МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПРОИЗВЕДЕНИИ *B*-ГРУППЫ И ПРИМАРНОЙ ГРУППЫ

В.Н. Княгина

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE PRODUCT OF A *B*-GROUP AND A PRIMARY GROUP

V.N. Kniahina

F. Scorina Gomel State University

Конечная ненильпотентная группа называется *B*-группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы нильпотентны. Устанавливаются начальные свойства *B*-групп и изучается группа, факторизуемая примарной и *B*-группой. В частности, доказывается, что если конечная группа $G = HK$ представима в виде произведения *B*-подгруппы *H* и примарной подгруппы *K*, и если порядок ненормальной силовской подгруппы в *H* не равен 3 и 7, то группа *G* разрешима.

***Ключевые слова**: конечная группа*, *B-группа*, *примарная группа*, *произведение подгрупп.*

A finite non-nilpotent group *G* is called a *B*-group if every proper subgroup of the quotient group $G/\Phi(G)$ is nilpotent. The main properties of *B*-groups are established and the group factorized by a primary and a *B*-group is studied. In particular, it is proved that if $G = HK$ is the product of a *B*-subgroup *H* with a primary subgroup *K*, and if the order of the non-normal Sylow subgroup of *H* is not equal to 3 or 7, then *G* is solvable.

Keywords: *finite group*, *B-group*, *primary group*, *product of subgroups.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1]–[2].

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Такие группы впервые рассматривались в работе О.Ю. Шмидта [3], где была доказана их бипримарность, а кроме того, установлено, что в каждой из этих групп одна силовская подгруппа нормальна, а другая циклическая. Некоторые свойства групп Шмидта изложены в монографиях [2, VI.5.4] и [4, 26.1; 26.2]. Подробный обзор о строении групп Шмидта и их приложений в теории конечных групп содержится в статье В.С. Монахова [5].

Я.Г. Беркович [6, определение 1] предложил называть *B*-группой группу, у которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта. Строение *B*-группы во многом схоже со строением группы Шмидта: *B*-группа бипримарна, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая. Но есть и отличия, в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, а в *B*-группе это свойство нарушается. Примером служит диэдральная группа порядка 18, она является *B*-группой и не является группой Шмидта.

В.С. Монахов [7] описал строение группы, которая является произведением примарной группы и группы Шмидта. В настоящей работе устанавливаются начальные свойства *B*-групп и изучается группа, факторизуемая примарной и *B*-группой.

1 Вспомогательные результаты

Напомним некоторые обозначения. Запись $X \le Y$ означает, что X является подгруппой группы Y, если X нормальна в Y, то пишем $X \trianglelefteq Y$. При $X \ne Y$ используем обозначения $X < Y$ и $X \lhd Y$. Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается $[A]B$. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$. Наибольшая нормальная в G разрешимая подгруппа обозначается $S(G)$, а $\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется примарной, при $|\pi(G)| = 2$ – бипримарной.

Закрепим за некоторыми конкретными группами следующие обозначения:

Z_m – циклическая группа порядка m,

E_{p^m} – элементарная абелева группа порядка p^m,

D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$,

S_n и A_n – симметрическая и знакопеременная группы степени n.

Группа G с нормальной силовской p-подгруппой G_p называется p-замкнутой. Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$

© *Княгина В.Н.*, 2017

такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p-нильпотентной.

Следуя [5] будем использовать обозначения $S_{\langle p,q\rangle}$ для группы Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой. B-группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.

Частным случаем групп Шмидта являются группы типа A. Группой типа A называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы примарны.

***Лемма* 1.1.** *Пусть p,q – простые числа и m – показатель числа p по модулю q. Тогда естественное полупрямое произведение $[P]Q$ элементарной абелевой p-группы P порядка p^m и группы Q порядка q является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой типа A.*

Доказательство. Так как m – показатель p по модулю q, то q делит (p^m-1) и не делит (p^n-1) для всех натуральных $n<m$. Пусть P – элементарная абелева группа порядка p^m. Тогда $\mathrm{Aut}P \simeq GL(m,p)$ и

$$|GL(m,p)| = (p^m-1)(p^m-p)\ldots(p^m-p^{m-1}).$$

Поскольку q делит (p^m-1), то по теореме Силова в группе $GL(m,p)$ существует элемент порядка q. Отсюда следует, что P обладает автоморфизмом α порядка q. Если α действует приводимо на P, то по теореме Машке [2, с. 123] группа $P = P_1 \times P_2$ – прямое произведение α-допустимых подгрупп P_1 и P_2, на одной из которых α действует нетождественно. Однако $|P_i| = p^{m_i} < |P|$ и

$$|\mathrm{Aut}P_i| = (p^{m_i}-1)\ldots(p^{m_i}-p^{m_i-1})$$

не делится на q поскольку $m_i < m$, противоречие. Поэтому α действует неприводимо на P. Ясно, что $Q \simeq <\alpha>$ и существует естественное полупрямое произведение $[P]Q$. Так как Q действует неприводимо на P, то в группе $[P]Q$ все собственные подгруппы примарны, т. е. $[P]Q$ является группой типа A. □

Из свойств групп Шмидта [2, IV.5.4], [4, 26.1; 26.2] легко выводится следующее описание группы типа A.

***Лемма* 1.2** [5, с. 83]. *Если S – группа типа A, то справедливы следующие утверждения*:

(1) $S = [P]Q$, *где P – нормальная силовская p-подгруппа, Q – ненормальная силовская q-подгруппа, p и q – различные простые числа*;

(2) *Q – циклическая подгруппа простого порядка q и Q действует неприводимо на P*;

(3) *P – элементарная абелева подгруппа порядка p^m, где m – показатель числа p по модуля q, подгруппа P является минимальной нормальной подгруппой группы S*;

(4) $Z(S) = \Phi(S) = 1$;

(5) $1 < P < S$ *– главный ряд группы S.*

***Лемма* 1.3.** (1) *Если S – группа Шмидта, то $S/\Phi(S)$ – группа типа A. Обратно, если S – группа Шмидта, $N \lhd S$ и S/N – группа типа A, то $N = \Phi(S)$.*

(2) *Пусть S – группа Шмидта. Тогда и только тогда группа S является группой типа A, когда $\Phi(S) = 1$.*

Доказательство.

1. Пусть $S = [P]Q$ – $S_{\langle p,q\rangle}$-группа. Согласно [4, 26.3] подгруппа Фраттини группы S имеет вид:

$$\Phi(S) = \Phi(P) \times < y^q >$$

и в фактор-группе $S/\Phi(S)$ силовская p-подгруппа $P\Phi(S)/\Phi(S) \simeq P/P \cap \Phi(S)$ является минимальной нормальной подгруппой [4, 26.1], а силовская q-подгруппа $Q\Phi(S)/\Phi(S)$ имеет порядок q. Поэтому в $S/\Phi(S)$ нет непримарных подгрупп и $S/\Phi(S)$ – группа типа A. Обратно, пусть S – группа Шмидта, $N \lhd S$ и S/N – группа типа A. Тогда $N \le \Phi(S)$ [4, 26.1], а так как $\Phi(S/N) = 1$, то $N = \Phi(S)$.

2. Пусть S – группа Шмидта. Если S является группой типа A, то $\Phi(S) = 1$ по лемме 1.2 (4). Обратно, если $\Phi(S) = 1$, то из утверждения 1 следует, что S – группа типа A. □

Нам понадобится следующий результат Виландта [8]. Приведем его доказательство, используя свойства групп Шмидта.

***Лемма* 1.4.** *Пусть в группе G силовская p-подгруппа P циклическая. Если H – нормальная в G подгруппа и p делит $(|H|, |G/H|)$, то H p-нильпотентна и G p-разрешима.*

Доказательство. Так как $P_1 = P \cap H$ является силовской p-подгруппой в H и $P_1 \ne P$, то $P_1 \le \Phi(P)$ и H p-нильпотентна по [2, IV.4.7]. По лемме Фраттини

$$G = HN_G(P_1), G/H \simeq N_G(P_1)/N_G(P_1) \cap H$$

и надо доказать p-разрешимость фактор-группы N/N_1, где

$$N = N_G(P_1), N_1 = N_G(P_1) \cap H = N_H(P_1).$$

Так как $N/C_G(P_1)$ является p'-группой автоморфизмов для P_1, то $N/C_G(P_1)$ – циклическая, порядка, делящего $p-1$. В $C = C_G(P_1)$ силовская p-подгруппа P циклическая порядка $\ge p^2$. Если

S – p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта в C, то силовская p-подгруппа S_p в S имеет порядок p [4, 26.1], поэтому $S_p \le P_1 \le Z(C)$, противоречие. Значит в C нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта и C p-нильпотентна [2]. Отсюда N p-разрешима. □

2 Свойства *B*-групп

***Лемма* 2.1.** Если B – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, то $B/\Phi(B) \simeq [E_{p^m}]Z_q$, где m – показатель числа p по модулю q, т. е. $B/\Phi(B)$ – группа типа A.

Доказательство. Пусть S – $S_{\langle p,q\rangle}$-группа такая, что $B/\Phi(B) \simeq S$. Так как $\Phi(B/\Phi(B)) = 1$, то $\Phi(S) = 1$ и $S = [E_{p^m}]Z_q$ по лемме 1.3, где m – показатель числа p по модулю q. □

B-группу можно определить в силу леммы 2.1 как группу, у которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой типа A. Ясно, что любая группа Шмидта будет B-группой.

Пример 2.1. Диэдральная группа порядка $2p^n$, $p > 2$, $n \in N$, является $B_{\langle p,2\rangle}$-группой, которая при $n > 1$ не является группой Шмидта.

Пример 2.2. Пусть p, q – простые числа, p делит $q-1$, $n \in N$. Полупрямое произведение $[Z_{q^n}]Z_p$ будет $B_{\langle q,p\rangle}$-группой, которая при $n > 1$ не является группой Шмидта.

***Лемма* 2.2.** *Пусть B – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, P и Q – ее силовские p- и q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ *и* $P/\Phi(P)$ – *главный фактор группы B порядка p^m, где m – показатель числа p по модулю q*;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(B)$. *Кроме того,* $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ *и* $Z(B) \le \Phi(B)$;

(4) *Если H – нормальная в B подгруппа и $H \ne B$, то H нильпотентна;*

(5) *Если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и $M = P \times \langle y^q \rangle$, либо $M = [\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x \in B$.*

Доказательство.

1. Согласно [1, 4.33] $\pi(B) = \pi(B/\Phi(B))$, поэтому $\pi(B) = \{p, q\}$. Так как $P\Phi(B)/\Phi(B)$ нормальна в $B/\Phi(B)$, то P нормальна в B и $B = [P]Q$.

2. В фактор-группе $B/\Phi(B)$ силовская q-подгруппа по лемме 1.2 (2) имеет простой порядок. Из [9, 2.11] следует, что Q – циклическая, поэтому $B' \le P$. По свойствам коммутанта [1, 4.6]

$$(B/\Phi(B))' = B'\Phi(B)/\Phi(B),$$

а поскольку коммутант группы Шмидта совпадает с нормальной силовской подгруппой, то $B'\Phi(B) = P\Phi(B)$. Так как $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$ [9, 2.10], то $B'\Phi(P) = P\Phi(P)$ и $B' = P$.

Из леммы 1.2 (3) получаем, что $P\Phi(B)/\Phi(B)$ является минимальной нормальной подгруппой группы $B/\Phi(B)$. Изоморфизм

$$P\Phi(B)/\Phi(B) \simeq P/\Phi(P)$$

является B-изоморфизмом, поэтому $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы B. В силу леммы 1.2 (3) он имеет порядок p^m, где m – показатель числа p по модулю q.

3. В п. 2 уже доказано, что $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа. Так как $|Q\Phi(B)/\Phi(B)| = q$, то

$$|Q : Q \cap \Phi(B)| = q, \; Q \cap \Phi(B) = \langle y^q \rangle.$$

Подгруппа Q не содержится в $\Phi(B)$, а максимальная подгруппа $\langle y^q \rangle$ из Q содержится в $\Phi(B)$, поэтому

$$\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle, \; \langle y^q \rangle B.$$

Поскольку $P\langle y^q \rangle = P \times \langle y^q \rangle$, то $\langle y^q \rangle$ – силовская q-подгруппа в $Z(B)$. В силу леммы 1.2 (4) $Z(B/\Phi(B)) = 1$, значит, $Z(B) \le \Phi(B)$.

4. Пусть H – нормальная в B подгруппа и $H \ne B$. Тогда $H\Phi(B) \ne B$ и $H\Phi(B)/\Phi(B)$ нильпотентна. В силу [1, 3.24], подгруппа H нильпотентна.

5. Пусть M – максимальная в B подгруппа. Так как B разрешима и $\pi(B) = \{p, q\}$, то либо $|B : M| = q^b$, либо $|B : M| = p^a$, $a, b \in \mathbb{N}$. Если $|B : M| = q^b$, то $P \le M$, а так как $P = B'$, то M нормальна в B, $b = 1$ и $M = P \times \langle y^q \rangle$.

Теперь рассмотрим случай, когда $|B : M| = p^a$, $a \in \mathbb{N}$. Так как $M/\Phi(B)$ нильпотентна и $|B/\Phi(B) : M/\Phi(B)| = p^a$, то из леммы 1.2 (3) следует, что $M/\Phi(B)$ – q-подгруппа и a – показатель p по модулю q. Поэтому $M = [\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x \in B$. □

***Предложение* 2.3.** *B точности тогда $B_{\langle p,q\rangle}$-группа является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, когда*

$$[\Phi(P), Q] = 1.$$

Доказательство. Если $B_{\langle p,q\rangle}$-группа $B = [P]Q$ является группой Шмидта, то подгруппа $\Phi(P)Q$ нильпотентна и $[\Phi(P), Q] = 1$. Обратно, пусть

$B=[P]Q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа и $[\Phi(P),Q]=1$. Пусть M – максимальная в B подгруппа. Если M нормальна в B, то M нильпотентна по лемме 2.2 (4). Если M не нормальна в B, то $M=[\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x\in B$ по лемме 2.2 (5). Так как $\Phi(P)Q=\Phi(P)\times Q$, то

$$(\Phi(P)Q)^x=(\Phi(P)\times Q)^x=\Phi(P)\times Q^x=M$$

нильпотентна и B – группа Шмидта. □

***Лемма* 2.4.** *Пусть N – нормальная подгруппа в $B_{\langle p,q\rangle}$-группе B, $N\neq B$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *силовская p-подгруппа P_1 из N либо совпадает с силовской p-подгруппой группы B, либо $P_1\le\Phi(B)\cap P=\Phi(P)$;*

(2) *силовская q-подгруппа Q_1 из N содержится в $\langle y^q\rangle\le Z(B)$, где $\langle y\rangle$ – силовская q-подгруппа группы B;*

(3) *либо $P\le N$, либо $N\le\Phi(B)$;*

(4) *фактор-группа B/N либо является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой, либо циклической q-группой.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2 (4) подгруппа N нильпотентна. Пусть $N=P_1\times Q_1$, где P_1 и Q_1 – силовские p- и q-подгруппы из N.

1. Предположим, что P_1 не содержится в $\Phi(P)$. Тогда $P_1\Phi(P)/\Phi(P)$ – неединичная нормальная в $B/\Phi(P)$ подгруппа. Согласно лемме 2.2 (2) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы B, т. е. $P_1\Phi(P)/\Phi(P)$ является минимальной нормальной в $B/\Phi(P)$ подгруппой. Поэтому $P_1\Phi(P)=P$ и $P=P_1$ по свойствам подгруппы Фраттини.

2. Так как в группе B силовская q-подгруппа $Q=\langle y\rangle$ циклическая и не нормальна в B, то Q_1 – собственная в Q подгруппа и $Q_1\le\langle y^q\rangle$. По лемме 2.2 (3) $\langle y^q\rangle\le Z(B)$, поэтому Q_1 содержится в $Z(B)$.

3. Пусть силовская p-подгруппа группы B не содержится в N. Тогда по утверждению 1 $P_1\le\Phi(P)=\Phi(B)\cap P$, а по утверждению 2 и лемме 2.2 (3) подгруппа $Q_1\le\langle y^q\rangle\le\Phi(B)$. Поэтому $N\le\Phi(B)$.

4. Согласно утверждению 2 либо $P_1=P$, либо $P_1\le\Phi(P)=\Phi(B)\cap P$. Если $P_1=P$, то B/N будет циклической q-группой. Если $P_1\le\Phi(P)$, то N содержится в $\Phi(B)$ по утверждению 3, поэтому $\Phi(B/N)=\Phi(B)/N$ и

$$(B/N)/\Phi(B/N)=(B/N)/\Phi(B)/N\simeq B/\Phi(B)$$

будет группой Шмидта. □

***Лемма* 2.5.** *Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU=V$, то H будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

Доказательство. Согласно [1, 3.21], $H\cap U\le\Phi(H)$, поэтому

$$\Phi(H/H\cap U)=\Phi(H)/H\cap U.$$

Пусть $B\simeq V/U\simeq H/H\cap U$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа. Тогда

$$B/\Phi(B)\simeq(H/H\cap U)/\Phi(H/H\cap U)=$$
$$=(H/H\cap U)/\Phi(H)/H\cap U\simeq H/\Phi(H)$$

будет $S_{\langle p,q\rangle}$-группой. А это означает, что H – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа. □

***Предложение* 2.6.** *Пусть $\pi=\{p,q\}$ и G – π-разрешимая группа. Если π-холлова подгруппа в группе G является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой, то $l_r(G)=1$ для каждого $r\in\pi$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.2 (3) силовская q-подгруппа в группе G циклическая, поэтому $l_r(G)=1$ по [2, VI.6.6]. Для получения оценки $l_p(G)=1$ воспользуемся индукцией по порядку группы G. В силу леммы 2.4 (4) в каждой фактор-группе G/N π-холлова подгруппа либо является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой, либо циклической q-группой. По индукции следует считать, что $l_p(G/N)\le1$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. Предположим, что $l_p(G)>1$. По [2, VI.6.9] следует считать, что $\Phi(G)=O_{p'}(G)=1$ и $O_p(G)=C_G(O_p(G))$ является единственной минимальной нормальной в G подгруппой. Пусть M – максимальная в G подгруппа, не содержащая $N=O_p(G)$. Тогда $N\cap M=1$ и $G=[N]M$. Так как $N\le H$, где H – π-холлова подгруппа, то по лемме 2.4 (1) либо $N=P$, либо $N\le\Phi(P)=\Phi(H)\cap P$, где P – силовская p-подгруппа из H. Если $N=P$, то $l_p(G)=1$. Если $N\le\Phi(H)$, то по тождеству Дедекинда $H=[N](H\cap M)$, что невозможно. □

***Лемма* 2.7.** *$B_{\langle p,q\rangle}$-группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее силовская p-подгруппа циклическая.*

Доказательство. Пусть $B=[P]Q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа. Предположим, что B сверхразрешима. Тогда $B/\Phi(B)$ сверхразрешима и $|P\Phi(B)/\Phi(B)|=p$ по лемме 2.2 (2). Теперь [9, 2.11] подгруппа P циклическая. Обратно, пусть силовская p-подгруппа P в $B_{\langle p,q\rangle}$-группе $B=[P]Q$ циклическая. Тогда $B/\Phi(B)$ – группа Шмидта с циклической силовской p-подгруппой $P\Phi(B)/\Phi(B)$. По лемме

2.2 (2) подгруппа $P\Phi(B)/\Phi(B)$ имеет простой порядок и $B/\Phi(B)$ сверхразрешима [1, 4.46]. Теперь B сверхразрешима [1, 4.55]. □

3 Произведение примарной и B-подгруппы

***Предложение* 3.1** *Пусть группа* $G = HB$, *где* $H = [P]Q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-*подгруппа*, K – r-*подгруппа. Если* $|Q| > q$, *то* G *разрешима.*

Доказательство. Если $r \in \{p,q\}$, то G будет $\{p,q\}$-группой и разрешимой по теореме Бернсайда [1, 4.18]. В дальнейшем считаем, что $(|H|,|K|) = 1$. По лемме 2.2 (3) подгруппа $Q = \langle y \rangle$ и $y^q \in Z(H)$. Поэтому $|G : C_G(y^q)| = r^t$, $t \in \{0\} \cup N$. По условию $y^q \neq 1$ и $y^q \in S(G)$ по теореме Казарина [10]. Пусть N – минимальная нормальная в G подгруппа, $N \leq S(G)$. Факторгруппа

$$G/N = (HN/N)(KN/N), HN/N \simeq$$
$$\simeq H/H \cap N, KN/N \simeq K/K \cap N,$$

где HN/N либо q-группа по лемме 2.4 (4), либо $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, а KN/N – r-группа. Если HN/N q-группа, то G/N разрешима по теореме Бернсайда, поэтому группа G разрешима. Если HN/N – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, и $|QN/N| > q$, то G/N разрешима по индукции, значит разрешима и группа G. Пусть $|QN/N| = q$. Так как $|Q| > q$, то q делит $(|N|,|G/N|)$ и G q-разрешима по лемме 1.4. Поскольку $\pi(G) = 3$, то G разрешима. □

***Следствие* 3.1.1.** (И.П. Докторов [12]) *Пусть группа* $G = HK$, *где* H – *подгруппа Шмидта*, K – *примарная подгруппа. Если порядок ненормальной силовской подгруппы из* H *не является простым числом*, *то группа* G *разрешима.*

***Лемма* 3.2** [11, теорема 1]. *Пусть неразрешимая группа* G *является произведением бипримарной подгруппы* H *и примарной подгруппы* K. *Если среди силовских подгрупп группы* G *есть циклическая, то* $G/S(G)$ *изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $PSL(2,5) = A_4 Z_5$;

(2) $PSL(2,7) = S_4 Z_7 = ([Z_7]Z_3)D_8$;

(3) $SL(2,8) = ([E_{2^3}]Z_7)Z_9$;

(4) $PGL(2,5) = S_4 Z_5$;

(5) $PGL(2,7) = ([Z_7]Z_3)D_{16}$;

(6) $P\Gamma L(2,8) = ([E_{2^3}]Z_7)G_3$, где G_3 – силовская 3-подгруппа;

(7) $PSL(3,3)$, $|H| = 2^4 3^3$, $K \simeq Z_{17}$.

***Лемма* 3.3** [11, лемма 1]. *Если группа* G *является произведением двух подгрупп* H *и* K *взаимно простых порядков и* N – *субнормальная в* G *подгруппа*, *то* $N = (H \cap N)(K \cap N)$.

***Предложение* 3.4** *Пусть группа* $G = HK$, *где* H – B-*подгруппа*, K – *примарная подгруппа. Если* $S(G) = 1$, *то* G *изоморфна одной из следующих групп*:

(1) $PSL(2,5)$, $H = A_4$, $K = Z_5$;

(2) $PSL(2,7)$, $H = [Z_7]Z_3$, $K = D_8$;

(3) $PGL(2,7)$, $H = [Z_7]Z_3$, $K = D_{16}$;

(4) $SL(2,8)$, $H = [E_{2^3}]Z_7$, $K = Z_9$;

(5) $P\Gamma L(2,8)$, $H = [E_{2^3}]Z_7$, $|K| = 3^3$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть $H = [P]Q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, K – r-подгруппа. По теореме Бернсайда p, q и r – различные простые числа, а по предложению 3.1 $|Q| = q$. Значит, $|G| = p^a q r^c$. По условию $S(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная в G подгруппа, случай $N = G$ не исключается. Так как N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп, а $|Q| = q$, то N – простая группа. Порядки H и K взаимно просты, поэтому N факторизуема по лемме 3.3, т. е.

$$N = (H \cap N)(K \cap N).$$

Если $H \cap N \neq H$, то $H \cap N$ – нильпотентная подгруппа по лемме 2.2 (4) и N разрешима по теореме Виландта – Кегеля [2]. Противоречие. Значит, $H \leq N$, $N = H(K \cap N)$, а G/N есть r-группа. Применяя лемму 3.2 заключаем, что возможны только варианты, сформулированные в заключении доказываемого предложения. □

***Следствие* 3.4.1.** *Пусть группа* $G = HK$, *где* H – *сверхразрешимая* B-*подгруппа*, K – *примарная подгруппа. Если* $S(G) = 1$, *то* G *изоморфна* $PSL(2,7)$ *или* $PGL(2,7)$, *где* $H = [Z_7]Z_3$, *а* $K = D_8$ *или* $K = D_{16}$ *соответственно.*

***Теорема* 3.5.** *Пусть группа* $G = HK$, *где* H – B-*подгруппа*, K – *примарная подгруппа. Если порядок ненормальной силовской подгруппы из* H *не равен* 3 *и* 7, *то группа* G *разрешима.*

Доказательство. Пусть $H = [P]Q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, K – r-подгруппа. Предположим, что группа неразрешима. Согласно предложению 3.1 порядок подгруппы Q равен q. Так как факторгруппа $G/S(G)$ неразрешима, то $Q \cap S(G) = 1$ по теореме Бернсайда и $HS(G)/S(G)$ является B-группой по лемме 2.4 (4). Из предложения 3.4 следует, что $|QS(G)/S(G)| = 3$ или 7, поэтому $|Q| = 3$ или 7. Это противоречит условию. □

***Следствие* 3.5.1.** *Пусть группа* $G = HK$, *где* H – *группа Шмидта*, K – *примарная подгруппа. Если порядок ненормальной силовской подгруппы из* H *не равен* 3 *и* 7, *то группа* G *разрешима.*

***Следствие* 3.5.2.** *Пусть группа* $G = HK$, *где* H *– сверхразрешимая B-группа*, K *– примарная подгруппа. Если порядок ненормальной силовской подгруппы из* H *не равен* 3, *то группа* G *разрешима.*

Доказательство. Пусть $H = [P]Q$ – сверхразрешимая $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, K – r-подгруппа. Предположим, что $S(G) = 1$. Согласно следствию 3.4.1 порядок подгруппы Q равен 3, противоречие. Если $S(G) \neq 1$, то как и в доказательстве теоремы 3.5 получаем разрешимость. □

***Следствие* 3.5.3.** *Пусть группа* $G = HK$, *где* H *– сверхразрешимая группа Шмидта*, K *– примарная подгруппа. Если порядок ненормальной силовской подгруппы из* H *не равен* 3, *то группа* G *разрешима.*

В силу примера 2.1 и леммы 2.7 диэдральная группа D_{2p^n} является сверхразрешимой B-группой с ненормальной силовской подгруппой порядка 2. Поэтому справедливо

***Следствие* 3.5.4.** *Если группа* $G = HK$, *где* $H \simeq D_{2p^n}$, K *– примарная подгруппа*, *то* G *разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppe / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

3. *Шмидт*, *О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.

5. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев: Институт математики НАУ. – 2002, секция 1. – С. 81–90.

6. *Berkovich*, *Y.* Some corollaries of Frobenius normal p-complement theorem / Y. Berkovich // Proc. Amer. math. soc. – 1999. – Vol. 127, № 9. – P. 2505–2509.

7. *Монахов*, *В.С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // В книге: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 70–100.

8. *Wielandt*, *H.* Sylow-gruppen and Komposition-Struktur / H. Wielandt // Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg. – 1958. – Vol. 22, № 1. – P. 215–228.

9. *Kniahina*, *V.N.* On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

10. *Казарин*, *Л.С.* О p^{α}-лемме Бернсайда / Л.С. Казарин // Математические заметки. – 1990. – Т. 48, вып. 2. – С. 45–48.

11. *Монахов*, *В.С.* Произведение бипримарной и 2-разложимой групп / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 5. – С. 641–649.

12. *Докторов*, *И.П.* Об одном классе факторизуемых групп / И.П. Докторов // Доклады АН БССР. – 1969. – Т. 13, № 2. – С. 101–102.

Поступила в редакцию 14.06.17.