Проблемы физики, математики и техники, № 2 (31), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Семенчук, М.В. Селькин, В.М. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE GROUPS WITH GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, M.V. Selkin, V.M. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Изучается строение конечных групп с заданными свойствами $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: *конечная группа*, $\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа*, *насыщенная формация*, *наследственная формация*.

The structure of finite groups with $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup is studed.

Keywords: *finite group*, $\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup*, *saturated formation*, *hereditury formation*.

Введение

Построенная известным немецким математиком Виландтом [1] теория субнормальных подгрупп оказала большое влияние на изучение строения конечных групп. В теории классов конечных групп естественным развитием субнормальности является понятие обобщенной субнормальности. В 1979 году Л.А. Шеметков [2] и Кегель [3] поставили задачу о построении теории обобщенно субнормальных подгрупп, аналогичную теории субнормальных подгрупп. Решению данных задач посвящено большое количество работ в нашей стране и за рубежом [4]–[6]. Данному направлению посвящена настоящая работа.

1 Предварительные сведения

Необходимые определения и обозначения можно найти в [2]. Напомним некоторые из них. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Если $p \in \mathbb{P}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$, то $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

$\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$ -абнормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq M$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ – формацию всех нильпотентных групп.

$\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$ – произведение формаций $\mathfrak{F}, \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{N}^n$ – формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной равной n.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$ -нормальна в H_{i-1}.

В следующих леммах приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

***Лемма* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G;

2) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G, K – подгруппа группы G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K;

3) если H_1 и H_2 $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа G;

4) если H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в K, а K $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G;

5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$ -субнормальной;

6) если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любых $x \in G$.

***Лемма* 1.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H – подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа из G. Тогда:

1) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;

2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.

***Лемма* 1.3.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G.

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Тогда любая группа $G = AB$, где A – разрешимая нормальная подгруппа с нильпотентной длиной $n (n \in N)$, а B – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{F}$.*

Доказательство теоремы проведем индукцией по n. Покажем, что утверждение теоремы верно при $n = 1$, т. е. любая группа $G = AB$, где A – нильпотентная нормальная подгруппа, а B – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Доказательство этого факта проведем индукцией по порядку группы G.

Покажем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Предположим, что их две N_1 и N_2. Рассмотрим фактор-группу G/N_i $(i = 1, 2)$. Очевидно, что

$$G/N_i = AN_i/N_i \cdot BN_i/N_i, i = 1, 2.$$

Ясно, что AN_i/N_i – нильпотентная нормальная подгруппа из G/N. По лемме 1.2 BN_i/N_i – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа фактор-группы G/N_i. Так как $B \in \mathfrak{F}$, то, очевидно, что $BN_i/N_i \in \mathfrak{F}$.

Итак, все требования теоремы для G/N_i выполнены. По индукции, $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Так как $N_1 \cap N_2 = 1$ и $\mathfrak{F}$ – формация, то

$$G = G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. Как и выше, нетрудно показать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N и $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что $F(G) \neq 1$. Отсюда следует, что $N = F(G)$ – цоколь группы G.

Так как $G/N \simeq B$, а подгруппа $B \in F$ и $G \notin F$, то $N = G^{\mathfrak{F}}$. Так как B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $B \neq G$, то B содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Так как B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то M – максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа G. Тогда $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, что невозможно. Итак, при $n = 1$ теорема доказана.

Пусть теперь теорема верна при $n = k$. Покажем, что она справедлива при $n = k + 1$, т. е. любая группа $G = AB$, где A – нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{N}^{k+1}$ и B – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа принадлежит $\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$.

Так как $A \in \mathfrak{N}^{k+1}$, то $A/F(A) \in \mathfrak{N}^k$.

Так как A – нормальная подгруппа группы G и $F(A)$ – характеристическая подгруппа, то $F(A)$ – нормальная подгруппа группы G.

Рассмотрим следующую фактор-группу

$$G/F(A) = A/F(A) \cdot BF(A)/F(A).$$

Очевидно, что $A/F(A) \in \mathfrak{N}^k$. По лемме 1.2 $BF(A)/F(A)$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа фактор-группы $G/F(A)$. Ясно, что

$$BF(A)/F(A) \in \mathfrak{F}.$$

Согласно индукции следует, что $G \in \mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 2.1** (Хоукс, [2, теорема 15.10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H и M – такие подгруппы из G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $HF(G) = G$. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если $H = M$, то утверждение доказано.

Пусть $H = G$, тогда утверждение следует из доказанной выше теоремы.

Пусть $M \neq G$. Подгруппа M представлена в виде

$$M = H(F(G) \cap M) = HF(M).$$

Поэтому M и ее подгруппы H удовлетворяют условию теоремы. Так как $M \neq G$, то для M утверждение верно по индукции. Значит $M \in \mathfrak{F}$.

***Следствие* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Тогда любая разрешимая группа $G = F(G) \rtimes B$, где B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Тогда

$$G/\Phi(G) = F(G)/\Phi(G) \rtimes B\Phi(G)/\Phi(G).$$

По индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Итак $\Phi(G) = 1$.

Отсюда следует, что $F(G)$ – цоколь группы G.

Так как B – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G, то по лемме 1.3 $B^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G. По теореме 7.10 [2] $F(G) \subseteq N(B^{\mathfrak{F}})$. Отсюда следует, что $B^{\mathfrak{F}}$ – нормальная подгруппа G. А это значит, что $B^{\mathfrak{F}} = 1$, т. е. $B \in \mathfrak{F}$. Теперь требуемый результат следует из доказанной выше теоремы. □

Группа называется минимальной $\mathfrak{F}$-группой, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, но все собственные подгруппы ее принадлежат $\mathfrak{F}$. В частности, не нильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта.

В следующей теореме получена новая характеризация разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп с помощью $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация и G – разрешимая группа,* $\Phi(G) = 1$. *Тогда и только тогда группа G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, когда*:

1) *в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа M, где $M_G = 1$;*

2) *любая собственная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа и $\Phi(G) = 1$. Тогда, нетрудно показать, $G = N \leftthreetimes M$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что и M – $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G и $M_G = 1$.

Пусть K – собственная подгруппа группы M. Рассмотрим подгруппу NK. Ясно, что NK – собственная подгруппа группы G. Так как G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $NK\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то K – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа NK. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то NK – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда по лемме 1.1 K – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Достаточность. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, а M – максимальная $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G и $M_G = 1$.

Очевидно, что $G = N \leftthreetimes M$. Так как любая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по лемме 1.1 она субнормальна в M. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $M \in \mathfrak{F}$.

Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы G. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Если $N \not\subseteq H$, то $G = N \leftthreetimes H$. Тогда $H \simeq M$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть $N \subseteq H$. Тогда

$$H = (N \leftthreetimes M) \cap H = N(M \cap H).$$

Очевидно, что $M \cap H$ – собственная подгруппа M. Согласно условию, $M \cap H \in F$ и $M \cap H$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. По лемме 1.1 $M \cap H$ – $\mathfrak{F}$ субнормальна в H. По следствию 2.1 из теоремы 2.1 $H \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то любая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Так как в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная под-группа, то $G \notin \mathfrak{F}$. Итак G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. □

***Теорема* 2.3.** *Пусть в конечной группе G существует ненормальная максимальная подгруппа, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G, тогда G – группа Шмидта.*

Доказательство. Пусть в группе G существует максимальная ненормальная подгруппа M, у которой все максимальные подгруппы субнормальны в G. Покажем, что M – примарная циклическая подгруппа. Предположим, что это не так. Тогда в группе M существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что M_1 и M_2 субнормальны в G и $M = \langle M_1, M_2 \rangle$. Так как множество всех субнормальных подгрупп в группе G, согласно результату Кегеля, образует решетку, то M – субнормальная подгруппа группы G, что невозможно. Итак, M – циклическая примарная подгруппа группы G. Согласно результатам Томпсона – Янка G – разрешимая группа. Отсюда следует, что G – бипримарная группа. Теперь, нетрудно показать, что G – группа Шмидта. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt*, *H.* Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1958. – Vol. 69, № 8. – P. 463–465.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 267 с.

3. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

4. *Селькин*, *М.В.* Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами / М.В. Селькин, Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

5. *Семенчук*, *В.Н.* О конечных группах, в которых каждая подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна / В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 72–74.

6. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы с заданными свойствами критических подгрупп / В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 89–92.

Поступила в редакцию 10.02.17.