Н. В. Муха, Е. М. Березовская
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКЕ

В работе рассматриваются не итерационные методы суперпозиции, прогонки, сопряженного оператора решения граничных задач.

Метод суперпозиции или метод дополнительных функций основывается на принципе, согласно которому, решение граничной задачи сводится в общем случае к двум или нескольким задачам с начальными условиями (задачам Коши), а их можно решить одним из прямых методов, например методом Рунге – Кутты. Затем решение исходной задачи получается как комбинация найденных решений. Такой подход позволяет избежать итераций.

В методе прогонки линейные граничные задачи преобразуются к задачам Коши. Недостающие начальные условия находятся на этапе прямой прогонки, который включает в себя построение новой задачи Коши и ее интегрирование от начальной точки. После нахождения недостающего начального условия во второй точке, искомое решение находится при помощи обратной прогонки исходной системы дифференциальных уравнений от конечной (второй) точки до начальной.

Метод сопряженного оператора основывается на понятии сопряженной системы уравнений, матрица коэффициентов которой является транспонированной со знаком минус матрицей коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений. Эта сопряженная система осуществляет связь между граничными условиями исходной задачи в начальной и конечной точках.

В работе рассмотренные методы применяются для решения задачи о трехслойной балке. Трехслойная балка состоит из параллельных слоев различных материалов. Для такой балки, равномерно нагруженной по всей длине, что деформация сдвига описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением $d^3\eta/dx^3 - k^2\, d\eta/dx + a = 0$, где k и – физические параметры, зависящие от упругих свойств слоев, с граничными условиями $d\eta(0)/dx = d\eta(1)/dx = 0$ и $\eta(1/2) = 0$.

В результате имеется трехточечная граничная задача.

Решения, найденные рассматриваемыми методами для значений параметров $a = 1$, $k = 5$ и 10, и решения, полученные в системе Mathematica, практически совпадают с соответствующими численными значениями, полученными по известной формуле ее точного решения:

$$\eta(x) = (a / k^3)((\sin(k/2) - sh(kx)) + a(x - 0.5)/k + th(k/2)(ch(kx) - ch(k/2))) .$$

Таким образом, данные методы можно применять для решения других технических задач с хорошей вычислительной точностью.