В. И. Мироненко, Отражающая функция и интегральные многообразия дифференциальных систем, *Дифференц. уравнения*, 1992, том 28, номер 6, 984–991

$= \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$, $D(p)A_1 = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Уравнение (7.4) принимает вид (обозначим: $x = \mathrm{col}\,[x^1, x^2]$, $x^1_{t_3-h} = \chi$; $u_{t_3} = \vartheta_1$, $u_{t_3+h} = \vartheta_2$)

$$\vartheta_2^{(4)}(\tau) + \vartheta_1^{(3)}(\tau) + \chi^{(3)}(\tau) = 0, \quad \tau \in H^-. \tag{7.8}$$

Условия (7.5) таковы:

$$\vartheta_2(0) = 0;$$
$$\dot{\vartheta}_2(0) + \vartheta_1(0) = \vartheta_2(-h);$$
$$\vartheta_2^{(i)}(0) + \vartheta_1^{(i-1)}(0) = \vartheta_2^{(i-1)}(-h) + \vartheta_1^{(i-2)}(-h), \quad i = \overline{2, 4}. \tag{7.9}$$

Решая (7.8), (7.9), получаем

$$u_{t_3}: \int_{-h}^{0} u_{t_3}(\tau)\,d\tau + \int_{-h}^{0} x^1_{t_3-h}(\tau)\,d\tau + x^1(t_3 - h) = 0;$$

$$u_{t_3+h}(\tau) = \int_{\tau}^{0} x^1_{t_3-h}(\tau)\,d\tau + \int_{\tau}^{0} u_{t_3}(\tau)\,d\tau, \quad \tau \in H^-. \tag{7.10}$$

Управление (7.10) будет успокаивающим для $\eta \in \tilde{X}_0$ при любом $t_3 \geqslant 0$, что легко проверить, подставляя (7.10) в (1.1).

Определение 6. Систему Σ назовем асимптотически управляемой, если $\forall \eta \in C\ \exists u \in \bar{C} \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Если $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall \lambda_i \in \tilde{\Lambda}$, то система Σ асимптотически управляема ввиду следствия 2. Соответствующее управление u находится как решение задачи (7.4), (7.5), (7.7), где $\eta = \eta^Q$.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
2. Метельский А. В. // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 81—90.
3. Марченко В. М. // Проблемы оптимального управления. Минск, 1981. С. 124—147.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
5. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., 1971.
6. Метельский А. В., Минюк С. А. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 4. С. 624—633.
7. Метельский А. В. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 5. С. 393—396.
8. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
9. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., 1971.
10. Водичев А. В. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 2. С. 217—227.
11. Минюк С. А., Метельский А. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1977. № 4. С. 30—36.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 27 марта 1991 г.

УДК 517.925

В. И. МИРОНЕНКО

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В настоящей работе понятие отражающей функции (ОФ) [1] связывается с широко используемым понятием интегрального многообразия [2], что позволяет геометрически истолковать условия наличия и отсутствия периодических решений периодических систем. Так как некоторые предложения являются, по существу, лишь переводом теорем об ОФ на язык интегральных многообразий (ИМ), то их доказательства опущены. При этом, однако, приводятся достаточно убедительные (на наш взгляд) пояснения, почему эти предложения должны быть верны.

Изложение начнем с напоминания необходимых для понимания настоящей работы фактов из теории ОФ [1]. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x),\ t\in\mathbf{R},\ x\in D\subset\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью и общим решением в форме Коши $\varphi(t;t_0,x_0)$. Для этой системы ОФ определяется равенством $F(t,x):=\varphi(-t;t,x)$ и удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)=0,\ F(0,x)\equiv x. \tag{2}$$

Если $x(t)$ есть произвольное решение системы (1), определенное на некотором симметричном интервале $]-\alpha,\alpha[$, то $F(t,x(t))\equiv x(-t)$, $F(-t,x(-t))\equiv x(t)$, т. е. ОФ дает возможность по прошлому состоянию системы $x(-t)$ найти ее будущее состояние $x(t)$ и наоборот. Можно показать, что это свойство ОФ может быть принято за ее определение. Этому свойству ОФ можно дать и другое толкование. Пусть на поверхности AB (рисунок) некоторой среды, заполняющей пространство между AB и CD, некоторый источник сигналов в момент времени $(-t)$ испускает сигнал интенсивности $x(-t)$. В момент времени $t=0$ этот сигнал отражается от поверхности CD, а в момент времени t приемное устройство на AB регистрирует отраженный сигнал интенсивности $x(t)$.

Тогда ОФ — это функция, которая по интенсивности $x(t)$ позволяет найти интенсивность $x(-t)$ и наоборот. Если эта функция $F(t,x)$ (ОФ) известна и дифференцируема, то можно построить целое множество дифференциальных систем вида

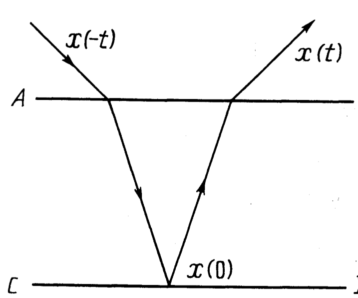
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}R(t,x)-R(-t,F), \tag{3}$$

ОФ каждой из которых совпадает с $F(t,x)$ (здесь $R(t,x)$ есть произвольная вектор-функция, для которой правая часть системы (3) удовлетворяет условиям некоторой теоремы существования и единственности задачи Коши).

Две системы названы эквивалентными, если их ОФ совпадают в общей для ОФ области определения. Если F есть ОФ, характеризующая соответствующий класс эквивалентных систем, то каждая система из этого класса имеет вид (3). В каждом классе выделена простейшая система

$$\frac{dx}{dt}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+E\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t}=:S(t,x),$$

которая может быть опознана по свойству $s(-t,F(t,x))\overset{t,x}{\equiv}S(t,x)$, если использовать при этом основное соотношение (2).



Если система (1) 2ω-периодична по t, то $F(-\omega,x)\equiv\varphi(\omega;-\omega,x)$ есть ее отображение за период, и поэтому решение $\varphi(t;-\omega,x_0)$ системы (1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $F(-\omega,x_0)=x_0$. Неинтегрируемая в квадратурах система может иметь элементарную ОФ. Благодаря этому, используя основное соотношение (2), для некоторых систем удается найти отображение за период и начальные данные периодических решений, а также исследовать эти решения на устойчивость. Примеры этого читатель найдет в [1].

Рассмотрим теперь наряду с системой (1) системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -X(-t, \bar{x}), \tag{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \ \frac{d\bar{x}}{dt} = -X(-t, \bar{x}). \tag{5}$$

Пусть $x(t)$ есть решение системы (1). Тогда, в чем можно убедиться проверкой, функция $\bar{x}(t) := x(t)$ является решением системы (4). Система (4), как следует из основного соотношения (2), может быть получена из системы (1) заменой переменных $\bar{x} = F(t, x)$, где F есть ОФ системы (1), а множество

$$M := \{(t, x, \bar{x}) : \bar{x} = F(t, x)\} \tag{6}$$

является ИМ системы (5). Таким образом, получена

Лемма. *Дифференцируемая функция $F(t, x)$ задает ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда (6) есть интегральное многообразие системы (5), сечение которого гиперплоскостью $t=0$ представляет собой плоскость $t=0$, $\bar{x}=x$.*

Формальное доказательство этой леммы не представляет особых трудностей.

ИМ системы (6) может быть задано и уравнением вида $U(t, x, \bar{x}) = 0$. Поэтому эта лемма может быть сформулирована как следующая

Теорема 1. *Пусть $U(t, x, \bar{x})$ — дифференцируемая вектор-функция, позволяющая однозначным образом разрешить уравнение $U(t, x, \bar{x}) = 0$ относительно $\bar{x}$. Тогда ОФ системы (1) $F(t, x)$ удовлетворяет тождеству $U(t, x, F(t, x)) \overset{t,x}{\equiv} 0$ тогда и только тогда, когда множество*

$$M := \{(t, x, \bar{x}) : U(t, x, \bar{x}) = 0\} \tag{7}$$

является интегральным многообразием системы (5), сечение которого гиперплоскостью $t=0$ совпадает с плоскостью $t=0$, $\bar{x}=x$.

Если система (1) 2ω-периодична по t, то $F(-\omega, x)$ есть ее отображение за период, а из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть (7) — интегральное многообразие системы (5), сечение которого гиперплоскостью $t=0$ совпадает с плоскостью $t=0$, $\bar{x}=x$. Тогда отображение за период $T(x) \equiv \varphi(\omega, -\omega, x)$ 2ω-периодической по t системы (1) удовлетворяет соотношению*

$$U(-\omega, x, T(x)) \equiv 0, \tag{8}$$

а продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t)$ системы (1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда точка $A := (\omega, x(\omega), x(\omega))$ принадлежит этому многообразию (7).

Доказательство. Пусть (7) есть ИМ системы (5). Тогда, согласно теореме 1, для ОФ системы (1) верно соотношение $U(t, x, F(t, x)) \equiv 0$, из которого при $t = -\omega$ следует доказываемое тождество (8). Так как для 2ω-периодического решения $x(t)$ точка $x(\omega) = x(-\omega)$ есть неподвижная точка отображения T, то из соотношения (8) следует, что $A \in M$.

Пусть теперь точка $A \in M$. Тогда график решения $(y(t), \bar{y}(t))$ системы (5), проходящего через точку A, принадлежит многообразию M. При этом $y(t)$ является решением системы (1), а $\bar{y}(t)$ — системы (4). Так как $y(\omega) = x(\omega)$, то в силу единственности решения задачи Коши для системы (1) $y(t) \equiv x(t)$. Так как в сечении многообразия M гиперплоскостью $t=0$, $\bar{x}=x$ (а точка $(0, y(0), \bar{y}(0))$ лежит в этом сечении), то $\bar{y}(0) = y(0) = x(0)$. Функция $x(-t)$, как и функция $\bar{y}(t)$, является решением системы (4) и при $t=0$ проходит через ту же точку $x(0)$. Поэтому $y(t)\equiv x(-t)$. Полагая здесь $t=\omega$, получим равенство $x(\omega)=$ $=x(-\omega)$, доказывающее 2ω-периодичность $x(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 2 следует, что если система (5) имеет интегральное многообразие, сечения которого гиперплоскостями $t=0$ и $t=\omega$ совпадает соответственно с плоскостями $t=0$, $\bar{x}=x$ и $t=\omega$, $\bar{x}=x$, то всякое продолжимое на $[-\omega,\omega]$ решение системы (1) является 2ω-периодическим.

Замечание 2. Размерность многообразия M равна $n+1$. Если M_0 есть интегральное многообразие системы (5), содержащееся в M, то всякая точка $(\omega,a,a)\in M_0$ порождает 2ω-периодическое решение 2ω-периодической системы (1). Если же M_1 есть интегральное многообразие системы (5), содержащее M, то можно утверждать лишь, что для всякого 2ω-периодического решения $x(t)$ системы (1) точка $(\omega,x(\omega),x(\omega))\in M_1$.

Пример 1. Пусть для 2ω-периодической по t системы (1) существует нечетная вектор-функция $\alpha(t)$, для которой

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}+X(t,x)+X(-t,x+\alpha(t))\equiv 0.$$

Тогда эта функция удовлетворяет также системе

$$\frac{\partial X}{\partial x}(t,x_0)+\frac{\partial X}{\partial x}(-t,x_0+\alpha(t))\equiv 0 \quad \forall x_0\in D.$$

При этом соответствующая система (5) имеет ИМ, задаваемое уравнением $\bar{x}=x+\alpha(t)$. В сечении этого многообразия гиперплоскостью $t=0$ выполнено равенство $\bar{x}=x$. Поэтому, согласно теореме 2, если $\alpha(\omega)=0$, то все решения рассматриваемой системы (1) 2ω-периодичны, если же $\alpha(\omega)\neq 0$, то ни одно решение рассматриваемой системы (1) не является 2ω-периодичным. Примером такой системы является уравнение

$$\frac{dx}{dt}=a(t)\cos x+b(t)\sin x+c(t),$$

для непрерывных и 2ω-периодических коэффициентов которого выполнены соотношения:

$$a_{\text{ч}}(t)\cos\beta(t)-b_{\text{н}}(t)\sin\beta(t)\equiv 0,$$
$$b_{\text{ч}}(t)\cos\beta(t)+a_{\text{н}}(t)\sin\beta(t)\equiv 0,$$

где

$$\beta(t):=-\int_0^t c_{\text{ч}}(\tau)\,d\tau,$$

$$a_{\text{ч}}(t):=\frac{a(t)+a(-t)}{2},\quad a_{\text{н}}(t):=\frac{a(t)-a(-t)}{2}.$$

Пример 2. Для системы

$$\frac{dx}{dt}=A(t,x)+yB(t,x)\equiv\alpha+\beta r+yre^{s},$$

$$\frac{dy}{dt}=a(t,x)+yb(t,x)+y^2c(t,x)\equiv$$

$$\equiv(p+\delta)e^{-s}+yb-y^2r\frac{\partial s}{\partial x}e^{s},$$

где α, β, r, s, δ, $b_{\text{н}}$ — любые непрерывно дифференцируемые функции

t и x, нечетные и 2ω-периодические по t, а четные по t функции

$$b_ч \equiv -\frac{\partial s}{\partial t} - \alpha\frac{\partial s}{\partial x} - r\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

$$p \equiv \beta^2 r\frac{\partial s}{\partial x} + \beta b_н - \alpha\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

соответствующая система (5) имеет ИМ вида

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = ye^{2s(t,x)} + 2\beta(t, x)e^{s(t,x)}.$$

Поэтому, согласно теореме 2, продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $(x(t), y(t))$ рассматриваемой системы будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда

$$y(\omega)e^{2s(\omega,x(\omega))} + 2\beta(\omega, x(\omega))e^{s(\omega,x(\omega))} = y(\omega).$$

Так как для нечетных 2ω-периодических по t функций s и β верны тождества $s(\omega, x) \equiv \beta(\omega, x) \equiv 0$, то любое продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение рассматриваемой системы будет 2ω-периодическим. Заметим, что через A, B, a, b функции α, β, r, s, δ, $b_н$ выражаются по формулам

$$r = \sqrt{-B(t, x)B(-t, x)};\ s = \ln B(t, x)/r(t, x);$$

$$\beta = \frac{A(t, x) + A(-t, x)}{2r(t, x)}; \quad \alpha = \frac{A(t, x) - A(-t, x)}{2};$$

$$b_н = \frac{b(t, x) - b(-t, x)}{2}; \quad p = \frac{a(t, x)e^{s(t,x)} + a(-t; x)e^{-s(t,x)}}{2};$$

$$b_ч = b - b_н; \quad \delta = ae^s - p.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \Delta(t, x), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in D \subset \mathbf{R}^n. \tag{9}$$

Будем считать, что $\Delta(t, x)$, как и $X(t, x)$, есть 2ω-периодическая по t, непрерывно дифференцируемая функция. Пусть система (1) имеет ОФ

$$F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x))^{\mathrm{T}},$$

для которой $F(\omega, x) \equiv x$ при всех $x \in D$. Тогда все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ решения системы (1) будут 2ω-периодичны. Для $m \leqslant n$ определим множество

$$M_s := \{(t, x, \bar{x}) : \bar{x}_i < F_i(t, x),\ i = \overline{1, s};\ \bar{x}_k > F_k(t, x),\ k = \overline{(s+1), m}\}.$$

Границей множества M_s является множество Γ_s, которое характеризуется тем, что хотя бы для одного $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнено равенство $\bar{x}_j = F_j(t, x)$. Множества M_s и Γ_s не имеют общих точек. Положим $\hat{x}_j := (x_1, \dots, x_{j-1}, F_j(t, x), x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Теорема 3. *Пусть: 1) функция $F = (F_1, \dots, F_n)^{\mathrm{T}}$ есть отражающая функция системы (1) и $F(\omega, x) \equiv x$ при всех $x \in D$; 2) для 2ω-периодической по t системы (9) выполнены неравенства*

$$X_i(-t, \hat{x}_i) - X_i(-t, F(t, x)) + \frac{\partial F_i}{dx}(t, x)\Delta(t, x) + \Delta_i(-t, \hat{x}_i) > 0, \tag{10}$$

$$X_k(-t, \hat{x}_k) - X_k(-t, F(t, x)) + \frac{\partial F_k}{\partial x}(t, x)\Delta(t, x) + \Delta_k(-t, \hat{x}_k) < 0 \tag{11}$$

при $t \in]0; \omega[$; $(t, x, \hat{x}) \in \Gamma_s$; $i = \overline{1, s}$; $k = \overline{(s+1), m}$. *Тогда система (9) не имеет* 2ω*-периодических решений и для любого решения* $x(t)$ *этой системы точка* $A := (\omega, x(\omega), x(\omega)) \in M_s$.

Доказательство. Из неравенств (10), (11) и основного соотношения для ОФ следует, что каждая точка границы Γ_s множества M_s является точкой входа [3, с. 52] для системы вида (5), соответствующей системе (9), т. е. векторы поля, определяемого этой системой, на Γ_s направлены внутрь M_s. Поэтому [3, с. 53] график решения $(x(t), x(-t))$ рассматриваемой системы вида (5), начавшись при $t=0$ на Γ_s, входит в M_s и в дальнейшем не может покинуть M_s при $t \in]0; \omega[$. Это значит, что если решение $x(t)$ системы (9) продолжимо на $[-\omega, \omega]$, то $A \in M_s$, и поэтому $x(\omega) \neq x(-\omega)$, а решение $x(t)$ системы (9) не является 2ω-периодическим. Теорема доказана.

Пример 3. Рассмотрим 2ω-периодическую по t систему

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t, x) + yr(t, x)e^{s(t)} + \Delta_1(t, x, y) =: X(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = a(t, y)e^{2s(t)} - a(-t, ye^{2s(t)}) - y\frac{ds(t)}{dt} + \Delta_2(t, x, y) =: Y(t, x, y),$$

где α, r, s — нечетные по t функции. Пусть $M_1 := \{(t, x, y, \bar{x}, \bar{y}) : \bar{x}\langle x, y\rangle ye^{2s(t)}\}$. Тогда неравенства (10) и (11) примут вид

$$X(-t, x, \bar{y}) - X(-t, x, ye^{2s}) + \Delta_1(t, x, y) + \Delta_1(-t, x, \bar{y}) > 0,$$

$$Y(-t, \bar{x}, ye^{2s}) - Y(-t, x, ye^{2s}) + e^{2s}\Delta_2(t, x, y) + \Delta_2(-t, \bar{x}, ye^{2s}) < 0,$$

откуда после упрощений получим неравенства

$$re^{-s}(ye^{2s} - \bar{y}) + \Delta_1(t, x, y) + \Delta_1(-t, x, \bar{y}) > 0,$$

$$e^{2s}\Delta_2(t, x, y) + \Delta_2(-t, \bar{x}, ye^{2s}) < 0.$$

Эти неравенства наверняка выполнены, если при всех (t, x, y), $t \in]0, \omega[$ выполняются неравенства $r(t, x) < 0$, $\Delta_1(t, x, y) > 0$, $\Delta_2(t, x, y) < 0$. В этом случае рассматриваемая система не имеет 2ω-периодических решений.

Так как ОФ системы (1) $F(t, x) \equiv x$ тогда и только тогда, когда $X(t, x)$ нечетна по t [1, с. 13], то из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Пусть для* 2ω*-периодичной по* t *системы (1) при некотором* s *выполнены неравенства:*

$$X_i(t, x) + X_i(-t, \hat{x}_i) > 0, \quad i = \overline{1, s},$$

$$X_k(t, x) + X_k(-t, \hat{x}_k) < 0, \quad k = \overline{(s+1), n},$$

$$t \in]0, \omega[, \quad (t, x, \hat{x}) \in \Gamma_s,$$

$$\hat{x}_i := (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n).$$

Тогда система (1) не имеет 2ω*-периодических решений и* $x_i(-\omega) < x_i(\omega)$ *при* $i = \overline{1, s}$, *а* $x_k(-\omega) > x_k(\omega)$ *при* $k = \overline{(s+1), n}$.

Для доказательства достаточно в теореме 3 положить

$$\Delta := \frac{1}{2}(X(t, x) + X(-t, x)), \quad X(t, x) := \frac{1}{2}(X(t, x) - X(-t, x)).$$

Замечание 3. При $n=1$ теорема 4 утверждает, что если для уравнения (1) при $t \in]0, \omega[$ и любом x выполнено неравенство $X(t, x) + X(-t, x) \neq 0$, то уравнение (1) не имеет 2ω-периодических решений. При этом если $X(t, x) + X(-t, x) > 0$, то $x(-\omega) < x(\omega)$, если же $X(t, x) + X(-t, x) < 0$, то $x(-\omega) > x(\omega)$.

Следствие. *Пусть для* 2ω*-периодической по* t *системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j + \Delta_i(t, x), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad i = \overline{1, n},$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью выполнены условия: 1) функции $\Delta_i(t, x)$, $i=\overline{1, n}$, *не обращаются в нуль; 2) функции* $p_{ij}(t)$ *нечетны и для них при* $t\in]0, \omega[$ *выполнены неравенства* $p_{ij}(t)\operatorname{sign}\Delta_i\operatorname{sign}\Delta_j>0$. *Тогда рассматриваемая система не имеет* 2ω*-периодических решений и* $(x_i(\omega)-x_i(-\omega))\operatorname{sign}\Delta_i>0$.

Для доказательства достаточно проверить выполнимость условий теоремы 4, считая $M_s:=\{(t, x, \bar{x}):(x_i-\bar{x}_i)\operatorname{sing}\Delta_i>0\}$.

Замечание 4. Несмотря на то, что теоремы 3 и 4 устанавливают условия отсутствия периодических решений, их можно использовать для доказательства существования периодических решений, если воспользоваться тем, что при выполнении условий этих теорем точка $(\omega, x(\omega), x(\omega))\in M_s$. Приведем на этот счет один иллюстративный

Пример 4. Пусть нам задано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)-x^3, \tag{12}$$

где непрерывно дифференцируемая функция $f(t, x)$ нечетна и 2ω-периодична по t. Наряду с (12) рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)-(|x-\alpha|+\alpha)^3,\quad \alpha\in\mathbf{R},\ \alpha>0,$$

совпадающее с уравнением (12) при $x\geqslant\alpha$. Для этого уравнения

$$X(t, x)+X(-t, x)=-2(|x-\alpha|+\alpha)^3<0. \tag{13}$$

Поэтому, согласно теореме 4 (замечание 3), для любого решения $\tilde{x}(t)$ уравнения (13) выполнено неравенство $\tilde{x}(-\omega)>\tilde{x}(\omega)$. Так как при $x\geqslant\alpha$ уравнения (12) и (13) совпадают, то для всякого решения $\tilde{x}(t)$ уравнения (12), удовлетворяющего при $t\in[0, \omega]$ неравенству $\tilde{x}(t)\geqslant\alpha$, также выполнено это неравенство $\tilde{x}(-\omega)>\tilde{x}(\omega)$.

Если теперь рассмотреть уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x)+(|x+\alpha|+\alpha)^3,$$

совпадающее с уравнением (12) при $x\leqslant-\alpha$, то аналогично предыдущему докажем, что всякое решение $\underset{\sim}{x}(t)$ уравнения (12), удовлетворяющее при $t\in[0, \omega]$ неравенству $\underset{\sim}{x}(t)\leqslant-\alpha$, удовлетворяет также неравенству $\underset{\sim}{x}(-\omega)<\underset{\sim}{x}(\omega)$. Таким образом, отображение за период $T:x(-\omega)\mapsto x(\omega)$ для уравнения (12) преобразует отрезок $[\underset{\sim}{x}(-\omega), \tilde{x}(-\omega)]$ в себя. Так как такое отображение имеет неподвижную точку, то, согласно общему принципу [4, с. 12], уравнение (12) имеет хотя бы одно 2ω-периодическое решение.

Аналогичными рассуждениями доказывается

Теорема 5. *Пусть при* $n=1$ *и некотором* $\alpha>0$ 2ω*-периодическая по* t *и непрерывно дифференцируемая функция* $X(t, x)$ *удовлетворяет неравенствам:*

$$X(t, x)+X(-t, x)<0 \textit{ при } t\in]0, \omega[,\ x\geqslant\alpha,$$

$$X(t, x)+X(-t, x)>0 \textit{ при } t\in]0, \omega[,\ x\leqslant-\alpha.$$

Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно 2ω*-периодическое решение.*

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнения

$$\frac{dx}{dt}=X(t, \alpha+|x-\alpha|,\quad \frac{dx}{dt}=X(t, -\alpha-|x+\alpha|),$$

которые удовлетворяют условиям теоремы 4 (замечание 3). При этом одно из этих уравнений совпадает с уравнением (1) при $x\geqslant\alpha$, а второе совпадает с уравнением (1) при $x\leqslant-\alpha$.

Литература

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
2. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., 1973.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
4. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 22 февраля 1991 г.

УДК 517.925.44

П. Н. САВЕЛЬЕВ

О ДИССИПАТИВНОСТИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

В работе рассматривается обобщенное неавтономное уравнение Льенара

$$x''+f(x,x')x'+g(x)=e(t,x,x').$$

Одним из условий для этого уравнения обычно является следующее:

$$|e(t,x,y)|\leqslant m(x).$$

Объектом нашего исследования будет $D(F)$ — пространство решений дифференциального включения $u'\in F(u)$, где

$$u(t)=(x(t),y(t)),\ t\in R,$$

$$F(x,y)=\{y\}\times(-f(x,y)y-g(x)+[-m(x),m(x)]).$$

Основной целью настоящей работы является обобщение результата Картрайт и Свиннертон-Дайера о диссипативности автономного уравнения Льенара (т. е. при $e(t,x,y)\equiv 0$) — теоремы 8 из [1]. Этот результат будет распространен на неавтономные пространства решений класса $R_{ce}(R\times R^2)$ (см. [2—4]). Это дает нам возможность рассматривать функции f, g и e со всевозможными особенностями (первый результат такого типа получен В. В. Филипповым в [4]). Кроме того, будут ослаблены ограничения на функции f и g. Полученная теорема также обобщает ряд других теорем об уравнении Льенара [5—7], а также результат, принадлежащий автору — теорему 4 из [8].

В соответствии с [3] пусть $C_s(U)$ обозначает множество всех непрерывных отображений z, области определения которых $\pi(z)$ являются отрезками действительной прямой, а графики лежат в области $U\subset R^n$. Будем писать $Z\in R_{ce}(R\times R^n)$, если для пространства решений $Z\subset C_s(U)$ выполнены аксиомы существования и непрерывной зависимости решений от начальных условий (см. [3, с. 209]).

Пусть для $S\geqslant 0$ $B_S=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant S\}$.

Определение. Пространство $Z\in R_{ce}(R\times R^n)$ назовем диссипативным, если существует такое $S\geqslant 0$, что для любого $z\in Z^+$ найдется такое $t_0\in\pi(z)$, что $z(t)\in B_S$ для любого $t\in\pi(z)\cap[t_0,\infty[$ (заметим, что в этих предположениях $\sup\pi(z)=\infty$).

Зафиксируем числа $A\geqslant a\geqslant 0$, $R_0>D\geqslant 0$, ε, $\mu>0$, $\lambda>\varepsilon$, $-1<\alpha\leqslant 0$ и функции $f:R\times R\to R$, $g:R\to R$, m, $c:R\to R^+\cup\{0\}$ (условия на них будут даны ниже).

Пусть $U=\{(x,y):|x|\leqslant A,\ |y|\geqslant R_0\}$.

Считаем, что у нас заданы вспомогательные непрерывные функции δ, $\Delta:C_s(U)\to R^+\cup\{\infty\}$. Рассмотрим следующие условия на $\xi\in C_s(U)$:

А) если $\pi(\xi)=[x_1,x_2]$, то $-\delta(\xi)\leqslant\xi(x_1)-\xi(x_2)\leqslant\Delta(\xi)$.