УДК 621.373 : 535

# О ДИФРАКЦИОННЫХ ПОТЕРЯХ В ОТКРЫТЫХ КОНФОКАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРАХ С ЗЕРКАЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

*А. Г. Рамм*

Даны оценки дифракционных потерь для открытых резонаторов с зеркалами произвольной формы, имеющими центр симметрии. Указаны вариационные минимаксимальные принципы, позволяющие вычислять потери. Результаты основаны на некоторых свойствах интегрального уравнения теории резонаторов, которые ранее в литературе не отмечались.

## Постановка задачи

В работе [1] для плотности $f(x, y)$ тока на поверхности зеркал, которые предполагаются одинаковыми конфокальными, получено интегральное уравнение

$$Af \equiv \frac{b}{2\pi} \int\limits_S \exp\{-ib(x, u)\} f(u)\, du = \lambda f(x). \tag{1}$$

Здесь $q=k/l$, $k$ — волновое число, $l$ — расстояние между зеркалами, $x=(x_1, x_2)$, $u=(u_1, u_2)$, $du=du_1du_2$, $(x, u)=x_1u_1+x_2u_2$, $S$ — область на плоскости $u=(u_1, u_2)$, на которую проектируется поверхность зеркала. Предполагается, что $S$ — центрально симметричная область; начало координат служит ее центром симметрии. Если $\lambda_n$ — собственное число уравнения (1), то дифракционные потери соответствующего собственного колебания (моды) определяются формулой

$$\alpha_n = 1 - |\lambda_n|^2. \tag{2}$$

В работе [2] для случая, когда $S$ — круг или прямоугольник при $n=0$, получены оценки $\alpha_0$ при увеличении размера зеркала. Например, для случая, когда $S$ — круг радиуса $r$, $c \equiv br^2$, получена формула

$$\alpha_0 = 8\pi c \exp(-2c)\,[1 + 0(1/c)], \quad c \to \infty. \tag{3}$$

Этот результат оказалось возможным получить потому, что для данной специальной формы области ($S$ — круг) интегральное уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для произвольной области такое сведение невозможно. В работе [3] доказано неравенство

$$\alpha_{0e} \leqslant \alpha_0 \leqslant \alpha_{0i}. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_{0i}$, $\alpha_{0e}$ — потери для зеркал $S_i$, $S_e$ соответственно, $S_i \subset S \subset S_e$. Включение здесь теоретико-множественное, начало координат находится в центре зеркал $S_i$, $S_e$. Из оценки (4) следует, что потери при $n=0$ для зеркала $S$ можно оценить сверху и снизу величинами типа (3), причем в качестве $S_i$, $S_e$ можно, например, брать вписанные в $S$ и описанные вокруг $S$ круги радиусов $r_i$, $r_e$. При этом $c_i=br_i^2$, $c_e=br_e^2$. Приведенное в работе [3] доказательство основано на известном спектральном представлении оператора Фурье.

Цель данной работы заключается, во-первых, в указании другого, более общего подхода к задаче, позволяющего установить внутреннюю причину существования оценок вида (4) и оценок такого типа для $\alpha_n$ при любом $n$, во-вторых, в формулировке вариационных принципов для $\alpha_n$ при любом $n$. Из этих принципов неравенства типа (4) также вытекают непосредственно. Развиваемый метод основан на соображениях, которые впервые излагались в работе [4] в связи с задачей о разложении по собственным функциям несамосопряженных интегральных операторов, возникающих в теории дифракции.

Отметим, что в работах [5, 6] предложен общий метод вычисления комплексных полюсов функции Грина в задачах рассеяния (в [5] рассмотрена задача квантовомеханического рассеяния на потенциале, в [6] — задача дифракции волн в произвольной открытой системе). Подход, излагаемый в данной работе, существенно использует симметрию задачи. Наши рассуждения опираются на один из результатов приложения к работе [8].

## Описание метода. Формулировка результатов

1. Начнем со следующего основного утверждения, которое в другой ситуации использовалось в [4].

Утверждение 1. Оператор $A$ в уравнении (1) является нормальным оператором в гильбертовом пространстве $H=L_2(S)$.

Напомним, что нормальным называют оператор, удовлетворяющий условию $AA^*=A^*A$, где $A^*$ — сопряженный к $A$ оператор. Утверждение 1 проверяется прямым вычислением, в котором используется существование центра симметрии у области $S$. Это вычисление показывает, что ядро оператора $AA^*-A^*A$ тождественно равно нулю. Подсчет показывает, что ядро оператора $A^*A-AA^*$ равно $J=\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 2i\int\limits_S \sin\{(z-u,\ x)\}\,dx$. Чтобы доказать равенство $J=0$, сделаем замену переменной $x=-y$. В результате, замечая, что область $S$ инвариантна относительно такой замены (так как она центрально симметрична), получаем равенство $J=-J$, из которого следует $J=0$. Утверждение 1 доказано.

В работе [4] для случая, когда $S$ — произвольная поверхность в трехмерном пространстве, проведено близкое вычисление.

Утверждение 2 ([7], стр. 193). Пусть $A$ — нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\lambda_n$, $s_n$ — его собственные соответственно сингулярные числа. Тогда

$$|\lambda_n|=s_n. \tag{5}$$

Напомним, что $s_n(A)=\lambda_n\{(A^*A)^{1/2}\}\geqslant 0$. Ядро оператора $A^*A$ неотрицательно определено в любой области $S$. Для таких ядер в работе [8] среди других установлен следующий результат.

Утверждение 3. Пусть $R(x,\ y)$ неотрицательно определенное ядро в области $D$, $\mu_n(D)$ — его собственные числа, занумерованные в порядке убывания. Если $D'\subset D$, то $\mu_n(D')\leqslant\mu_n(D)$.

Из утверждений 1—3 и определения (2) непосредственно вытекает неравенство

$$\alpha_{ne}\leqslant\alpha_n\leqslant\alpha_{ni},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6}$$

которое содержит (4) в качестве частного случая. Более того, для сингулярных чисел $s_n(A)$, которые суть собственные числа неотрицательного оператора с $A^*A)^{1/2}$, известны разнообразные оценки и вариационные принципы [7]. В частности, известно минимаксимальное представление Вейля—Куранта, которое для нормального оператора $A$ примет вид

$$|\lambda_n(A)|^2=s_n^2(A)=\min_{M_n}\max_{\substack{\|f\|=1\\ f\in M_1^{\perp}}}\|Af\|^2,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

Здесь $M_n$ — $n$-мерное подпространство в $H$, $M_n^\perp$ — его ортогональное дополнение в $H$, $n=0,1, 2, 3\ldots$ Формула (7) может быть использована для расчета $|\lambda_n|^2$ и, следовательно [см. формулу (2)], дифракционных потерь.

Замечание 1. В работе [8] приведен результат, касающийся поведения максимального собственного числа неотрицательно определенного ядра при условии, что область интегрирования, расширяясь равномерно по всем направлениям, стремится заполнить всю плоскость ($S \to E_2$). Для ядра оператора $A^*A$, которое имеет вид

$$\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \int\limits_S \exp\{ib(z-u,\ x)\}\,dx,$$

упомянутый результат приводит к соотношению $|\lambda_0(S)| \to 1$, при $S \to E_2$, которое, впрочем, можно получить из формулы (2), если учесть, что $\alpha_0 \to 0$ при $S \to E_2$.

Замечание 2. Так как оператор (1) нормальный, то система его собственных функций образует ортонормированный базис в $H$. Поскольку область $S$ центрально симметрична (центр симметрии — начало координат), оператор $A$ уравнения (1) переводит симметричные функции $f(x)=f(-x)$ в симметричные, антисимметричные $f(x)=-f(-x)$ — в антисимметричные. Так как $f(x) \equiv [f(x)+f(-x)]/2+[f(x)-f(-x)]/2=f_c+f_a$, то любая функция представима в виде суммы симметричной и антисимметричной. Если плоская область центрально симметрична (не меняется при замене $x \to -x$), то легко проверить, что в $H=L_2(S)$ симметричные функции ортогональны антисимметричным. Поэтому $L_2(S)$ разлагается в ортогональную сумму инвариантных относительно оператора $A$ подпространств, состоящих из симметричных и антисимметричных функций. Этот вывод имеется в работе [3]. Отсюда следует, что собственные функции уравнения (1) можно разбить на симметричные и антисимметричные. Такое разбиение, как следует из изложенного, тесно связано с центральной симметрией области.

Замечание 3. Поставим вопрос: при какой форме центрально симметричной области $S$ фиксированной площади дифракционные потери будут минимальны? Ответ: для круговой области $S$. Действительно, пусть $R$, $r$ расстояния от начала координат до наиболее и соответственно наименее удаленной точки границы $\Gamma$ области $S$. Из результатов [2] следует, что для прямоугольной области $\alpha_0 \sim c\exp(-2c)$, $c \equiv ba^2$, где $2a$ — меньшая сторона прямоугольника. Поэтому можно думать, что для произвольной центрально симметричной области $\alpha_0 \sim c\exp(-2c)$, $c=br^2$, где $r$ — расстояние от начала кординат до ближайшей точки $\Gamma$. Поэтому потери при $c \gg 1$ минимальны среди всех центрально симметричных областей $S$ фиксированной площади $|S|$ для той области, для которой $r=\max$. Очевидно, такой областью будет круг радиуса $r=\{\pi^{-1}|S|\}^{1/2}$. Приведенное рассуждение не есть строгое доказательство, так как соотношение $\alpha_0 \sim c \times \exp(-2c)$, $c=br^2$, $r=\min\limits_{x\in\Gamma}|x|$ не доказано для произвольной области. Тем не менее оно кажется убедительным. Было бы интересно дать строгое доказательство сформулированной гипотезы: среди всех центрально симметричных областей данной площади минимальные дифракционные потери на нулевой моде имеет круглое зеркало.

## Выводы.

1. Показано, что интегральный оператор в теории конфокальных резонаторов нормален.
2. Даны неравенства для дифракционных потерь собственных колебаний с любым индексом резонатора с произвольной формой зеркал.
3. Указан вариационный принцип для отыскания дифракционных потерь.

4. Высказана гипотеза: среди всех центрально симметричных зеркал данной площади минимальные дифракционные потери на нулевой моде имеет круглое зеркало.

### Литература


[1] А. F o x, T. L i. Proc. IEEE, *51*, 80, 1961.

[2] Л. А. В а й н ш т е й н. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Изд. «Советское радио», М., 1965.

[3] М. М. П о п о в. ДАН СССР, *219*, 63, 1974.

[4] А. Г. Р а м м. Радиотехника и электроника, *18*, 496, 1973.

[5] А. Г. Р а м м. ДАН СССР, *204*, 1071, 1972.

[6] А. Г. Р а м м. Радиотехника и электроника, *17*, 1362, 1972.

[7] И. М. Г л а з м а н, Ю. И. Л ю б и ч. Конечномерный линейный анализ. Изд. «Наука», М., 1969.

[8] А. Г. Р а м м. Проблемы передачи информации, *9*, 22, 1973.


Поступило в Редакцию 19 декабря 1974 г.