omega) = 1$, а $\omega = = (\beta - \alpha)/2$, при этом Φ считаем непрерывно дифференцируемой функцией.

1. Рассмотрим вначале случай, когда для системы (1) удается найти ОФ $F(t,x)$. Учитывая второе свойство ОФ, решение краевой задачи (1), (2) сведем к решению "алгебраической"

системы $\Phi(x(\omega), F(\omega, x(\omega))) = 0$. При этом решение $\varphi(t;\omega,x_0)$ будет решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда оно продолжимо на $[-\omega,\omega]$ и $\Phi(x_0, F(\omega, x_0)) = 0$. Продолжимость решения исследуется обычными методами. Это можно сделать и с помощью ОФ. В том случае, например, когда продолжимость решения $x(t)$ на $[0,\omega]$ (или $[-\omega,0]$) устанавливается из других соображений, формула $x(-t) \equiv F(t, x(t))$ позволяет убедиться в продолжимости или непродолжимости рассматриваемого решения на $[-\omega,0]$ (или $[0,\omega]$).

Введем обозначения:

$$A(\xi,\eta,v) = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ v & -\xi \end{pmatrix}; \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

В качестве первого примера рассмотрим систему

$$dx/dt = a\,A(\cos t, \sin t, \sin t)\,x, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Лемма 1. *ОФ системы (4) задается формулой*

$$F(t,x) = \Big(U(t+\pi/2) + A(-2a,0,0)\Big)\lambda^{-1}x\ \mathrm{sh}\lambda t + U(t)\,x\ \mathrm{ch}\lambda t,$$

где $\lambda = \sqrt{4a^2-1}$.

Эта формула верна как при действительных, так и при комплексных λ. При $\lambda = 0$ выражение $\mathrm{sh}\lambda t/\lambda$ следует заменить на t, а $\mathrm{ch}\lambda t$ — на 1.

Доказательство состоит в проверке основного соотношения для ОФ.

Будем искать периодические решения системы (4). Их период может быть равен $T_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Из определения ОФ и леммы 1 следует

Лемма 2. *Матрица M_n оператора монодромии $x \mapsto \varphi(n\pi; -n\pi, x) \equiv F(-n\pi, x)$ для системы (4) задается формулой*

$$M_n = A(2a, (-1)^n, (-1)^{n+1})\lambda^{-1}\mathrm{sh}\lambda n\pi + (-1)^n E\ \mathrm{ch}\lambda n\pi.$$

Эта формула также верна как при действительных, так и при комплексных λ.

Утверждение. *Система (4) имеет отличные от нулевого периодические решения тогда и только тогда, когда для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$ верно равенство $1-4a^2 = (k/m)^2$, при этом все решения системы (4) являются периодическими. Система (4) устойчива неасимптотически при $1-4a^2 > 0$ и неустойчива при $1-4a^2 \le 0$ и ее показатели определяются формулой $\pm 0,5\sqrt{4a^2-1}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2, начальные данные периодических решений системы (4) находятся из системы $M_n x = x$, а мультипликаторы [4, с. 183 — 193] — из уравнения $|M_n - \rho E| = 0$ и равны $\rho_{1,2} = (-1)^n \mathrm{ch}\lambda n\pi \pm \mathrm{sh}\lambda n\pi$, откуда и следует справедливость утверждения.

Теорема 1. *Всякая система вида*

$$dx/dt = aA(\cos t, \sin t, \sin t)x + \varepsilon A(\varphi(t), \mu(t), \nu(t)) \tag{4'}$$

с непрерывными и 2π-периодическими функциями φ, μ, ν при достаточно малых ε неустойчива при $1-4a^2 < 0$ и устойчива при $1-4a^2 > 0$, но $1-4a^2 \ne n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как след матрицы системы (4′) равен нулю, то оператор монодромии $x \mapsto \varphi(\pi; -\pi, x) =: A(\varepsilon)x$ этой системы сохраняет площадь. Поэтому [5, с. 210] система (4′) будет устойчива, если $|\mathrm{tr}A(\varepsilon)| < 2$, и неустойчива, если $|\mathrm{tr}A(\varepsilon)| > 2$. Так как $|\mathrm{tr}A(0)| = |\mathrm{tr}M_1| = 2|\mathrm{ch}\lambda\pi|$, то при $1-4a^2 < 0$ λ действительно и $|\mathrm{tr}A(0)| > 2$, а при $1-4a^2 > 0$, $1-4a^2 \ne n^2$ имеем $|\mathrm{tr}A(0)| = 2|\cos\pi\sqrt{1-4a^2}| < 2$. В силу теоремы о непрерывной зависимости от параметра эти неравенства будут сохраняться и при достаточно малых ε, откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Различными заменами переменных к системе (4) сводятся и другие системы. Если система $\dot{y} = Q(t)y$ заменой $y = S(t)x$ сводится к системе с ОФ $F(t)x$, то ОФ первой системы есть $S(-t)F(t)S^{-1}(t)y$. К системе (4) заменой

$$y = U(-\alpha t)x$$

сведется система

$$dy/dt = \Big(aA(\cos t_1, \sin t_1, \sin t_1) + \dot{\alpha}(t)J_2\Big)y,$$

где $t_1 = t + 2\alpha(t)$, J_2 — симплектическая клетка. Вообще система вида

$$dy/d\tau = \Big((a_0 + a_1 \sin\tau + a_2\cos\tau)E + a_3A(\cos\tau, \sin\tau, \sin\tau) + a_4J_2\Big)y$$

с постоянными a_k, $k = \overline{0;4}$, заменой $y = U(-a_4\tau)x\exp(a_0\tau + a_1\cos\tau + a_2\sin\tau)$, $t = (1-2a_4)\tau$ приводится к системе (4) с $a = a_3/(1-2a_4)$. Поэтому ОФ этой системы можно выписать в элементарных функциях, а ее мультипликаторы за период $T_n = 2n\pi$ суть $\rho_{1,2} = (-1)^n \mathrm{ch}\lambda n\pi \pm \pm \mathrm{sh}\lambda n\pi$, где $\lambda = \sqrt{4a_3^2 - (1-2a_4)^2}/|1-2a_4|$.

Задача (3) при известной ОФ $F(t,x)$ заменяется задачей $\int\limits_0^\omega V(t, x(t), F(t, x(t)))\,dt = 0$, что может облегчить ее решение.

Теорема 2. *Все продолжимые на* $[-\omega,\omega]$ *решения уравнения*

$$dx/dt = m(t)x^2 + xm(t)\beta(t)\sin t + m(t) + \beta(t)\cos t$$

с непрерывными и нечетными $m(t) - 0,5$ *и* $\beta(t)$ *удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega} \frac{a(t) + b(t)(x\sin t + \cos t)^2}{1 + (x\sin t + \cos t)^2}\,dt = \int\limits_0^{\omega} (a(t) + b(-t))\,dt,$$

если только $a(t) + b(-t)$ *— четная функция. Если же* $a(t) + b(-t)$ *— произвольная непрерывная положительная на* $[-\omega,\omega]$ *функция, то интеграл, стоящий слева в интегральном равенстве, положителен.*

Для доказательства достаточно представить рассматриваемый интеграл в виде (3) и воспользоваться вторым свойством ОФ, определяемой равенством $F(t,x) = (x\cos t - \sin t)/(x\sin t + \cos t)$, в чем можно убедиться, проверив основное соотношение для ОФ.

2. Для некоторых дифференциальных систем удается установить структуру ОФ, что облегчает их исследование. В качестве примера рассмотрим систему

$$dx/dt = P(t)x + \alpha(t, x^{\mathrm{T}}y)x, \quad dy/dt = \gamma(t)y - P^{\mathrm{T}}(-t)y + \beta(t, x^{\mathrm{T}}y)y \tag{5}$$

с непрерывной $n\times n$-матрицей P и нечетными по t скалярными функциями α, β, γ, при которых решения этой системы однозначно определяются своими начальными условиями. (Здесь т означает транспонирование.)

Лемма 3. *ОФ системы (5) имеет вид*

$$F(t,x,y) = \mathrm{diag}(F(t), F^{\mathrm{T}}(-t))(x,y)^{\mathrm{T}} = (F(t)x, F^{\mathrm{T}}(-t)y)^{\mathrm{T}},$$

где $F(t)x$ *— ОФ системы* $dx/dt = P(t)x$ *и, значит,* $\dot{F} + FP(t) + P(-t)F \equiv 0$, $F(0) = E$.

Доказательство состоит в проверке основного соотношения для ОФ.

Теорема 3. *Пусть для постоянных* $n\times n$*-матриц* A, B, C, D *квадратичная форма* $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Cx + y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Dy + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Dy + y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Bx - x^{\mathrm{T}}y$ *положительно (отрицательно) определена. Тогда при любых постоянных векторах* a, b *задача*

$$x(-\omega) = Ax(\omega) + By(\omega) + a, \quad y(-\omega) = Cx(\omega) + Dy(\omega) + b \tag{6}$$

для системы (5) имеет единственное решение, если только все решения этой системы продолжимы на $[-\omega,\omega]$.

Доказательство. Согласно второму свойству ОФ, решение $x(t), y(t)$ системы (5) будет удовлетворять условию (6) тогда и только тогда, когда $F(\omega)x(\omega) = Ax(\omega) + By(\omega) + a$, $F^{\mathrm{T}}(-\omega)y(\omega) = Cx(\omega) + Dy(\omega) + b$. Эта линейная относительно $x(\omega), y(\omega)$ система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система $F(\omega)x = Ax + By$, $F^{\mathrm{T}}(-\omega)y = Cx + Dy$ имеет только нулевое решение. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что последнее имеет место. В самом деле, для любого решения этой системы $x^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(\omega)F^{\mathrm{T}}(-\omega)y = [F(\omega)x]^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(-\omega)y = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Cx + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Dy + y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Cx + y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Dy$, откуда следует равенство $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Cx + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Dy + y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Cx + y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Dy - x^{\mathrm{T}}y = 0$, из которого в силу условий теоремы получаем $x = y = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Так как для системы (5) $x^{\mathrm{T}}(-t)y(t) \equiv [F(t)x(t)]^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(-t)y(t) \equiv x^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t) \times F^{\mathrm{T}}(-t)y(t) \equiv x^{\mathrm{T}}(t)y(t)$, то

$$\int_{-\omega}^{\omega} K(t, x^{\mathrm{T}}(t)y(t))\,dt = \int_{0}^{\omega} [K(t, x^{\mathrm{T}}(t)y(t)) + K(-t, x^{\mathrm{T}}(t)y(t))]\,dt.$$

Воспользовавшись этим равенством, можно вынести суждения и о решениях обобщенных краевых задач для системы (5).

Теорема 4. *Задача* $dx/dt = P(t)x + \alpha(t)y$, $dy/dt = P(t)y + \gamma(t)y + \beta(t)x$; $\Phi_1(x(\omega), x(-\omega)) = 0$, $\Phi_2(y(\omega), y(-\omega)) = 0$, *где* P *— непрерывная* $n \times n$*-матрица, а скалярные непрерывные функции* α, β, γ *нечетны, разрешима тогда и только тогда, когда для системы* $dx/dt = P(t)x$ *разрешимы как задача* $\Phi_1(x(\omega), x(-\omega)) = 0$, *так и задача* $\Phi_2(x(\omega), x(-\omega)) = 0$.

Доказательство теоремы следует из того, что ОФ рассматриваемой системы имеет вид $(F(t)x, F(t)y)^{\mathrm{T}}$, где $F(t)x$ есть ОФ системы $dx/dt = P(t)x$, в чем можно убедиться, проверив основное соотношение для ОФ.

Теорема 5. *Пусть система (1) имеет линейную ОФ* $F(t,x) = F(t)x$, *для которой* $\det[A + BF(\omega)] \neq 0$, *где* A *и* B *— некоторые постоянные* $n \times n$*-матрицы. Тогда для достаточно малых* ε *краевая задача* $dx/dt = X(t,x) + \varepsilon Y(t,x)$, $Ax(\omega) + Bx(-\omega) = 0$, *где* X *и* Y *— непрерывно дифференцируемые функции, имеет хотя бы одно решение, если только решения рассматриваемой дифференциальной системы продолжимы на* $[-\omega, \omega]$.

Доказательство. Пусть $\psi(t; t_0, x_0, \varepsilon)$ — решение исследуемой системы, которое в силу теоремы о непрерывной зависимости от параметра можно представить в виде $\psi(t; t_0, x_0, \varepsilon) = \varphi(t; t_0, x_0) + \alpha(t, t_0, x_0, \varepsilon)$, где φ — решение системы (1), а $\alpha \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому ОФ нашей системы $\Phi(t, x, \varepsilon) = \psi(-t; t, x, \varepsilon) = F(t)x + \alpha(-t, t, x, \varepsilon)$, а уравнение для определения начальных данных $x(\omega) = x$ решений изучаемой краевой задачи будет иметь вид $Ax + BF(\omega)x + B\alpha(-\omega, \omega, x, \varepsilon) = 0$. Применением к этому уравнению теоремы о неявной заданной функции завершаем доказательство теоремы.

3. В тех случаях, когда не удается найти ОФ, можно попытаться установить некоторые неравенства, связывающие $F(\omega, x)$ и x, которые могут оказаться полезными [2]. Следует при этом иметь в виду, что ОФ системы (1) задает интегральное многообразие $\bar{x} = F(t,x)$ системы

$$dx/dt = X(t,x), \quad d\bar{x}/dt = -X(-t, \bar{x}), \tag{7}$$

содержащее плоскость $t = 0$, $\bar{x} = x$.

Доказательство следующей теоремы не вызовет затруднений, если учесть, что для всякого решения $x(t)$, $\bar{x}(t)$ системы (7), для которого $\bar{x}(0) = x(0)$, функция $x(t)$ — решение системы (1), а $\bar{x}(t) \equiv x(-t)$.

Теорема 6. *Пусть для непрерывно дифференцируемой функции* V *при всех* $t \in [0; \omega[$ $(t \in]0; \omega[)$ *и* x, $\bar{x}$, *удовлетворяющих условию* $V(t, x, \bar{x}) = 0$, *справедливо неравенство*

$$\frac{dV}{dt} := \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}X(t,x) - \frac{\partial V}{\partial \bar{x}}X(-t, \bar{x}) > 0.$$

Тогда $V(t, x(t), x(-t)) > 0$ *при всех* $t \in]0; \omega]$ $(t \in [0; \omega])$, *если только* $V(0, x(0), x(0)) \geq 0$ (> 0), *в частности* $V(\omega, x(\omega), x(-\omega)) > 0$.

Пример 1. Пусть $\alpha(t)$ — нечетная непрерывная функция, а непрерывные функции $a(t)$, $b(t)$ при $t \in]0;\omega[$ удовлетворяют неравенствам $a(t)-a(-t)>0$, $b(t)-b(-t)>0$. Тогда для любого продолжимого на $[-\omega,\omega]$ решения $x(t)$, $x(0)>0$, уравнения $\dot{x}=a(t)+\alpha(t)x+$ $+b(t)x^2$ выполнено неравенство $\int\limits_{-\omega}^{\omega} x(t)\,dt>0$. Для доказательства заметим, что $\int\limits_{-\omega}^{\omega} x(t)\,dt=$ $=\int\limits_0^{\omega}[x(t)+x(-t)]\,dt$. Если положить $V=x+\bar{x}$, то в рассматриваемом случае $dV/dt\,|_{V=0}=$ $=(a(t)-a(-t))+(b(t)-b(-t))x^2>0$ при $t\in]0;\omega[$. Тогда по утверждению теоремы 6 справедливо неравенство $V>0$, а значит, и доказываемое неравенство. Отсюда следует, в частности, что если рассматриваемое уравнение Риккати имеет отрицательное на $[-\omega,\omega]$ решение, то задача $\int\limits_{-\omega}^{\omega} x(t)\,dt=0$ однозначно разрешима при некотором $x(0)<0$.

Пример 2. Пусть для скалярного уравнения (1) при произвольном $x\in\mathbb{R}$ и $t\in[0;\omega]$ выполняется неравенство $X(t,x)+X(-t,x)>0$. Тогда для любого продолжимого на $[-\omega,\omega]$ решения $x(t)$ уравнения (1) выполнено неравенство $\int\limits_{-\omega}^{\omega}\varphi(t)x(t)\,dt>0$, какова бы ни была непрерывная нечетная функция $\varphi(t)$, положительная при $t\in]0;\omega[$. Для доказательства этого факта положим $V=x-\bar{x}$, применим теорему 6 и учтем, что

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega}\varphi(t)x(t)\,dt=\int\limits_0^{\omega}\varphi(t)(x(t)-x(-t))\,dt=\int\limits_0^{\omega}\varphi(t)V(t)\,dt.$$

Теорема 7. *Пусть при некотором $x(0)$ функция $V(t,x,\bar{x})$ и система (1) удовлетворяют условиям теоремы 6 и для некоторого x_1 выполнено неравенство $V(0,x_1,x_1)>0$. Пусть также для системы (1) разрешима двухточечная краевая задача $V(\omega,x(\omega),x(-\omega))=0$. Тогда для системы (1) разрешима и обобщенная задача*

$$\int\limits_0^{\omega}V(t,x(t),x(-t))\,dt=0.$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение указанной в условии теоремы двухточечной задачи. Тогда, поскольку для $V(t):=V(t,y(t),y(-t))$ верно неравенство $dV/dt>0$ и $V(\omega)=$ $=0$, $V(t)<0$ при всех $t\in[-\omega,\omega[$, поэтому $\int\limits_0^{\omega}V(t)\,dt<0$. Это значит, что непрерывная относительно x_0 функция $U(x_0):=\int\limits_0^{\omega}V\Big(t,\varphi(t;0,x_0),\varphi(-t;0,x_0)\Big)\,dt$ принимает отрицательное значение при $x_0=y(0)$. Так как, согласно теореме 6, $U(x_1)>0$, то U принимает как положительные, так и отрицательные значения, а следовательно, для некоторого x_0 верно $U(x_0)=0$. Теорема доказана.

Замечание. Условие разрешимости краевой задачи в теореме 7 можно заменить условием существования решения $\varphi(t)$ системы (1), для которого

$$\int\limits_0^{\omega}V(t,\varphi(t),\varphi(-t))\,dt<0.$$

4. В случае, когда удается установить эквивалентность [1, с. 21] системы (1) некоторой системе $\dot{y}=Y(t,y)$ (т. е. доказать совпадение ОФ этих систем), решение краевой задачи (1), (2) будет при $t=\omega$ иметь те же начальные данные, что и решение задачи (2) для системы $\dot{y}=Y(t,y)$. Для доказательства эквивалентности двух систем достаточно установить совместность системы, состоящей из двух основных соотношений. Соответствующим примером служит

Теорема 8. *Пусть для непрерывной $P(t)$ и дифференцируемой $\Delta(t)$ $n\times n$-матриц существуют нечетные скалярные непрерывные функции $\alpha_k(t)$, $k=\overline{0,m}$, для которых*

$$\frac{d\Delta}{dt}=P\Delta-\Delta P+\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\Delta^k.$$

Тогда, какова бы ни была нечетная непрерывная скалярная функция $\alpha(t)$, системы

$$dx/dt = P(t)x, \qquad dy/dt = [P(t) + \alpha(t)\Delta(t)]y \tag{8}$$

имеют одну и ту же ОФ.

Для доказательства заметим, что в данном случае ОФ линейны. Пусть $F(t)x$ — ОФ первой системы из (8). Покажем вначале, что $F\Delta = \bar{\Delta}F$, т. е. что $V := F\Delta - \bar{\Delta}F \equiv 0$, где $\Delta = \Delta(t)$, $\bar{\Delta} = \Delta(-t)$. Для этого заметим, что V удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV}{dt} = -\bar{P}V - VP + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} \bar{\Delta}^i V \Delta^{k-i}$$

и начальному условию $V(0) = 0$. Отсюда в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши и следует тождество $V(t) \equiv 0$. Для завершения доказательства теоремы остается только проверить выполнение основного соотношения для функции $F(t)x$ и второй системы из (8), что легко сделать, воспользовавшись равенством $F\Delta = \bar{\Delta}F$.

Литература

1. *Мироненко В. И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
2. *Мироненко В. И.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С. 984 — 991.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию
22 октября 1994 г.