М. В. Сидорцов
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА−ПАДЕ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Аппроксимациями Эрмита-Паде I типа (Latin type) для набора экспоненциальных функций $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=0}^{m}$ называют $m+1$ многочлен $A_0(z), A_1(z), ..., A_m(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R(z) = \sum_{p=0}^{m} A_p(z)e^{pz} = O(z^{mn+n-1}), \qquad (1)$$

где предполагается, что хотя бы один из многочленов $A_p(z)$ тождественно не равен нулю [1-2].

Многочлены $A_1(z), A_2(z), ..., A_n(z)$, удовлетворяющие равенству (1), могут быть получены решением линейной системы $mn+n-1$ однородных уравнений с $mn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Покажем, что такие нетривиальные решения могут быть записаны в явном виде.

Действительно, пусть C_0 − граница круга с центром в нуле, радиус которого меньше 1, а C_∞ − граница круга с центром в нуле, радиус которого больше чем m.

Целью сообщения является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Справедливы равенства*

$$A_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{\prod_{l=0}^{m} (\xi + p - l)^n}, \; 0 \le p \le m,$$

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{\prod_{l=0}^{m} (\xi - l)^n}.$$

Утверждения теоремы без доказательств были анонсированы в работе [2]. Полученное мною доказательство основано на применении интегральной теоремы Коши и теоремы Коши о вычетах и опирается на тот факт, что сумма всех вычетов аналитической функции в расширенной комплексной плоскости равна нулю.

Литература

1 Hermite, C. Sur la generalisation des fractions continues algebriques/ C. Hermite// Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A − 1883. − V. 21. − P. 289−308.

2 Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky// J. Approx. Theory. − 1997. − V. 90, № 2. − P. 283−298.