В. И. Мироненко, Функционал, принимающий экстремальные значения на периодических решениях дифференциального уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1987, том 23, номер 10, 1816–1818

УДК 517.923

В. И. МИРОНЕНКО

ФУНКЦИОНАЛ, ПРИНИМАЮЩИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(t, x), \qquad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой и 2ω-периодической по t функцией $X(t, x)$ и решениями $\varphi(t;\ t_0,\ x_0)$. Отражающей функцией [1] этого уравнения называется функция $F(t, x) := \varphi(-t;\ t,\ x)$. Дифференцируемая функция F является отражающей функцией уравнения (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет соотношениям

$$F_t + F_x X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0, x) \equiv x. \tag{2}$$

Если F есть отражающая функция уравнения (1), то $F(-\omega, x)$ есть отображение за период для этого уравнения. Поэтому если дифференцируемая функция F удовлетворяет соотношениям (2) и $F(-\omega, x) \equiv x$, то всякое продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t)$ уравнения (1) будет 2ω-периодическим. В настоящей работе уравнение (1) изучается при условии, что для некоторой функции F выражение $V(t, x) := F_t + F_x X(t, x) + X(-t, F)$ не меняет знака.

Теорема 1. *Пусть все решения уравнения (1) суть 2ω-периодические и $F(t, x)$ — его отражающая функция, а $Y(t, x)$ — любая непрерывно дифференцируемая 2ω-периодическая по t функция, для которой $V(t, x) \equiv F_x Y(t, x) + Y(-t, F)$ не меняет знака. Тогда продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение уравнения*

$$\dot{x} = X(t, x) + Y(t, x) \tag{3}$$

будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $V(t, x(t)) \equiv 0$. Если $V(t, x) \underset{t,x}{\equiv} 0$, то все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ решения уравнения (3) суть 2ω-периодические.

Доказательство. Положим $Z(t, x) := X(t, x) + Y(t, x)$. Тогда уравнение (3) примет вид $\dot{x} = Z(t, x)$. Пусть $x(t)$ есть продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение этого уравнения. Рассмотрим функцию $y(t) \equiv F(t, x(t))$. Так как F есть отражающая функция уравнения (1), то для нее выполнены соотношения (2). Поэтому $y(0) = F(0, x(0)) = x(0)$ и производная

$$\dot{y}(t) \equiv F_t + F_x[X(t, x(t)) + Y(t, x(t))] \equiv -Z(t, y(t)) + V(t, x(t)).$$

Таким образом,

$$\dot{y}(t) \equiv -Z(t, y(t)) + V(t, x(t)), \quad y(0) = x(0). \tag{4}$$

Пусть теперь $V(t, x(t)) \equiv 0$. Тогда из соотношений (4) следует, что $y(t) \equiv x(-t)$, т. е. $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$. Из этого тождества при $t = \omega$, учитывая, что периодичность всех решений уравнения (1) влечет за собой соотношения $F(\omega, x) \equiv F(-\omega, x) \equiv x$, получим равенство $x(-\omega) = x(\omega)$, доказывающее периодичность решения и утверждение теоремы.

Пусть теперь функция $V(t, x(t)) \not\equiv 0$ и не меняет знака. Для определенности положим, что она неотрицательна. Тогда на некотором интервале $V(t, x(t)) > 0$, и, значит, согласно [2, с. 9; 3, с. 15], из соотношений (4) следует неравенство $y(t) \geqslant x(-t)$, которое при $t = \omega$ является строгим, т. е. $y(\omega) > x(-\omega)$. Его можно переписать в виде $F(\omega, x(\omega)) > x(-\omega)$ и, следовательно, в виде $x(\omega) > x(-\omega)$. Это доказывает периодичность решения $x(t)$.

Аналогично рассматривается случай $V(t, x) \leqslant 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Одним из условий теоремы 1 является периодичность и, значит, продолжимость на $\mathbf{R}$ всех решений уравнения (1). Как видно из доказательства, это требование можно ослабить, заменив его следующим: для уравнения (1) существует дифференцируемая функция $F(t, x)$, определенная при всех t и x и удовлетворяющая основным соотношениям для отражающей функции (2), а также соотношениям $F(\omega, x) \equiv F(-\omega, x) \equiv x$. Сужение этой функции на область определения отражающей функции уравнения (1) совпадает с самой отражающей функцией. Здесь мы имеем дело с так называемой отражающей функцией класса эквивалентных уравнений с совпадающими отражающими функциями [1].

Замечание 2. Теорема 1 справедлива и в том случае, когда ее условия выполнены не на всей плоскости $\mathbf{R}^2$, а на некотором интегральном множестве (множестве, состоящем из целых интегральных кривых). При этом вывод теоремы относится лишь к тем решениям, графики которых принадлежат этому интегральному множеству.

Следствие. *Пусть выражение $X(t, x) + X(-t, x)$ не меняет знака. Тогда продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t)$ уравнения (1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $X(t, x(t)) + X(-t, x(t)) \equiv 0$.*

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде

$$\dot{x}=\frac{X(t,\ x)-X(-t,\ x)}{2}+\frac{X(t,\ x)+X(-t,\ x)}{2}.$$

Так как уравнение $\dot{x}=[X(t,\ x)-X(-t,\ x)]/2$ имеет нечетную правую часть, то его отражающая функция $F(t,\ x)\equiv x$ [1]. Отсюда следует, что для уравнения (1) выполняются условия теоремы 1 (или замечания к ней), ссылка на которую завершает доказательство следствия.

Пример 1. Уравнение $\dot{x}=x^2+a(t)$ не имеет периодических решений, если периодическая непрерывная функция $a(t)\not\equiv 0$ и $a(t)+a(-t)\geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть для уравнения (1) можно указать непрерывно дифференцируемую функцию $F(t,\ x)$, определенную на некотором множестве, содержащем полуплоскость $t\geqslant 0$, и обладающую свойствами:*

1) выражение $V(t,\ x):=F_t+F_xX(t,\ x)+X(-t,\ F)$ не меняет знака на $\mathbf{R}^2$;

2) при $t\geqslant 0$ и произвольном x выполняются соотношения $F_x(t,\ x)>0$, $F(0,\ x)\equiv F(\omega,\ x)\equiv x$.

Тогда продолжимое на $[-\omega,\ \omega]$ решение $x(t)$ уравнения (1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $V(t,\ x(t))\equiv 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $V(t,\ x)\geqslant 0$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t,\ x):=\begin{cases}F^{-1}(-t,\ x) & \text{при } t<0,\\ F(t,\ x) & \text{при } t\geqslant 0,\end{cases}$$

где $F^{-1}(-t,\ x)$ означает то непрерывно дифференцируемое решение уравнения $F(-t,\ \Phi)=x$, которое удовлетворяет условию $\Phi(0,\ x)=x$. Эта функция задана и непрерывна при всех t и x и дифференцируема всюду, кроме, быть может, прямой $t=0$. Более того, она, что можно проверить, обладает свойством $\Phi(-t,\ \Phi(t,\ x))\equiv x$. Дифференцируя это соотношение по t и x частным образом, получим тождества

$$\Phi_x(t,\ x)\equiv 1/\Phi_x(-t,\ \Phi),\quad \Phi_t(t,\ x)\equiv\Phi_t(-t,\ \Phi)/\Phi_x(-t,\ \Phi).$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=Y(t,\ x):=\begin{cases}X(t,\ x) & \text{при } t\leqslant 0,\\ (F_t+X(-t,\ F))/-F_x & \text{при } t>0.\end{cases}\tag{5}$$

Из свойств функций Φ и Y следует основное соотношение для отражающей функции

$$\Phi_t+\Phi_xY(t,\ x)+Y(-t,\ \Phi)\equiv 0,\quad \Phi(0,\ x)\equiv x.$$

Поэтому $\Phi(t,\ x)$ есть отражающая функция системы (5) и, значит, для любого продолжимого на $[-\omega,\ \omega]$ решения $\Psi(t;\ -\omega,\ x)$ системы (5) верны соотношения

$$\Psi(\omega;\ -\omega,\ x)\equiv\Phi(-\omega,\ x)\equiv F^{-1}(\omega,\ x)\equiv x.\tag{6}$$

Рассмотрим теперь разность $X(t,\ x)-Y(t,\ x)$. Эта разность при $t\leqslant 0$ обращается в нуль, а при $t>0$ удовлетворяет соотношению

$$X(t,\ x)-Y(t,\ x)\equiv V(t,\ x)/F_x(t,\ x)\tag{7}$$

и поэтому не может быть отрицательной.

Пусть теперь $x(t)$ есть продолжимое на $[-\omega,\ \omega]$ решение уравнения (1). Тогда если $V(t,\ x(t))\equiv 0$, то, как следует из (7), $X(t,\ x(t))\equiv Y(t,\ x(t))$, и поэтому $x(t)$ есть также и решение уравнения (5). А значит, согласно (6), верны равенства

$$x(\omega)=\Psi(\omega;\ -\omega,\ x(-\omega))=x(-\omega).$$

Таким образом, $x(-\omega)$ есть неподвижная точка отображения за период для уравнения (1) и поэтому $x(t)$ есть 2ω-периодическая функция.

Если $V(t,\ x(t))\not\equiv 0$, то $V(t,\ x(t))\geqslant 0$ и на некотором интервале записанное неравенство является строгим. Поэтому, согласно [2, с. 9; 3, с. 15], из соотношения

$$\dot{x}(t)\equiv Y(t,\ x(t))+V(t,\ x(t))/F_x(t,\ x(t))$$

следует неравенство $x(t)\geqslant\Psi(t;\ -\omega,\ x(-\omega))$, которое при $t=\omega$ (см. соотношение (6)) обращается в строгое неравенство

$$x(\omega)>\Psi(\omega;\ -\omega,\ x(-\omega))=x(-\omega),$$

доказывающее непериодичность решения $x(t)$. (Заметим, что решение $\Psi(t;\ -\omega,\ x(-\omega))\equiv x(t)$ при $t\leqslant 0$ и $\Psi(t;\ -\omega,\ x(-\omega))\equiv\Phi(-t,\ x(-t))$ при $t>0$. Поэтому при $t\in[-\omega,\ \omega]$ оно определено.) Теорема доказана.

Далее если $a=a(t)$, то $\bar{a}$ означает $a(-t)$.

Теорема 3. *Пусть непрерывные 2ω-периодические функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ та-*

ковы, что для них можно указать нечетную 2ω-периодическую функцию $r(t)$, при всех t удовлетворяющую неравенству

$$(b+\bar{b}+2\bar{c}r)^2-4(c+\bar{c})(\dot{r}+a+\bar{a}+\bar{b}r+\bar{c}r^2)\leqslant 0,$$

и пусть, кроме того, $c+\bar{c}$ не меняет знака. Тогда продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}=a(t)+b(t)x+c(t)x^2 \tag{8}$$

будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда

$$(\dot{r}+a+\bar{a}+\bar{b}r+\bar{c}r^2)+(b+\bar{b}+2\bar{c}r)x(t)+(c+\bar{c})x^2(t)\equiv 0.$$

Доказательство. Рассматриваемое уравнение удовлетворяет условиям теоремы 1 или замечаниям к ней с $F(t, x)=x+r(t)$.

Пример 2. Уравнение $\dot{x}=x^2-\sin^2 t+\cos t+\alpha(t)+\beta(t)$, где $\alpha(t)\geqslant 0$—четная, а $\beta(t)$ — нечетная непрерывные 2π-периодические функции, не имеет периодических решений, если $\alpha(t)+\beta(t)\neq 0$, и имеет единственное периодическое решение $x=\sin t$, если $\alpha(t)+\beta(t)\equiv 0$.

Это следует из теоремы 3 при $r(t)\equiv -2\sin t$.

Следствие. *Пусть для непрерывных 2ω-периодических функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ выполнены условия:*

1) для любого t верны неравенства $a+\bar{a}\geqslant 0$, $c+\bar{c}\geqslant 0$ или неравенства $a+\bar{a}\leqslant 0$, $c+\bar{c}\leqslant 0$;

2) функция $a(t)$ хотя бы в одной точке отлична от нуля;

3) функция $b(t)$ нечетная.

Тогда уравнение (8) не имеет периодических решений.

Доказательство. Для рассматриваемого уравнения выполнены все условия теоремы 3, если положить $r(t)\equiv 0$. Поэтому его периодические решения удовлетворяют уравнению $(a+\bar{a})+(c+\bar{c})x^2=0$. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

Литература

1. Мироненко В. И. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 12. С. 2173—2176.
2. Трубников Ю. В., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск, 1986.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.

Гомельский государственный университет

Поступила в редакцию 3 марта 1986 г.

УДК 517.928

Н. Г. ПАНФИЛОВ

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ *)

Пусть задана система

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t)x,\quad t\in[0, 1], \tag{1}$$

где $A\in C_1[0, 1]$ —матрица $(M\times M)$; $\varepsilon>0$— малый параметр. Собственные значения $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1, M}$, матрицы $A(t)$ можно считать непрерывными [1, с. 140]. Предположим, что $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1, M}$, разбиваются на две группы таким образом, что при любом $t\in[0, 1]$ $\mathrm{Re}\,\lambda_j(t)<\mathrm{Re}\,\lambda_k(t)$, где $\lambda_j(t)$ и $\lambda_k(t)$ из первой и второй групп соответственно. Изменяя нумерацию $\lambda_i(t)$, будем считать, что при некотором $m<M$

$$\max_{j\leqslant m}\mathrm{Re}\,\lambda_j(t)=r_m(t)<R_m(t)=\min_{k>m}\mathrm{Re}\,\lambda_k(t),\quad t\in[0, 1].$$

Введем обозначения: $[x]_1$, $[x]_2$ — векторы, составленные соответственно из первых m и последних $M-m$ координат вектора x; $|x(t)|=\max_i |x_i(t)|$.

Пусть матрица $D(t)$ при $t=0$ и $t=1$ приводит $A(t)$ к жордановой форме

$$D^{-1}(t)A(t)D(t)=J(t)=\mathrm{diag}[J_{11}(t), J_{22}(t)],\ t\in\{0, 1\},$$

*) Рукопись полностью депонирована в ВИНИТИ 12.03.87, № 1806—В87.