Проблемы физики, математики и техники, № 3 (32), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ ФОРМАЦИОННЫЕ РАДИКАЛЫ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON THE INTERSECTIONS OF MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS CONTAINING FORMATION RADICALS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Для непустой радикальной формации $\mathfrak{F}$ и конечной группы G доказано утверждение: если существуют максимальные подгруппы группы G, содержащие $G_{\mathfrak{F}}$, но не содержащие $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, т. е. $\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$, и факторгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \big/ \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима, то $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq \mathrm{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. В частности, если $G \neq G_{\mathfrak{F}}$ и разрешим $\mathrm{Soc}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Получены следствия для произведений непустых радикальных формаций, в частности, для формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^{n-1}$, n − любое натуральное число.

Ключевые слова: *радикальные формации конечных групп*, *произведения радикальных формаций*, $\mathfrak{F}$ *-радикалы*, *пересечения максимальных подгрупп.*

For nonempty radical formation $\mathfrak{F}$ and a finite group G the following statement was proved: if there exist maximal subgroups of G containing $G_{\mathfrak{F}}$, but not containing $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, that is $\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$, and the factor group $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \big/ \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ is solvable, then $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq \mathrm{F}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. In particular, if $G \neq G_{\mathfrak{F}}$ and $\mathrm{Soc}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ is solvable, then $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. The corresponding consequences were obtained for products of nonempty radical formations, in particular for $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^{n-1}$, n is any natural number.

Keywords: *radical formations of finite groups*, *products of radical formations*, $\mathfrak{F}$ *-radicals*, *intersections of maximal subgroups.*

1 Предварительные сведения и результаты

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1].

Определение [1]. *Пусть* $\mathfrak{X}_1$ *и* $\mathfrak{X}_2$ − *некоторые формации. Если* $\mathfrak{X}_2 = \varnothing$, *то* $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 = \varnothing$. *Если* $\mathfrak{X}_2 \neq \varnothing$, *то* $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ *обозначает класс всех тех групп* G, *для которых* $G^{\mathfrak{X}_2} \in \mathfrak{X}_1$. *Класс* $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ *называется произведением формаций* $\mathfrak{X}_1$ *и* $\mathfrak{X}_2$.

Из определения следует, что $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 = \varnothing$ тогда и только тогда, когда одна из формаций $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ является пустой. По теореме 1.1 [1] произведение любых двух формаций также является формацией. Произведение упорядоченного набора формаций $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \ldots, \mathfrak{X}_{n-2}, \mathfrak{X}_{n-1}, \mathfrak{X}_n$ определяется в [1] как результат последовательного умножения следующим образом:

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\ldots\mathfrak{X}_{n-2}\mathfrak{X}_{n-1}\mathfrak{X}_n = \\ = \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2(\mathfrak{X}_3(\ldots(\mathfrak{X}_{n-2}(\mathfrak{X}_{n-1}\mathfrak{X}_n\underbrace{))\ldots)))}_{n-2}.$$

Если, в частности, $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то по обозначению $\underbrace{\mathfrak{X}\mathfrak{X}\ldots\mathfrak{X}}_{n} = \mathfrak{X}^n$. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ полагаем $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{E} = \{1\}$ − единичная формация.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ − некоторые классы групп. Через $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{X}$ обозначают множество всех групп, каждая из которых является расширением $\mathfrak{F}$-группы с помощью $\mathfrak{X}$-группы. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ − формации, причём формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно нормальных подгрупп, то $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{X}$ − формация, совпадающая с произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{X}$ [1, теорема 2.1].

Среди используемых в статье обозначений встречаются следующие: $\mathfrak{N}_\pi$ − формация всех нильпотентных π-групп, π − некоторое множество простых чисел; $\mathfrak{S}$ − формация всех разрешимых групп; $\mathfrak{N}^*$ − формация всех квазинильпотентных групп, $\mathrm{F}^*(G)$ − квазинильпотентный радикал группы G. Пусть $\mathfrak{M}$ − некоторое множество линейных упорядочений множества всех простых чисел, $\mathfrak{F}_\varphi$ − формация всех φ-дисперсивных групп, $\varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\varphi\in\mathfrak{M}} \mathfrak{F}_\varphi$ − радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$. Пусть N − нормальная подгруппа группы G; обозначаем $\tilde{\mathrm{F}}_N(G)/N = Soc(G/N)$. В случае $N = \Phi(G)$ принято обозначение $\tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$ [1, с. 79].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация. Через $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)$ $(\Phi_{\overline{G_\mathfrak{F}}}(G))$ будем обозначать пересечение всех максимальных подгрупп группы G, каждая из которых содержит (не содержит, соответственно) $\mathfrak{F}$-радикал $G_\mathfrak{F}$ группы G; используем обозначение $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)}(G)$. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ − непустые радикальные формации. Через $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G)$ обозначаем пересечение всех максимальных подгрупп группы G, каждая из которых содержит $\mathfrak{F}_1$-радикал $G_{\mathfrak{F}_1}$ группы G, но не содержит $\mathfrak{F}_2$-радикал $G_{\mathfrak{F}_2}$ группы G. При обозначении пересечений $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)$, $\Phi_{\overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$ и $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G)$ вместо радикалов $\mathrm{F}(G)$ и $\mathrm{F}^*(G)$ используем символы F и F^*; например, $\Phi_{\mathrm{F}}(G)$, $\Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G)$ и $\Phi_{\mathrm{F},\overline{\mathrm{F}^*}}(G)$ обозначают $\Phi_{\mathrm{F}(G)}(G)$, $\Phi_{\mathrm{F}(G),\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G)$ и $\Phi_{\mathrm{F}(G),\overline{\mathrm{F}^*(G)}}(G)$, соответственно. Через $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)$ обозначаем пересечение всех максимальных подгрупп группы G, каждая из которых содержит произведение $G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}$ радикалов $G_{\mathfrak{F}_1}$ и $G_{\mathfrak{F}_2}$ группы G.

Так как группа $G = 1$ по определению совпадает со своей максимальной подгруппой [1, с. 249], то $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(1) = 1$. Если $G \neq 1$, то $G = G_\mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда в G нет максимальных подгрупп, содержащих $G_\mathfrak{F}$; определяем в этом случае $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) = G$. В каждом случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, удовлетворяющих тем или иным указанным условиям, полагаем, что соответствующие пересечения совпадают с G.

***Лемма* 1.1.** *Пусть M и K нормальные подгруппы группы G, $K \subseteq M$. Тогда*

$$\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K = \tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K).$$

Доказательство. Положим, $M = G$. Тогда

$$\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K = \tilde{\mathrm{F}}_G(G)/K = G/K;$$

$$\tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K) = \tilde{\mathrm{F}}_{G/K}(G/K) = G/K.$$

Пусть $M \neq G$, и пусть N/M − произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G/M. Так как $K \subseteq M \subset N \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_M(G)$, то, очевидно, $N/K/M/K$ − минимальная нормальная подгруппа группы $G/K/M/K$. Значит,

$$\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K).$$

А так как $G/M \cong G/K/M/K$, то

$$Soc(G/M) \cong Soc(G/K/M/K),$$

т. е. $\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/M \cong \tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K)/M/K$. Кроме того,

$$\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/M \cong \tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K/M/K.$$

Значит, $\left|\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K\right| = \left|\tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K)\right|$. Следовательно, $\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K = \tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K)$. □

Ввиду теоремы 13.8 X из [2] и леммы 4.14 A из [3] справедливо следующее утверждение.

***Лемма* 1.2** [4, c.155]. *Если в группе G подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, то $Soc(G) = \mathrm{F}^*(G)$.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ − непустые классы групп. Имеют место следующие утверждения*:

(1) $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 \subseteq \mathrm{Ext}_{Ext_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$;

(2) *если класс $\mathfrak{F}_1$ является радикальным, а $\mathfrak{F}_2$ – гомоморф, то* $\mathrm{Ext}_{Ext_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$.

Доказательство. Докажем утверждение (1). Пусть группа $G \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Это означает, что $G/N \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$ для некоторой нормальной в G $\mathfrak{F}_1$-подгруппы N, а $G/N/M/N \cong G/M \in \mathfrak{F}_3$ для некоторой нормальной в G/N $\mathfrak{F}_2$-подгруппы M/N. Значит, $M \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2$, а $G \in \mathrm{Ext}_{Ext_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Следовательно, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 \subseteq \mathrm{Ext}_{\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть группа $G \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}_3$ для некоторой нормальной в G $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2$-подгруппы N, а $N/R \in \mathfrak{F}_2$ для некоторой нормальной в N $\mathfrak{F}_1$-подгруппы R. Так как $\mathfrak{F}_1$ – непустой радикальный класс, а R – субнормальная в G $\mathfrak{F}_1$-группа, то нормальное замыкание $R^G \subseteq G_{\mathfrak{F}_1}$ [1, следствие 7.7.1]. Значит, $N/R^G \in \mathfrak{F}_2$, так как $\mathfrak{F}_2$ – гомомоф;

$$G/R^G/N/R^G \cong G/N \in \mathfrak{F}_3.$$

Таким образом, $G/R^G \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$, а $G \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Следовательно, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 \subseteq \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Утверждение (2) с учётом утверждения (1) доказано. □

***Лемма* 1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, ..., \mathfrak{F}_n$ – непустые радикальные формации. Тогда*

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3...\mathfrak{F}_n = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3...\mathfrak{F}_{n-1})\,\mathfrak{F}_n,\ n \geq 3.$$

Доказательство проведём по индукции. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ – непустые радикальные формации.

Докажем, что произведение $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$, определяемое как $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3)$, совпадает с $(\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$. По лемме 1.3 (2) $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 = \mathrm{Ext}_{\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3$. Ввиду S_n-замкнутости $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ по теореме 2.1 [1] имеем: $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3)$. Так как произведение радикальных формаций $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ – радикальная формация [5, лемма 3], а значит, S_n-замкнутая, то $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1}\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_3 = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$. Итак, $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3) = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$, т. е. для $n=3$ утверждение леммы выполняется.

Пусть $n \ge 4$. Предположим, что утверждение леммы выполняется для $n = k-1$, докажем его справедливость для $n = k$. Заметим, что ввиду леммы 3 из [5] произведение r радикальных формаций является радикальной формацией для любого натурального $r \ge 2$. Таким образом,

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{k-1}\mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{k-1}\mathfrak{F}_k) =$$
$$= \mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{k-1}\mathfrak{F}_k)) = \mathfrak{F}_1((\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{k-1})\mathfrak{F}_k) =$$
$$= (\mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{k-1}))\mathfrak{F}_k = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{k-1})\mathfrak{F}_k. \quad \square$$

***Следствие* 1.4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация. Тогда $\mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{F}$, $n \ge 1$.*

2 Основные результаты

***Лемма* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация, G – группа. Тогда*

$$\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Phi(G/G_\mathfrak{F});\ \Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}.$$

Доказательство. Легко видеть, что $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Phi(G/G_\mathfrak{F})$ как в случае $G = G_\mathfrak{F}$, так и в случае $G \ne G_\mathfrak{F}$. Ввиду теоремы 2.1 [1] $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \in Ext_\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. $\square$

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ − непустые радикальные формации, G − группа. Тогда*

$$(\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2}.$$

Доказательство. Пусть $G = 1$. Тогда единичная максимальная подгруппа G совпадает с $G_{\mathfrak{F}_1} = G_{\mathfrak{F}_2}$, по определению $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1}}}(1) = 1$. Значит, равенство $(\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(1))_{\mathfrak{F}_2} = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(1))_{\mathfrak{F}_2}$ верно. Пусть $G \ne 1$. Предположим, что $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = G$, т. е. в неединичной группе G нет максимальных подгрупп, содержащих $G_{\mathfrak{F}_1}$, что означает $G = G_{\mathfrak{F}_1}$. Тогда в G нет и ни одной максимальной подгруппы, которая бы содержала $G_{\mathfrak{F}_1}$, но не содержала $G_{\mathfrak{F}_2}$. Согласно определению, $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$. Таким образом, и в этом случае утверждение теоремы выполняется. Пусть $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G) \ne G$, а $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$. Это означает, что в G существуют максимальные подгруппы, содержащие $G_{\mathfrak{F}_1}$, и все они содержат $G_{\mathfrak{F}_2}$, откуда $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)$. Так как $G_{\mathfrak{F}_2} \subseteq \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G)$ и $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G)$ − характеристическая подгруппа в G, то $(\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}$. А так как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$, то $(\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}$. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \ne G$. Очевидно,

$$(\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}_2} =$$
$$= (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)) \cap G_{\mathfrak{F}_2} =$$
$$= (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2},$$

ибо $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}, \overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)$. $\square$

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация, G − группа. Тогда*

$$\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) = (\Phi_{G_\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Phi_{G_\mathfrak{F}, \overline{G_\mathfrak{X}}}(G))_\mathfrak{X} = (\Phi_{G_\mathfrak{F}, \overline{G_\mathfrak{X}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Доказательство. Так как $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$ ввиду леммы 2.1, то

$$(\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{X} = (\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} = \Phi_{G_\mathfrak{F}}(G).$$

По теореме 2.1 $(\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{X} = (\Phi_{G_\mathfrak{F}, \overline{G_\mathfrak{X}}}(G))_\mathfrak{X}$; в частности, $\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) = (\Phi_{G_\mathfrak{F}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Значит,

$$\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) = (\Phi_{G_\mathfrak{F}, \overline{G_\mathfrak{X}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}. \quad \square$$

Применение леммы 1.4 позволяет распространить следствие 2.1.1 теоремы 2.1 на произведение произвольного числа радикальных формаций $\mathfrak{F}_i$. Рассматривая в дальнейшем непустые радикальные формации $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ (среди которых могут быть и совпадающие) и принимая обозначение $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{E} = \{1\}$, для любой группы G можно полагать $G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}} = G_\mathfrak{E} = 1$ при $n = 1$ ввиду $\mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_{n-1} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_{n-1}$.

***Следствие* 2.1.2.** *Для любой группы G имеют место следующие утверждения.*

(1) *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ − непустые радикальные формации. Тогда*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_\mathfrak{X}}}(G))_\mathfrak{X} = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_\mathfrak{X}}}(G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\ldots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}$.

(2) *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация. Тогда*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}$, *и любого натурального числа n.*

Следующий результат вытекает из следствия 2.1.2 теоремы 2.1 с применением следствия 1.4.1 леммы 1.4, согласно которому $\mathfrak{N}^n = \mathfrak{N}^{n-1}\mathfrak{N}$, $n \geq 1$.

***Следствие* 2.1.3.** *Для всякой группы G и любой радикальной формации* $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию* $\mathfrak{N}^n$, $n \geq 1$,

$$\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = (\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G))_{\mathfrak{N}^n} =$$
$$= (\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^n}.$$

В частности,

$$\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = (\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{S}} = (\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{N}^n}.$$

Выделяя из следствий 2.1.2 и 2.1.3 случай $n = 1$, получаем

***Следствие* 2.1.4.** [6, следствия 2.1.1, 2.1.5, 2.1.7 теоремы 2.1]. *Для любой группы G и для всякой радикальной формации* $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$,

$$\Phi(G) = \mathrm{F}(\Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G)) = (\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = \mathrm{F}(\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G)).$$

В частности, $\Phi(G) = \mathrm{F}(\Phi_{\overline{\mathrm{F}^*}}(G))$;

$$\Phi(G) = (\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{S}} = \mathrm{F}(\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G));$$
$$\Phi(G) = (\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}} = \mathrm{F}(\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}}}}(G)).$$

***Следствие* 2.1.5.** *Для всякой группы G и для любой радикальной формации* $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию всех метанильпотентных групп* $\mathfrak{N}^2$,

$$\Phi_{\mathrm{F}}(G) = (\Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G))_{\mathfrak{N}^2} =$$
$$= (\Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

В частности,

$$\Phi_{\mathrm{F}}(G) = (\Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{S}} = (\Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

***Следствие* 2.1.6.** *Для всякой группы G справедливо равенство* $\mathrm{F}^*(\Phi_{\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}^*}}(G)) = \mathrm{F}(G)$.

Доказательство. По теореме 2.1

$$\mathrm{F}^*(\Phi_{\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}^*}}(G)) = \mathrm{F}^*(\Phi_{\mathrm{F}}(G)).$$

Так как $\Phi_{\mathrm{F}}(G) \in \mathfrak{N}^2$, а значит, группа $\Phi_{\mathrm{F}}(G)$ разрешима, то $\mathrm{F}^*(\Phi_{\mathrm{F}}(G)) = \mathrm{F}(\Phi_{\mathrm{F}}(G)) = \mathrm{F}(G)$.

Так как по лемме 2.1 $\Phi_{\mathrm{F}^*}(G) \in \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, то имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 2.1.7.** *Для всякой группы G и для любой радикальной формации* $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию* $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$,

$$\Phi_{\mathrm{F}^*}(G) = (\Phi_{\mathrm{F}^*, \overline{G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Phi_{\mathrm{F}^*, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\mathrm{F}^*, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}.$$

Полагая в теореме 2.1 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.1.8.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация, G − группа. Тогда*

$$(\Phi(G))_{\mathfrak{F}} = (\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}}.$$

В частности:

(1) *для любого простого числа p справедливо равенство*

$$\mathrm{O}_p(\Phi(G)) = \mathrm{O}_p(\Phi_{\overline{\mathrm{O}_p(G)}}(G));$$

(2) $\quad \mathrm{O}_\pi(\Phi(G)) = \mathrm{O}_\pi(\Phi_{\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G)) =$
$$= (\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{N}_\pi}}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi} = (\Phi_{\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi}$$

для произвольного множества простых чисел π; *если, в частности,* $\pi = \pi(\Phi(G))$, *то*

$$\Phi(G) = \mathrm{O}_\pi(\Phi_{\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G)) =$$
$$= (\Phi_{\overline{G_{\mathfrak{N}_\pi}}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi} = (\Phi_{\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi}.$$

Следствие 2.1.8 включает также случай $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ утверждения следствия 2.1.4.

***Лемма* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ − *непустые радикальные формации, G − группа. Тогда*

$$(G/G_{\mathfrak{F}_1})_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2}/G_{\mathfrak{F}_1}.$$

Доказательство. Предположим, что $G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2} \neq M$, где $M/G_{\mathfrak{F}_1} = (G/G_{\mathfrak{F}_1})_{\mathfrak{F}_2}$. Так как $M \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, то, согласно предположению, существует нормальная в G $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$-подгруппа N, не содержащаяся в M. Следовательно, $N/K \in \mathfrak{F}_2$ для некоторой нормальной в N $\mathfrak{F}_1$-подгруппы K. Так как K субнормальна в G, то по следствию 7.7.1 из [1] $K \subseteq G_{\mathfrak{F}_1}$. А так как

$$NG_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1} \cong N/N \cap G_{\mathfrak{F}_1} \cong N/K/N \cap G_{\mathfrak{F}_1}/K \in \mathfrak{F}_2,$$

то $NG_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1} \subseteq (G/G_{\mathfrak{F}_1})_{\mathfrak{F}_2} = M/G_{\mathfrak{F}_1}$, откуда $N \subseteq M$.

Полученное противоречие означает, что $M = G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2}$. □

Применение леммы 1.4 позволяет распространить лемму 2.2 на произведение произвольного числа радикальных формаций $\mathfrak{F}_i$.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ − *непустые радикальные формации, G − группа. Тогда* $(G/G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}})_{\mathfrak{F}_n} = G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_n}/G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}$.

С применением следствия 1.4.1 леммы 1.4 получаем

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация, G − группа. Тогда*

$$(G/G_{\mathfrak{F}^{n-1}})_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}^n}/G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

В частности, $\mathrm{F}(G/G_{\mathfrak{N}^{n-1}}) = G_{\mathfrak{N}^n}/G_{\mathfrak{N}^{n-1}}$, $n \geq 1$.

***Лемма* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация, G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

(1) $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \mathrm{F}^*(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$;

(2) $\mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$;

$$G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

(3) *Тогда и только тогда* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, *когда* $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим.*

Доказательство. Обозначим $G/G_{\mathfrak{F}} = \overline{G}$.

(1) Согласно лемме 1.2 имеем

$$Soc(\overline{G}/\Phi(\overline{G})) = \mathrm{F}^*(\overline{G}/\Phi(\overline{G})).$$

Так как ввиду леммы 2.1 $\overline{G}/\Phi(\overline{G}) \cong G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \mathrm{F}^*(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$.

(2) Применяя леммы 2.1 и 2.2, имеем:

$$\mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) \cong \mathrm{F}(\overline{G}/\Phi(\overline{G})) = \mathrm{F}(\overline{G})/\Phi(\overline{G}) =$$
$$= G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/G_{\mathfrak{F}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} \cong G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G).$$

А так как, очевидно, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$, то $\mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$.

(3) Ввиду утверждения (1), тогда и только тогда $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим, когда

$$Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)) = \mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

Теперь применим утверждение (2). □

***Следствие* 2.3.1.** *Для всякой группы G имеют место следующие утверждения.*

(1) $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{\mathrm{F}^*}(G)) = \mathrm{F}^*(G/\Phi_{\mathrm{F}^*}(G))$;

(2) $\mathrm{F}(G/\Phi_{\mathrm{F}^*}(G)) = G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}.}/\Phi_{\mathrm{F}^*}(G)$;

$$G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}.} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}^*}}(G).$$

(3) *Тогда и только тогда* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}^*}}(G) = G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}.}$, *когда* $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{\mathrm{F}^*}(G))$ *разрешим.*

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ *− непустые радикальные формации, G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

(1) $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)) = \mathrm{F}^*(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$.

(2) $\mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)) = G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$;

$$G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G).$$

(3) *Тогда и только тогда*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) = G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}},$$

когда $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ *разрешим.*

***Следствие* 2.3.3.** *Пусть G − группа. Для любого натурального числа n имеют место следующие утверждения.*

(1) $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)) = \mathrm{F}^*(G/\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G))$.

(2) $\mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)) = G_{\mathfrak{N}^n}/\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)$;

$$G_{\mathfrak{N}^n} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

(3) *Тогда и только тогда* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G) = G_{\mathfrak{N}^n}$, *когда подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)$ *разрешима.*

Отметим, что условие разрешимости $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)$ равносильно условию разрешимости

$$Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G))$$

ввиду следствия 2.1.3 теоремы 2.1, согласно которому $\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{N}^n}$.

***Лемма* 2.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация, G − группа. И пусть факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения*:

(1) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$;

(2) $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$;

(3) $G \neq G_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Докажем равносильность утверждений (2) и (3). Пусть выполняется утверждение (2). Так как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$, то $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, т. е. утверждение (3) выполняется. Пусть выполняется утверждение (3), т. е. $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, что равносильно $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. И предположим, что $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) = G$. Тогда $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G) \supseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Согласно условию, факторгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешима, и по лемме 2.3(3) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, что противоречит $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Таким образом, из утверждения (3) следует утверждение (2).

Докажем равносильность утверждений (1) и (3). Пусть выполняется утверждение (1). Так как

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G,$$

то $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, т. е. выполняется утверждение (3). Пусть выполняется утверждение (3). Как было показано, утверждение (3) равносильно утверждению (2). А из утверждения (2) следует утверждение (1). Значит, утверждения (1) и (3) равносильны. □

***Следствие* 2.4.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ *− непустые радикальные формации, G − группа. И пусть факторгруппа*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G)/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$$

разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения:

(1) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$;

(2) $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \neq G$;

(3) $G \neq G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}$.

***Следствие* 2.4.2.** *Пусть подгруппа*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G), \quad n \geq 1,$$

группы G разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения:

(1) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)\neq G$;

(2) $\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)\neq G$;

(3) $G\neq G_{\mathfrak{N}^{n-1}}$.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация*, G *− группа. Если* $\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$, *факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима*, *то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

В частности, *если* $G\neq G_{\mathfrak{F}}$ *и* $\mathrm{Soc}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим*, *то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Доказательство. Пусть группа

$$N\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

разрешима, $\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$. Тогда

$$N\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\mathrm{F}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

согласно лемме 2.3 (2), $N\subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Значит, $N\subseteq(\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}=\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ ввиду следствия 2.1.1 теоремы 2.1, а потому $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=$ $=\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)$. В частном случае используем лемму 2.3 (3) и лемму 2.4. □

***Замечание* 2.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, G − группа, и пусть $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)=G$. Тогда

$$G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\Phi_{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Значит, $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subset G$, так как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$ по лемме 2.1. Таким образом, согласно лемме 2.3, $\mathrm{F}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ − единичная группа, а значит, $Soc(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^{*}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ − прямое произведение простых неабелевых групп.

В работе [7] приводится пример неразрешимой группы $G=SL(2,5)$, в которой подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини совпадают. Этот пример отвечает рассмотренному в замечании 2.1 случаю: положим $\mathfrak{F}$ − единичная формация.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть G − группа. Если* $\Phi_{\mathrm{F}^{*},\overline{G_{\mathfrak{N}^{*}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$, *факторгруппа*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}^{*}}}(G)\cap\Phi_{\mathrm{F}^{*},\overline{G_{\mathfrak{N}^{*}\mathfrak{N}}}}(G)\big/\Phi_{\mathrm{F}^{*}}(G)$$

разрешима, *то*

$$\Phi_{\mathrm{F}^{*}}(G)=\Phi_{\mathrm{F}^{*},\overline{G_{\mathfrak{N}^{*}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{N}^{*}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}^{*}}}(G).$$

В частности, *если* $G\neq\mathrm{F}^{*}(G)$ *и* $Soc(G\big/\Phi_{\mathrm{F}^{*}}(G))$ *разрешим*, *то*

$$\Phi_{\mathrm{F}^{*}}(G)=\Phi_{\mathrm{F}^{*},\overline{G_{\mathfrak{N}^{*}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{N}^{*}\mathfrak{N}}=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}^{*}}}(G).$$

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2,\ldots,\mathfrak{F}_{n-1}$ *− непустые радикальные формации*, G *− группа. Если* $\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$, *факторгруппа*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G)\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$$

разрешима, *то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G)\subset$$
$$\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G).$$

В частности, если $G\neq G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}$ *и* $\mathrm{Soc}(G\big/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ *разрешим*, *то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}=$$
$$=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G).$$

Следствием теоремы 2.2 является также следующая теорема 2.3.

***Теорема* 2.3.** *Пусть G − группа. Для всякого натурального числа n имеет место следующее утверждение.*

Если $\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)\neq G$, *подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)\cap$ $\cap\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)$ *разрешима*, *то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{N}^{n}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

В частности, *если* $G\neq G_{\mathfrak{N}^{n-1}}$ *и подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)$ *разрешима*, *то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{N}^{n}}=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

Отметим, что условие разрешимости группы $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)$ равносильно условию разрешимости факторгруппы

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^{n}}}}(G)\big/\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)$$

ввиду следствия 2.1.3 теоремы 2.1.

Результат В.С. Монахова работы [7] о том, что в разрешимой неединичной группе G подгруппа Фраттини совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, т. е. $\Phi(G)=\Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G)$, распространяется на необязательно разрешимые группы теоремой 2.3 в случае, если положить $n=1$. В качестве следствия 2.3.1 теоремы 2.3 выделим случай, возникающий при $n=2$.

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть G − группа. Если* $\Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)\neq G$, *подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)\cap\Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)$ *разрешима*, *то* $\Phi_{\mathrm{F}}(G)=\Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)\subset G_{\mathfrak{N}^2}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$.

В частности, если группа G *ненильпотентна и подгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$ *разрешима*, *то*

$$\Phi_{\mathrm{F}}(G)=\Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)\subset G_{\mathfrak{N}^2}=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G).$$

Метанильпотентность пересечения $\Phi_{\mathrm{F}}(G)$ всех максимальных подгрупп, содержащих подгруппу Фиттинга $\mathrm{F}(G)$, для разрешимой ненильпотентной группы G установлена В.С. Монаховым в [7]. Ввиду следствия 2.3.1 теоремы 2.3 этот результат может быть дополнен следующим образом.

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть G − разрешимая ненильпотентная группа. Тогда*

$$\Phi_{\mathrm{F}}(G) = \Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G) \subseteq G.$$

В заключение рассмотрим приложение теоремы 2.3 для разрешимых групп определённой нильпотентной длины.

Определим нильпотентную длину группы $G = \mathrm{F}(G)$ как $n(G) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad G = 1; \\ 1, & \text{если} \quad G \supset 1. \end{cases}$

Так как $\Phi(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{E}}}(G)$, $\Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{E}},\overline{\mathrm{F}}}(G)$ и по определению $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{E} = \{1\}$, то в рамки общей закономерности для разрешимой группы G укладываются случаи: $\Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \mathrm{F}(G)$, если $n(G) \geq 1$, и $\Phi_{\mathrm{F}}(G) = \Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2}$, если $n(G) \geq 2$. Обозначая через $n = n(G)$ нильпотентную длину разрешимой группы G, на основании теоремы 2.3, для соответствующих значений $n \in \{0,1,2,...,k\}$ имеем:

$1 = G_{\mathfrak{E}} = G$, если $n = 0$;

$1 = G_{\mathfrak{E}} \subseteq \Phi(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{E}}}(G) =$

$= \Phi_{G_{\mathfrak{E}},\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{E}}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}(G) = \mathrm{F}(G) = G,$

если $n = 1$;

$1 \subseteq \Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}(G) = \mathrm{F}(G) \subseteq \Phi_{\mathrm{F}}(G) =$

$= \Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G) = G_{\mathfrak{N}^2} = G,$

если $n = 2$;

. . . .

$1 \subseteq \Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}(G) = \mathrm{F}(G) \subseteq \Phi_{\mathrm{F}}(G) =$

$= \Phi_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G) = G_{\mathfrak{N}^2} \subseteq ...$

$... = G_{\mathfrak{N}^{i-1}} \subseteq \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{i-1}}}(G) =$

$= \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{i-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^i}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{i-1}}}}(G) = G_{\mathfrak{N}^i} \subseteq ...$

$... = G_{\mathfrak{N}^{k-1}} \subseteq \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{k-1}}}(G) =$

$= \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{k-1}},\overline{G_{\mathfrak{N}^k}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{k-1}}}}(G) = G_{\mathfrak{N}^k} = G,$

если $n = k$.

Отметим, что $G_{\mathfrak{N}^i} / G_{\mathfrak{N}^{i-1}} = Soc(G / G_{\mathfrak{N}^{i-1}})$ для всех тех значений $i \in \{1,2,...,k\}$, для которых $G_{\mathfrak{N}^{i-1}} = \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{i-1}}}(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Huppert*, *B.* Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

3. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

5. *Белоконь*, *Л.М.* Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3−10.

6. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

7. *Монахов*, *В.С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – № 4 (47). – С. 31–33.

Поступила в редакцию 01.06.17.