Проблемы физики, математики и техники, № 3 (32), 2017

ФИЗИКА

УДК 537.86

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ ЛАПЛАСА – ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

POWER PROPERTIES OF VECTOR VORTEX BEAMS OF LAPLACE – GAUSS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Для векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса получены выражения для векторов поля, плотности энергии и плотности потоков энергии. Исследована аналитически пространственная структура продольных и поперечных плотностей потоков энергии. Проведенное графическое моделирование поперечных потоков энергии дополняет аналитические выводы.

Ключевые слова*: векторные пучки, пучки Лапласа – Гаусса, вихревые пучки, энергетические свойства.*

The expressions for vectors of the field, density of energy and density of energy flows are received for vector vortex beams of Laplace – Gauss. Analytically spatial structure of longitudinal and track densities of energy flows is investigated. The executed graphic modeling of crossflows of energy supplements analytical conclusions.

Keywords: *vector beams, Laplace – Gauss beams, vortex beams, power properties.*

Введение

Вихревые пучки – пучки, содержащие оптические вихри [1]–[11]. Оптический вихрь – это точка поля пучка, в которой комплексная амплитуда пучка обращается в нуль и фаза пучка становится неопределенной. Характерными представителями вихревых пучков являются пучки Лапласа – Гаусса [12]–[13]. В настоящей работе сначала излагается формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных гауссовоподобных световых пучков. Затем этот формализм конкретизируется для векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса. В последних разделах исследуются свойства плотности потока энергии электромагнитного поля для вышеупомянутых пучков, как аналитически, так и графически.

1 Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных световых пучков с однородной поляризацией

В работах [14], [15] нами был предложен формализм и найдены выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля $\boldsymbol{S}$ векторных гауссовоподобных пучков с однородной поляризацией. В настоящей работе этот формализм будет распространен на векторные вихревые гауссовоподобные пучки Лапласа – Гаусса с однородной поляризацией.

Будем называть гауссовоподобным пучок, у которого амплитуда аподизирована гауссианом [2], [4]

$$G = \frac{1}{\mu}\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q}\right) \qquad (1.1)$$

для того, чтобы пучок переносил конечную мощность. Здесь комплексный параметр пучка $q = z - iq_0''$. Конфокальный параметр $q_0'' = k w_0^2 / 2$ связан с характерным минимальным размером пучка w_0 в направлениях, перпендикулярных оси пучка OZ. Здесь введен безразмерный параметр μ, зависящий от z:

$$\mu \equiv iq / q_0'' = 1 + iz / q_0''.$$

Трехмерные векторы электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей гауссовоподобного пучка с однородной поляризацией имеют вид [14]

$$\mathbf{E} = G\left(\mathbf{e}_\perp + \left(\frac{i\mathbf{e}_\perp\nabla_\perp}{k} - \frac{\mathbf{e}_\perp\mathbf{r}_\perp}{q}\right)\cdot\mathbf{e}_z\right)h,$$

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n}G\left(\left[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp\right] - \frac{i}{k}\left[\frac{\mathbf{r}_\perp}{q} - \frac{i\nabla_\perp}{k}, \mathbf{e}_z\right]\right)h. \qquad (1.2)$$

Здесь и далее $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении оси z пучка, n – показатель преломления среды, $\nabla_\perp = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y$ – поперечный Лапласиан; $k_0 = \omega / c$, $n^2 = \varepsilon\mu$, $k = k_0 n$, а комплексный постоянный вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ не зависит от координат (x, y).

Комплексная амплитуда гауссовоподобного пучка в (1.2) имеет форму $F = Gh$, причем функция F является некоторым решением параксиального параболического уравнения

$$\left(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z\right)F = 0. \qquad (1.3)$$

Для вычисления характеристик поляризации пучка можно разложить нормированный $(|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1)$ вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ по декартовому базису

$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, как $\mathbf{e}_\perp = \dfrac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}$. Здесь η_x и η_y – некоторые постоянные комплексные параметры, не зависящие от координат (x, y). Тогда азимут ψ' и эллиптичность $\gamma = th\psi''$ эллиптически поляризованных мод (1.3) в их поперечном сечении можно выразить через комплексный параметр $\eta = \eta_y / \eta_x$ по формулам [15]–[17]:

$$\mathrm{tg}\,2\psi' = \frac{2\mathrm{Re}\eta}{1 - |\eta|^2}; \quad \mathrm{th}\,2\psi'' = \frac{2\mathrm{Im}\eta}{1 + |\eta|^2}. \qquad (1.4)$$

Далее, для краткости, параметр эллиптичности пучка $\mathrm{th}\,2\psi''$ обозначен, как $t \equiv \mathrm{th}\,2\psi''$; $-1 \le t \le 1$.

Перейдем к расчету энергетических характеристик гауссовоподобных пучков. Плотности энергии w, плотности потока продольного $\mathbf{S}_\parallel = \mathbf{e}_z S_z$ и поперечного $\mathbf{S}_\perp$ потоков энергии электромагнитного поля гауссовоподобных пучков соответственно равны [15]:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}|Gh|^2, \quad \mathrm{S}_z = \frac{c}{n} w = \frac{c\varepsilon}{8\pi}|Gh|^2. \qquad (1.5)$$

Общая плотность потока энергии $\mathbf{S}$ для векторных однородно поляризованных гауссовоподобных мод равна [15]

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_\parallel + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_o =$$
$$= \frac{c}{n} w \left\{ \mathbf{e}_z + t\left(\frac{[\nabla_\perp, \mathbf{e}_z,] \cdot |h|^2}{2k|h|^2} + \frac{q_0'' \rho \mathbf{e}_\varphi}{|q|^2} \right) + \left(\frac{z\,\mathbf{r}_\perp}{|q|^2} + \frac{\mathrm{Im}\left(h^* \cdot \nabla_\perp h\right)}{k|h|^2} \right) \right\}. \qquad (1.6)$$

Здесь мы преобразовали $\mathbf{S}_\perp$ и выделили явно слагаемые, ответственные за плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинового $\mathbf{S}_s$ потоков энергии, следуя Бекшаеву [7], [8] и Берри [18].

2 Векторные вихревые пучки Лапласа – Гаусса

Для параболического 3D уравнения (1.3) можно получить (см. также [1], [4]) частное решение с произвольной, дважды дифференцируемой функцией $h(u)$ в форме

$$F = Gh = G; \quad u = b\frac{x + iy}{w_0 \mu},$$

где b – произвольная безразмерная комплексная константа. Вихревые пучки такого типа Бандрес [12], [13] называет пучками Лапласа – Гаусса, поскольку функции $h(u)$ являются решениями уравнения Лапласа. В качестве примера рассмотрим простые однородно поляризованные векторные вихревые пучки Лапласа – Гаусса, у которых амплитуда h равна $h(u) = u$. Общие выражения (1.2) для векторов поля пучка **E** и **H** при этом не упрощаются. Перейдем поэтому к расчету и анализу энергетических характеристик векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса.

Плотность энергии и линейная плотность потока энергии электромагнитного поля в гауссовой системе равны соответственно

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}|Gh|^2 = \frac{\varepsilon|b|^2 \rho^2}{8\pi w_0^2 |\mu|^4} \exp\left(\frac{-k\rho^2 q_0''}{|q|^2} \right);$$

$$S_z = \frac{c}{n} w \qquad (2.1)$$

и на оси пучка обращаются в нуль. Это – полый пучок, с оптическим вихрем на оси OZ.

Произведем расчет плотности поперечного $(\mathbf{S}_\perp)$ потока энергии. Целесообразно перейти к цилиндрической системе координат. Тогда

$$\mathbf{S} = S_z \mathbf{e}_z + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_o.$$

Естественно трактовать слагаемые

$$\mathbf{S}_o = \frac{S_z}{\rho}\left(\frac{\mathbf{e}_\rho \rho^2 z}{|q|^2} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{k} \right),$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{S_z\, t}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{q_0'' \rho^2}{|q|^2} - \frac{1}{k} \right), \qquad (2.2)$$

как соответственно плотность орбитального и спинового потоков энергии. Как видим, поток спиновой плотности энергии направлен азимутально и зависит от поляризации волны. При линейной поляризации $\mathbf{S}_s = 0$, как и следовало ожидать. В то же время орбитальный поток энергии имеет, кроме радиальной, также и азимутальную компоненту, в отличие от векторных гауссовых пучков [19] и стандартных пучков Эрмита – Гаусса [15].

3 Исследование азимутального и радиального потоков энергии

Здесь, для упрощения анализа, целесообразно перейти к безразмерным переменным [20]. Используя конфокальный параметр q_0'' введем безразмерные нормированные переменные

$$X = \frac{x}{w_0}; \quad Y = \frac{y}{w_0}; \quad Z = \frac{z}{q_0''}; \quad R = \frac{\rho}{w_0}. \qquad (3.1)$$

В безразмерных величинах

$$\mu = 1 + iZ; \quad G = \frac{1}{\mu}\exp\left(\frac{-R^2}{\mu} \right); \quad h = \frac{\mathrm{R}e^{i\phi} b}{\mu};$$

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{R^2}{(1 + Z^2)^2} e^{-\frac{2R^2}{1+Z^2}}. \qquad (3.2)$$

Итак, плотность потока энергии поля светового пучка в безразмерной форме $\mathbf{S} = S_z \mathbf{e}_z + \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$, где

$$\mathbf{S}_0 = S_z \theta \left(\mathbf{e}_\rho \cdot \frac{RZ}{1 + Z^2} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{2R} \right); \qquad (3.3)$$

$$\mathbf{S}_s = S_z t \theta \left(\frac{R}{1 + Z^2} - \frac{1}{2R} \right) \mathbf{e}_\varphi. \qquad (3.4)$$

Коэффициент параксиальности пучка $\theta = \dfrac{w_0}{q_0''}$ (отношение поперечного масштаба w_0 к продольному q_0'') равен углу расходимости гауссиана, поскольку $\dfrac{w_0}{q_0''} = \dfrac{\lambda}{\pi w_0}$ [2], [21]. Произведем численные оценки характерных величин: $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7}$, $w_0 \approx 10^{-3}$ м. Тогда $R \approx 0 \div 4$, $Z \approx 0 \div 2$. На оси пучка $S_z = 0$, при $R \approx 1$ получаем $S_z \approx c$.

Исследуем теперь пространственную форму линий потока **S** пучков, которая определяется дифференциальным уравнением [22]

$$\frac{dR}{S_R} = \frac{R\,d\varphi}{S_\varphi} = \frac{dZ}{S_Z}. \qquad (3.5)$$

1. Проанализируем зависимость S_R от Z при фиксированном азимутальном угле. Интегрируя (3.5) при $\varphi = const$, получаем

$$R = R_0\sqrt{1+Z^2}.$$

Это – уравнение гиперболоида вращения вокруг оси Z. Поток энергии в каждой точке движется вдоль поверхности одноосного гиперболоида, как для гауссового пучка [9]. Вклад в это движение вносит только радиальная часть орбитального потока $\mathbf{S}_0$.

2. Рассмотрим зависимость азимутального потока энергии $\mathbf{S}_\varphi$ от Z при фиксированном радиусе R. Интегрируя (3.5) при $R = const$, получаем

$$\varphi = t \cdot \mathrm{arctg}\, Z + \frac{Z(1-t)}{2R^2}.$$

Вклады в поворот потока энергии $\mathbf{S}_\varphi$ вносят как спиновая $\mathbf{S}_s$, так и орбитальная $\mathbf{S}_o$ компоненты вектора **S**. Первое слагаемое приводит повороту направления потока энергии $\mathbf{S}_\varphi$ вокруг оси Z на угол $\varphi_1 = t \cdot \mathrm{artctg}\, Z$. Поворот максимален и равен π для циркулярно поляризованных мод и отсутствует при линейной поляризации света. Второе слагаемое обусловлено оптическим вихрем на оси пучка. Здесь вращение максимально при $t = -1$ и равно нулю при противоположной циркулярной поляризации. При $R \to 0$ $\varphi \to \infty$. В дальней зоне $\varphi \sim Z$.

3. Исследуем зависимость $\mathbf{S}_R$ от $\mathbf{S}_\varphi$ при фиксированном расстоянии Z, т. е. в поперечной плоскости (x, y). Интегрируем (3.5) при $Z = const$ и получаем выражение для спиральных кривых

$$\frac{t}{Z}\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - \frac{(1+Z^2)(1-t)}{4ZR^2} = \varphi + \varphi_0, \qquad (3.6)$$

описывающих направления потоков энергии в поперечной плоскости (рисунки 4.1–4.6). При $Z = 0$ получаем окружности

$$R^2\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \frac{1-t}{4t}.$$

При циркулярной поляризации ($t = 1$) спиральные кривые редуцируются к логарифмическим кривым вида $R = R_0 \exp(Z\varphi)$. При удалении от перетяжки спирали постепенно раскручиваются. При линейной поляризации $(t = 0)$ кривые (3.6) преобразуются в спирали типа «жезл»

$$\frac{1+Z^2}{4Z} = -R^2(\varphi + \varphi_0).$$

Орбитальный поток энергии $\mathbf{S}_\text{o}$ с возрастанием R и Z знак не меняет. Спиновый поток $\mathbf{S}_\text{s}$ при возрастании R проходит через нуль при $R_1 = \sqrt{(1+Z^2)/2}$, после чего изменяет свое направления вращения на противоположное. Интересно, что R_1 равно расстоянию от оси пучка до максимума его интенсивности.

Общий азимутальный поток энергии равен

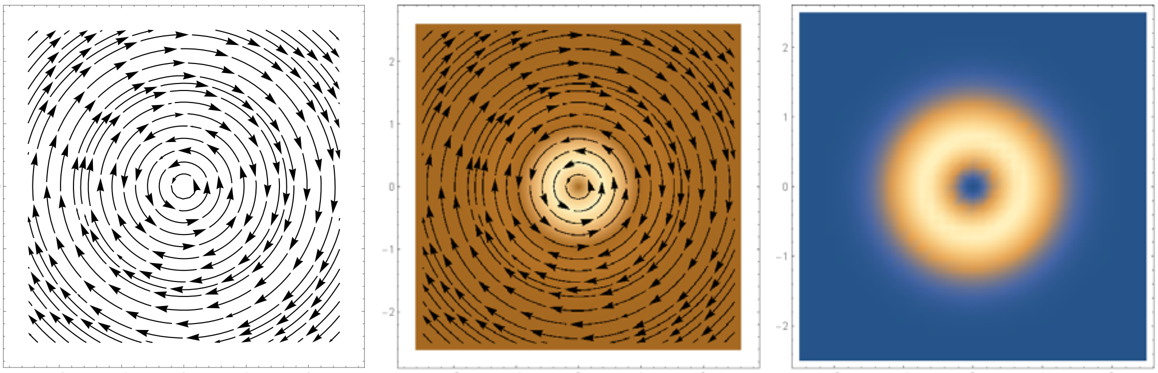
$$S_\varphi = S_z\theta\left(\frac{1-t}{2R} + \frac{t \cdot R}{1+Z^2}\right).$$

При изменении R он тоже может менять знак. При $R_0 = \sqrt{(t-1)(1+Z^2)/(2t)}$ азимутальный поток обращается в нуль, а при $R > R_0$ – меняет свое направление движения на противоположное. Это возможно лишь при параметре поляризации $t < 0$. Так, при циркулярной поляризации $t = -1$ минимальный радиус $R_{0\min} = \sqrt{1+Z^2}$ (рисунки 4.2 и 4.4).

4 Компьюторное моделирование поперечных потоков энергии векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса

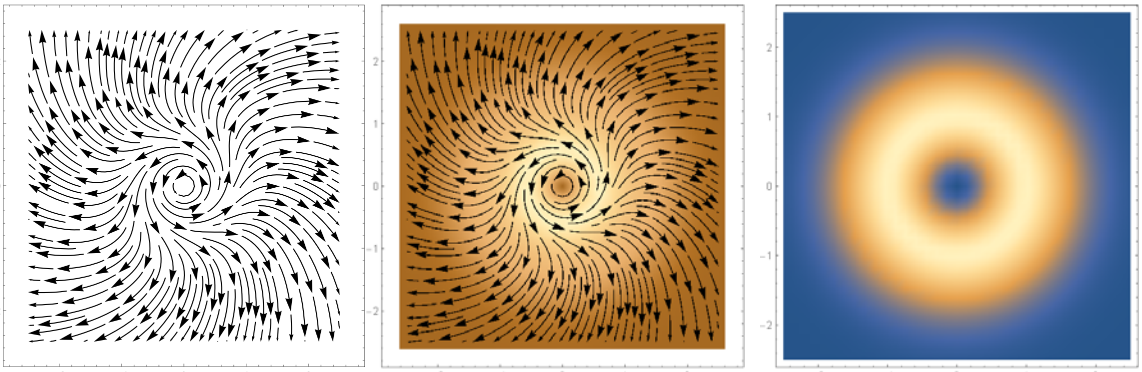
С помощью системы компьютерной математики «Mathematica» проводилось графическое моделирование поперечных потоков энергии векторных вихревых пучков Лапласа – Гаусса, изображенное на рисунках 4.1–4.4, при различных значениях параметра поляризации t и продольного расстояния Z. Во всех случаях размеры рисунка – 6×6 нормированных единиц. На рисунках *a* показаны направления поперечных потоков энергии, *b* – направления поперечных потоков энергии вместе с их интенсивностью, *c* – общая интенсивность пучка.

На всех рисунках *a* и *b* отчетливо виден оптический вихрь на оси полого пучка Лапласа – Гаусса. На рисунках *b* и *c* видно, что распределения интенсивности продольных и поперечных потоков энергии качественно различаются. При $Z = 0$ остаются только поперечные азимутальные потоки энергии по круговым орбитам (рисунки 4.1 *a* и 4.1 *b*).



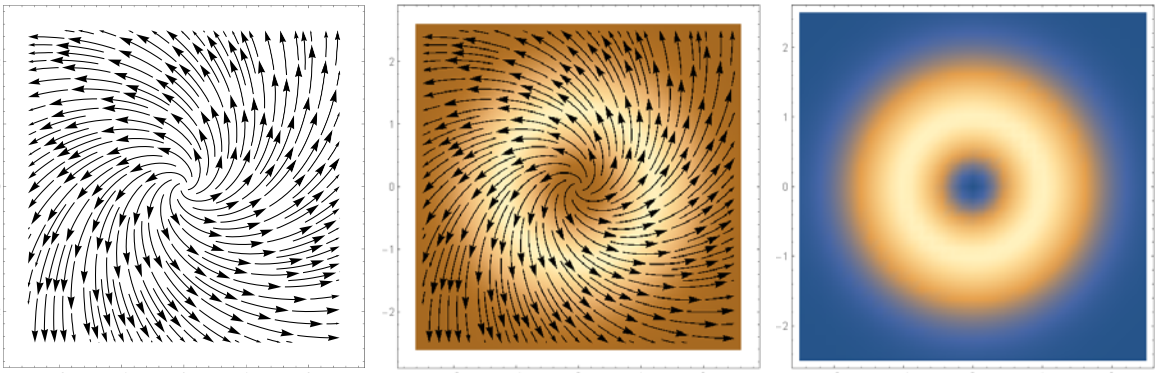
a *b* *c*

Рисунок 4.1 – Поток энергии при Z = 0 в поперечном сечении при $t = -1$



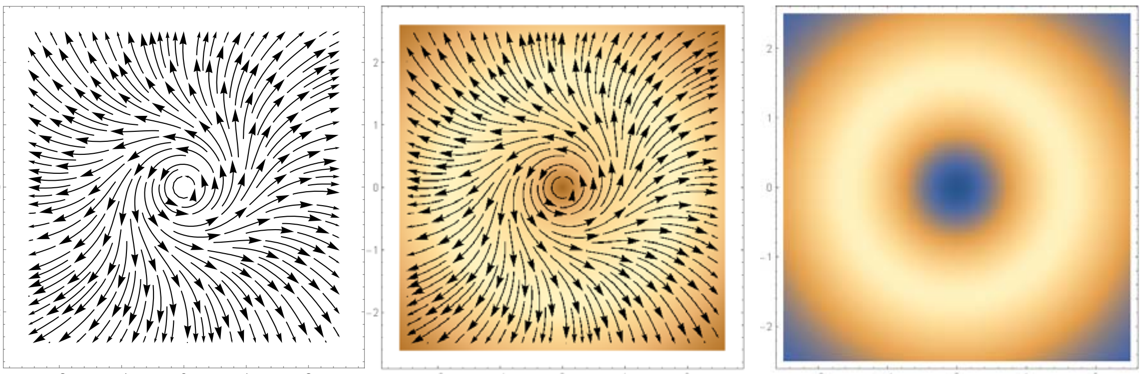
a *b* *c*

Рисунок 4.2 – Поток энергии при Z = 1 в поперечном сечении при $t = -1$



a *b* *c*

Рисунок 4.3 – Поток энергии при Z = 1 в поперечном сечении при $t = 1$



a *b* *c*

Рисунок 4.4 – Поток энергии при Z = 2 в поперечном сечении при $t = -1$

С возрастанием расстояния Z поперечные размеры пучков постепенно увеличиваются. При этом поперечные спиральные вихревые линии постепенно раскручиваются (рисунки 4.2 и 4.4).

Заключение

В настоящей работе исследуются аналитически и графически векторные вихревые гауссоводобные пучки Лапласа – Гаусса с однородной поляризацией. Получены выражения для векторов поля, плотности энергии и плотности потоков энергии. Выделены явно слагаемые, ответственные за плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинового $\mathbf{S}_s$ потоков энергии.

Проведено аналитическое и графическое исследование плотностей азимутального $\mathbf{S}_\varphi$ и радиального $\mathbf{S}_\rho$ потоков энергии исследуемых пучков. Установлено, что при изменении поляризации поперечный поток энергии может изменять свое направление. Поэтому, изменяя знак параметра поляризации t пучка на противоположный, можно добиться изменения направления вращения азимутального потока энергии вокруг оси пучка на противоположный при плавном изменении поперечного расстояния R оси пучка. Действительно, $\lim_{R\to 0}\left(S_\varphi / S_R\right) > 0$. Поскольку $\lim_{R\to\infty}\left(S_\varphi / S_R\right) = \mathrm{sign}(t)$, то, если $t < 0$, тогда направление вращения азимутального потока энергии $\mathbf{S}_\varphi$ изменяется на противоположное при $R_0 = \sqrt{(t-1)(1+Z^2)/(2t)}$. Рисунки 4.2 *а* и 4.4 *а* подтверждают этот вывод.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамочкин*, *Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

2. *Ананьев*, *Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990. – 264 с.

3. *Воляр*, *А.В.* Векторные сингулярности гауссовых пучков в одноосных кристаллах: генерация оптических вихрей / А.В. Воляр, Т.А. Фадеева, Ю.А. Егоров // Письма в ЖТФ. – 2002. – Т. 28, вып. 22. – С. 70–77.

4. *Киселев*, *А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.

5. *Arlt*, *Jochen*. Handedness and azimuthal energy flow of optical vortex beams / Jochen Arlt // Journal of Modern Optics. – 2003. – Vol. 50, № 10. – P. 1573–1580.

6. *Berry*, *M.V.* Reconnections of wave vortex lines / M.V. Berry, M.R. Dennis // Eur. J. Phys. – 2012. – Vol. 33, № 1. – P. 723–731.

7. *Bekshaev*, *A.Y.* Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Opt. Communs. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

8. *Bekshaev*, *A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13, № 5. – 053001 (32 p.).

9. *Berry*, *M.V.* Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003, № 6. – P. 259–268.

10. *Propagation of an Airy vortex beam in uniaxial crystals* / Dongmei Deng [et al.] // Appl. Phys. B. – 2013. – Vol. 110. – P. 433–436.

11. *Kotlyar*, *V.V.* Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, № 5. – P. 701–704.

12. *Bandres*, *Miguel A.* Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace – Gauss beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2057.

13. *Gutierrez-Vega*, *Julio C.* Helmholtz-Gauss waves / Julio C. Gutierrez-Vega, Miguel A. Bandres // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 25, № 2. – P. 289–298.

14. *Гиргель*, *С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

15. *Гиргель*, *С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.

16. *Борн*, *М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 587 с.

17. *Федоров*, *Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

18. *Berry*, *M.V.* Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics. – A: Pure Appl. Opt. – 2009. – Vol. 11, № 9. – 094001 (12 p.).

19. *Гиргель*, *С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–24.

20. *Гиргель*, *С.С.* Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (13). – С. 11–16.

21. *Гончаренко*, *А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 142 с.

22. *Кочин*, *Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Изд- во АН СССР, 1951. – 426 с.

Поступила в редакцию 12.04.17.