Е. А. Ружицкая
, А. М. Халецкая
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой при $t \ge 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x \in R^n,\ A \in R^{n \times n},\ u \in R,\ rank(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n), \qquad (1)$$

где $x = x(t)$ – n-вектор состояния системы в момент времени t, $u = u(t)$ – значение скалярного управления. Пусть G – ограниченная окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1), $u = 0$.

При фиксированных числах $h > 0$, $L > 0$ функцию

$$u(t, x),\ t \in [0, h[,\ t \ge 0,\ x \in G, \qquad (2)$$

назовем дискретной (с периодом квантования $h > 0$) ограниченной стабилизирующей обратной связью системы (1) в области G, если: 1) $u(t,0) = 0,\ t \in [0,h[$; 2) $|u(t,x)| \le L,\ x \in G,\ t \in [0,h[$; 3) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x),\ x(0) = x_0,\ x_0 \in G, \qquad (3)$$

является непрерывным решением уравнения $\dot{x} = Ax + bu(t),\ x(0) = x_0$,
при $u(t) = u(t - kh, x(kh)),\ t \in [kh, (k+1)h[,\ k = 0,1,\ldots$; 4) система (3) асимптотически устойчива в G.

Выберем натуральное число $N\ (N > n)$, вещественные числа $h > 0$, $L > 0$. Положим $t^* = Nh$. Кусочно-постоянную функцию $u(t), t \ge 0$, $u(t) = u_j,\ t \in [(j-1)h, jh[$, $j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую ограничению $|u(t)| \le L,\ t \ge 0$ будем называть доступным управлением. На введенном множестве доступных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия:

$$t^* \to \min, \qquad (4)$$

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0, \qquad (5)$$

$$x(t^*) = 0, \qquad (6)$$

$$|u(t)| \le L,\ t \ge 0. \qquad (7)$$

Доступное управление $u(t), t \ge 0$ назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничению (7), порождает такую траекторию $x(t), t \ge 0$, системы (5), которая за конечное время $t^* = t^*(u)$ достигает состояния равновесия (6). Допустимое управление $u^0(t \mid x_0)$, $t \in [0, t^*(u^0)]$, будем называть *оптимальным по быстродействию программным управлением* со временем быстродействия $t^{*0} = t^*(u^0)$ для состояния x_0, если: 1) t^{*0} – наименьшее время из возможных $t^* = t^*(u)$ для допустимых управлений; 2) $\max\limits_{t \in [0, t^{*0}]} |u^0(t)| =$ $= \min\limits_{u^*} \max\limits_{t \in [0, t^{*0}]} |u^*(t)|$, где минимум берется по всем допустимым управлениям $u^*(t), t \in [0, t^*(u^*)]$, для которых время $t^*(u^*)$ совпадает со временем оптимального быстродействия t^{*0}.

Для определения оптимального по быстродействию управления типа обратной связи погрузим задачу (4) – (7) в семейство аналогичных задач оптимального управления

$$t^{*0}(z) = \min t^*,\quad \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = z,\quad x(t^*) = 0,\quad |u(t)| \le L,\ t \ge 0.$$

Обозначим $u^0(t \mid z), t \in [0, t^{*0}(z)]$ – оптимальное программное управление для состояния z, $\overline{X}$ – множество всех z, для которых существует оптимальное программное управление.

Функция $u^0(z) = u^0(0 \mid z), z \in \overline{X}$ называется *оптимальным (стартовым) по быстродействию управлением типа обратной связи* в задаче оптимального управления (4) – (7).

Описан и реализован алгоритм построения стабилизирующей по быстродействию обратной связи. Результаты иллюстрируются на примере одной динамической системы четверного порядка [1], [2].

Литература

1. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов , Ф.М. Кириллова , О.И. Костюкова // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1992. – № 4 – С. 3 – 19.

2. Габасов, Р. Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 90 – 111.