УДК 535.326+535.853.68.01

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ИЗ ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. И. Копилевич и *Г. Б. Сочилин*

Исследована связь временных характеристик (корреляционной функции и спектра) сигнала фотоприемника на выходе оптической системы, воспринимающей световое поле пучка, прошедшего слой случайно-неоднородной среды, движущейся с постоянной упорядоченной скоростью перпендикулярно оси системы, с энергетическим спектром оптических неоднородностей в среде. Показано, что в борновском приближении корреляционная функция и спектр сигнала связаны интегральными преобразованиями Ханкеля нулевого порядка и Абеля соответственно с произведением энергетического спектра неоднородностей на «аппаратную» функцию системы. В первом приближении метода плавных возмущений получена аналогичная связь логарифма нормированной корреляционной функции сигнала и его временного спектра со спектром неоднородностей для случая оптической системы, воспринимающей поле в произвольной точке приемной плоскости.

При исследовании турбулентных потоков жидкости, газа и плазмы оптическими методами статистические характеристики светового поля, распространяющегося в среде, используются в качестве источника информации о статистике неоднородностей в исследуемой среде. Результаты работы [1] позволяют по измеренным временным спектрам флуктуаций логарифма интенсивности или фазы плоской волны, прошедшей слой турбулентной среды, восстановить энергетический спектр оптических неоднородностей, предполагаемых локально однородными и изотропными. Эти результаты использовались для обработки экспериментальных данных в работах [2, 3]. В последнее время для исследования турбулентности широко используются оптические приборы, в которых выходной сигнал более сложно связан с характеристиками рассеянного света, такие, как интерферометры и теневые приборы [4–7].

В настоящей работе установлена возможность восстановления энергетического спектра статистически однородного изотропного поля оптических неоднородностей в среде по временным характеристикам сигнала фотоприемника на выходе оптической системы достаточно общего вида, воспринимающей световое поле, прошедшее слой исследуемой среды. Рассматриваемый класс систем включает такие оптические устройства, для которых связь оптического поля $u(\varkappa, t)$, $\varkappa=(\varkappa_1, \varkappa_2)$ на выходной плоскости с полем $u(\rho, t)$, $\rho=(y, z)$ на входной плоскости для любого момента времени t имеет вид

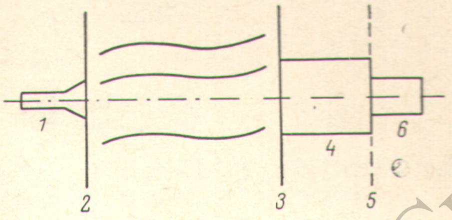
$$\tilde{u}(\varkappa, t)=\int A(\rho, \varkappa)\, u(\rho, t)\, d\rho, \tag{1}$$

где $A(\rho, \varkappa)$ — передаточная функция системы. Таким образом, мы не рассматриваем системы, передаточные функции которых зависят от времени (модуляция), и системы с опорными пучками [у таких систем поле на выходе неоднородно по входному полю в отличие от (1)].

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1. Связь временной корреляционной функции сигнала с четвертым моментом светового поля

Общая схема рассматриваемых оптических устройств изображена на рисунке. Когерентный монохроматический световой пучок от осветителя *1* проходит слой исследуемой среды толщиной L, расположенный между плоскостями *2* и *3*, и попадает на вход оптической системы *4*. Преобразованное системой световое поле поступает на фотоприемник *6* через его апертуру, расположенную в плоскости *5*. В дальнейшем под «сигналом прибора» будет пониматься интенсивность света, падающего на фотоприемник.



Введем декартовы координаты x, y, z так, чтобы ось x была направлена вдоль оси распространения света; плоскости *2* соответствует $x=0$, плоскости *3* — $x=L$. Пусть $u(L, \rho, t)$, $\rho=(y, z)$ — поле на плоскости *3* в момент времени t.

Тогда в силу (1) суммарная интенсивность света, попавшего на фотоприемник, определяется выражением

$$I(t)=\int \sum(\varkappa)\left\{\iint\int A(\rho_1, \varkappa)\, A^*(\rho_2, \varkappa)\, u(L, \rho_1, t)\, u^*(L, \rho_2, t)\, d\rho_1 d\rho_2\right\}(d\varkappa), \qquad (2)$$

где $\sum(\varkappa)$ — функция пропускания по интенсивности апертуры фотоприемника. Корреляционная функция флуктуаций интенсивности

$$B(t_1, t_2)\equiv\langle[I(t_1)-\langle I(t_1)\rangle]\,[I(t_2)-\langle I(t_2)\rangle]\rangle, \qquad (3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций случайной среды, с помощью (2) выражается через статистические моменты поля на плоскости *3*

$$B(t_1, t_2)=\int d\varkappa_1 \sum(\varkappa_1)\int d\varkappa_2 \sum(\varkappa_2)\iiiint d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4 A(\rho_1, \varkappa_1)\, A^*(\rho_2, \varkappa_1)\times$$
$$\times A(\rho_3, \varkappa_2)\, A^*(\rho_4, \varkappa_2)\,\hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2), \qquad (4)$$

где

$$\hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2)\equiv\Gamma(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2)-\Gamma(\rho_1, \rho_2; t_1)\,\Gamma(\rho_3, \rho_4; t_2), \qquad (5)$$

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2)\equiv\langle u(L, \rho_1, t_1)\, u^*(L, \rho_2, t_1)\, u(L, \rho_3, t_2)\, u^*(L, \rho_4, t_2)\rangle \qquad (6)$$

четвертый двухвременной момент поля u на плоскости *3*,

$$\Gamma(\rho_k, \rho_l; t_m)\equiv\langle u(L, \rho_k, t_m)\, u^*(L, \rho_l, t_m)\rangle \qquad (7)$$

второй одновременной момент. Величину $\hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2)$ мы будем называть центрированным двухвременным четвертым моментом поля u на плоскости *3*. Он должен быть найден из решения задачи распространения света в случайно-неоднородной среде.

2. Постановка задачи распространения светового пучка в турбулентной среде

Будем использовать следующие предположения о случайной среде. Поле диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}=(x, y, z)$, будем считать стационарным, статистически однородным и изотропным. Размер наименьших неоднородностей в среде будем предполагать много большим длины волны света. Флуктуации диэлектрической проницаемости предполагаются малыми

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t)=\langle\varepsilon\rangle(1+\varepsilon'(\mathbf{r}, t)), \quad |\varepsilon'(\mathbf{r}, t)|\ll 1, \qquad (8)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где $\langle \varepsilon \rangle$ — среднее значение диэлектрической проницаемости — не зависит от координат и времени в силу принятых предположений. Величина магнитной проницаемости среды считается равной единице. Предполагается, что исследуемая среда движется относительно прибора с упорядоченной скоростью v, направленной перпендикулярно оси x.

Распространение света в такой среде можно описывать [1] скалярным волновым уравнением. Пренебрегая малой величиной $v\lambda/cl$ (λ — длина волны света, c — скорость света в вакууме, l — размер наименьших неоднородностей) по сравнению с единицей, для поля $u(\mathbf{r}, t)$ получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u + k^2 (1 + \varepsilon'(\mathbf{r}, t))\, u = 0, \\ &u(\mathbf{r}, t)\,|_{x=0} = u_0(\rho), \\ &\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) u = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $k^2 \equiv (2\pi/\lambda)^2 \langle \varepsilon \rangle$. Поле $u_0(\rho)$ на плоскости 2 зададим в виде

$$u_0(\rho) = A \exp\left\{-\rho^2\left(\frac{1}{2a^2} + i\frac{k}{R_c}\right)\right\}, \tag{10}$$

где A — амплитуда на оси пучка, a — эффективный радиус, R_c — радиус кривизны фронта пучка.

Мы рассмотрим два метода нахождения четвертого момента (5) решения краевой задачи (9) — метод Борна (метод слабых возмущений) и метод Рытова (метод плавных возмущений). В обоих случаях четвертый момент поля (в соответствующем приближении) выражается через временную корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$\sigma_1(\mathbf{r}; \tau) \equiv \langle \varepsilon'(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t + \tau)\, \varepsilon'(\mathbf{r}_0, t) \rangle \tag{11}$$

или ее двумерное преобразование Фурье

$$F_1(\eta; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\mathbf{r}; \tau)\, e^{i(\eta_y y + \eta_z z)}\, dx\,dy\,dz. \tag{12}$$

Функция $F_1(\eta; \tau)$ может быть выражена через двумерный спектр турбулентности $F_1(\eta) \equiv F_1(\eta; 0)$ в предположении гипотезы «замороженной турбулентности» [8]. В этом случае

$$\sigma_1(\mathbf{r}; \tau) \equiv \langle \varepsilon'(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t + \tau)\, \varepsilon'(\mathbf{r}_0, t) = \\ = \langle \varepsilon'(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, t)\, \varepsilon'(\mathbf{r}_0, t) \rangle = \sigma_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau; 0)$$

и из (12) следует

$$F_1(\eta; \tau) = e^{i\eta\mathbf{v}\tau} F(\eta), \tag{13}$$

где мы воспользовались ортогональностью $\mathbf{v}$ к оси x. В силу принятых предположений об изотропности поля неоднородностей спектры F_1 и F зависят только от модуля $\eta : F_1(\eta; \tau) \equiv F_1(\eta; \tau)$, $F(\eta) \equiv F(\eta)$; следовательно, равенство (13) не изменится от усреднения правой части по всем направлениям вектора η

$$F_1(\eta; \tau) = F(\eta)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\eta v\tau\cos\varphi}\, d\eta = F(\eta)\, J_0(\eta v \tau), \tag{14}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого индекса. Заметим, что в нашем случае статистически изотропного поля двумерный спектр $F(\eta)$ связан с трехмерным преобразованием Фурье корреляционной функции $\Phi(\eta)$ соотношением

$$F(\eta) = 2\pi\Phi(\eta). \tag{15}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3. Вычисление корреляционной функции сигнала в борновском приближении

Решение задачи (9) на плоскости $x = L$ представим в виде разложения Борна [9]

$$u(L, \rho, t) = V_0(L, \rho, t) + V_1(L, \rho, t) + V_2(L, \rho, t) + \ldots, \tag{16}$$

где $V_i(L, \rho, t)$ имеет i-й порядок по малой величине флуктуаций диэлектрической проницаемости ε'. Подставляя (16) в определение центрированного двухвременного четвертого момента (5) и пренебрегая членами, пропорциональными степеням ε' выше второй, получим

$$\hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2) = \Gamma_{1001} + \Gamma_{0110} + \Gamma_{1010} + \Gamma_{0101} + O(\varepsilon'^3), \tag{17}$$

где

$$\Gamma_{lmnp} \equiv \langle V_l(L, \rho_1, t_1) V_m^*(L, \rho_2, t_1) V_n(L, \rho_3, t_2) V_p^*(L, \rho_4, t_2)\rangle.$$

Слагаемые правой части (17) могут быть вычислены с помощью метода, изложенного в [9], при достаточно широких предположениях

$$ka \gg 1, \quad l \ll L, \quad a/R_c \ll 1, \quad a^2/R_c l \ll 1.$$

Величина $\hat{\Gamma}$, в силу предположения о стационарности поля неоднородностей зависящая от времени только через $\tau = t_1 - t_2$,

$$\hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2) \equiv \hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; \tau)$$

имеет вид

$$\hat{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; \tau) = \int F_1(\eta, \tau) R(\eta; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) d\eta, \tag{18}$$

где $R(\eta; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ — известная функция. Подставляя (18) в выражение для корреляционной функции (4), получим

$$B(\tau) \equiv B(t, t+\tau) = \int F_1(\eta; \tau) P(\eta) d\eta, \tag{19}$$

где

$$P(\eta) \equiv \int d\varkappa_1 \sum(\varkappa_1) \int d\varkappa \sum(\varkappa_2) \int d\rho_1 \int d\rho_2 \int d\rho_3 \int d\rho_4 \times$$
$$\times A(\rho_1, \varkappa_1) A^*(\rho_2, \varkappa_1) A(\rho_3, \varkappa_2) A^*(\rho_4, \varkappa_2) R(\eta; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4).$$

Подставив (14) в (19) и проинтегрировав по угловой переменной в интеграле по η, получим с учетом (15)

$$B(\tau) = 2\pi \int_0^\infty \Phi(\eta) \hat{P}(\eta) J_0(\eta v \tau) \eta d\eta, \tag{20}$$

где $\hat{P}(\eta)$ есть результат интегрирования функции $P(\eta)$ из (19) по углам.

Заметим, что (20) есть преобразование Ханкеля нулевого порядка [10] от функции $2\pi\Phi(\eta)\hat{P}(\eta)$.

Для частотного спектра $S(\nu)$ сигнала прибора

$$S(\nu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\nu\tau} d\tau.$$

Из (20) следует выражение

$$S(\nu) = \frac{2}{v} \int_{\nu/v}^{\infty} \Phi(\eta) \hat{P}(\eta) \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \frac{\nu^2}{v^2}}} d\eta, \tag{21}$$

являющееся преобразованием Абеля [10] функции $(2/v)\Phi(\eta)\hat{P}(\eta)$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

4. Вычисление корреляционной функции сигнала методом Рытова

В первом порядке метода плавных возмущений решение задачи (9), (10) на плоскости $x=L$ представляется в виде

$$u(L, \rho, t) = u_0(L, \rho)\, e^{\Psi(L, \rho, t)}, \tag{22}$$

где u_0 есть решение невозмущенного уравнения, а Ψ имеет вид [1]

$$\Psi(L, \rho, t) = \frac{k^2}{4\pi} \int\limits_0^L \int \frac{\exp\{ik\sqrt{(L-x')^2 + (\rho-\rho')^2}\}}{\sqrt{(L-x')^2+(\rho-\rho')^2}} \frac{u_0(x', \rho)}{u_0(L, \rho)} \varepsilon'(x', \rho')\, d\rho' dx'. \tag{23}$$

Подстановка (22) в формулы (6) и (7) приводит к выражениям

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2) = \langle \exp\{\Psi(L, \rho_1, t_1) + \Psi^*(L, \rho_2, t_1) + \Psi(L, \rho_3, t_2) + \Psi^*(L, \rho_4, t_2)\}\rangle \Gamma_{0000}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \tag{24}$$

$$\Gamma(\rho_i, \rho_k; t) = \langle \exp\{\Psi(L, \rho_i, t) + \Psi^*(L, \rho_k, t)\}\rangle \Gamma_{00}(\rho_i, \rho_k), \tag{25}$$

где

$$\Gamma_{0000}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \equiv u_0(L, \rho_1) u_0^*(L, \rho_2) u_0(L, \rho_3) u_0^*(L, \rho_4),$$

$$\Gamma_{00}(\rho_i, \rho_k) \equiv u_0(L, \rho_i) u_0^*(L, \rho_k).$$

Предполагая, что значения функции Ψ являются гауссовскими случайными величинами [1] (с $\langle\Psi\rangle = 0$), для корреляционной функции (4) получим

$$B(t_1, t_2) = \int d\varkappa_1 \sum(\varkappa_1) \int d\varkappa_2 \sum(\varkappa_2) \int d\rho_1 \int d\rho_2 \int d\rho_3 \int d\rho_4 \times A(\rho_1 \varkappa_1) A^*(\rho_2, \varkappa_1) A(\rho_3, \varkappa_2) A^*(\rho_4, \varkappa_2) \exp\{T(\rho_1, \rho_2) + T(\rho_3, \rho_4)\} \times [\exp\{Q(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2)\} - 1]\, \Gamma_{0000}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2). \tag{26}$$

Здесь

$$T(\rho_i, \rho_k) \equiv \langle[\Psi(L, \rho_i, t) + \Psi^*(L, \rho_k, t)]^2\rangle,$$

$$Q(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4; t_1, t_2) \equiv \langle[\Psi(L, \rho_1, t_1) + \Psi^*(L, \rho_2, t_1)][\Psi(L, \rho_3, t_2) + \Psi^*(L, \rho_4, t_2)]\rangle,$$

т. е. являются суммами членов вида $\langle\Psi\Psi^*\rangle$, $\langle\Psi\Psi\rangle$, $\langle\Psi^*\Psi^*\rangle$, причем в T входят только одновременные моменты, а в Q — двухвременные. Расчет этих величин (одновременных; двухвременные могут быть получены аналогично) произведен в [11, 12] при тех же предположениях, которыми мы пользовались в борновском приближении: $ka \gg 1$, $l \ll L$, $a/R_c \ll 1$, $a^2/R_c l \ll 1$. В результате для корреляционной функции $B(\tau) \equiv B(t, t+\tau)$ получаем выражение

$$B(\tau) = \int d\varkappa_1 \sum(\varkappa_1) \int d\varkappa_2 \sum(\varkappa_2) \int d\rho_1, \int d\rho_2, \int d\rho_3, \int d\rho_4 \times A(\rho_1 \varkappa_1) A^*(\rho_2, \varkappa_1) A(\rho_3, \varkappa_2) A^*(\rho_4, \varkappa_2) \Gamma_{0000}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \times \exp\left\{\int\limits_0^\infty \Phi(\eta) K(\eta; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)\, \eta d\eta\right\} \times \left[\exp\left\{\int\limits_0^\infty \Phi(\eta) M(\eta; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) J_0(\eta v \tau)\, \eta d\eta\right\} - 1\right], \tag{27}$$

где K и M — известные функции. Из формулы (27) следует, что восстановление спектра турбулентности $\Phi(\eta)$ по $B(\tau)$ в общем случае затруднительно. Заметим, что в случае, когда возможно разложить экспоненту в (27) в ряд Тейлора и ограничиться линейным по Φ членом, мы получим выражение, совпадающее с формулой (19) (так как $M(\eta; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

равна проинтегрированной по угловой переменной вектора η функции $R(\eta;\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4)$), т. е. возвратимся к борновскому приближению.

Рассмотрим случай, когда оптическая система воспринимает поле в произвольной точке ρ_0 плоскости *3* (см. рисунок), т. е.

$$A(\rho,\ \varkappa) = \delta(\rho - \rho_0)\,\hat{A}(\varkappa,\ \rho). \tag{28}$$

Тогда из (27) имеем

$$B(\tau) = \Gamma_{0000}(\rho_0,\ \rho_0,\ \rho_0,\ \rho_0)\,D(\rho_0)\exp\left\{\int\limits_0^\infty \Phi(\eta)\,K(\eta,\ \rho_0)\,\eta d\eta\right\}\times$$
$$\times\left[\exp\left\{\int\limits_0^\infty \Phi(\eta)\,M(\eta,\ \rho_0)\,J_0(\eta v\tau)\,\eta d\eta\right\} - 1\right], \tag{29}$$

где

$$D(\rho_0) \equiv \int \sum(\varkappa)\,|A(\rho_0,\ \varkappa)|^2\,d\varkappa. \tag{30}$$

Выражение перед квадратными скобками в (29) есть квадрат среднего значения сигнала $\langle I\rangle^2$; следовательно, для нормированной корреляционной функции сигнала

$$B_1(\tau) \equiv \frac{\langle I(t)\,I(t+\tau)\rangle}{\langle I\rangle^2} = \frac{B(\tau)}{\langle I\rangle^2} + 1 \tag{31}$$

из (29) получается выражение

$$B_1(\tau) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty \Phi(\eta)\,M(\eta,\ \rho_0)\,J_0(\eta v\tau)\,\eta d\eta\right\}. \tag{32}$$

Прологарифмировав (32), получим для логарифма нормированной корреляционной функции сигнала формулу

$$G(\tau) \equiv \ln B_1(\tau) = \int\limits_0^\infty \Phi(\eta)\,M(\eta,\ \rho_0)\,J_0(\eta v\tau)\,\eta d\eta, \tag{33}$$

т. е. $G(\tau)$ связано преобразованием Ханкеля нулевого порядка с функцией $\Phi(\eta)\,M(\eta,\ \rho_0)$. Отсюда для временного спектра $C(\nu)$

$$C(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\,e^{i\nu\tau}d\tau$$

имеем выражение

$$C(\nu) = \frac{1}{\pi v}\int\limits_{\nu/v}^{\infty} \Phi(\eta)\,M(\eta,\ \rho_0)\,\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \frac{\nu^2}{v^2}}}\,d\eta, \tag{34}$$

являющееся преобразованием Абеля функции $(1/\pi v)\,\Phi(\eta)\,M(\eta,\ \rho_0)$.

Заметим, что функция $C(\nu)$ является (с точностью до постоянной) частотным спектром флуктуаций логарифма амплитуды $\chi(L,\ \rho_0,\ t)$. Действительно, из (2) и (22) с учетом (28) и (30) следует

$$I(t) = |u_0(L,\ \rho_0)|^2\,D(\rho_0)\,e^{2\chi(L,\ \rho_0,\ t)} \tag{35}$$

и в предположении гауссовости случайной величины χ [1] из (31) имеем

$$\left.\begin{aligned} B_1(\tau) &= e^{4\langle\chi(L,\ \rho_0,\ t)\,\chi(L,\ \rho_0,\ t+\tau)\rangle},\\ G(\tau) &= 4\,\langle\chi(L,\ \rho_0,\ t)\,\chi(L,\ \rho_0,\ t+\tau)\rangle,\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

т. е. $C(\nu)$ есть учетверенный спектр флуктуаций логарифма амплитуды. Выражение вида (34) для спектра флуктуаций амплитуды было получено в [1, 13] для частного случая точечного приемника на оси (т. е. $\hat{A}(\rho, \varkappa) = 1$, $\chi(\varkappa) = 1$, $\rho_0 = 0$).

5. Обсуждение результатов

Для интегральных преобразований (20) и (33) существуют формулы обращения [10]

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\eta) &= \frac{v^2}{2\pi}\hat{P}^{-1}(\eta)\int\limits_0^\infty B(\tau)\,J_0(\eta v\tau)\,\tau d\tau,\\ \Phi(\eta) &= v^2 M^{-1}(\eta, \rho_0)\int\limits_0^\infty G(\tau)\,J_0(\eta v\tau)\,\tau d\tau,\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

а для преобразований (21) и (34) формулы обращения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\eta) &= -\frac{v^2}{\pi}\hat{P}^{-1}(\eta)\int\limits_{\eta v}^\infty \frac{S'(\nu)}{\sqrt{\nu^2 - \eta^2 v^2}}\,d\nu,\\ \Phi(\eta) &= -2v^2 M^{-1}(\eta, \rho_0)\int\limits_{\eta v}^\infty \frac{C'(\nu)}{\sqrt{\nu^2 - \eta^2 v^2}}\,d\nu.\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Выражения (37) и (38) дают формальное решение задачи восстановления спектра турбулентности; однако некорректность интегральных уравнений (20), (21), (33) и (34) требует для действительного решения задачи применения того или иного метода регуляризации [3, 14].

Заметим, что в проблеме восстановления существенную роль играют функции $\hat{P}$ и M, отражающие специфику используемой оптической системы. Ясно, что часть спектра неоднородностей, лежащая вне той области, в которой функция $\hat{P}$ (или M) заметно отлична от нуля, не оказывает практически влияния на функции $B(\tau)$ и $S(\nu)$ (или $G(\tau)$ и $C(\nu)$), поэтому восстановление этой части спектра невозможно. Следовательно, вид оптического устройства (т. е. функцию $\hat{P}$ или M) следует выбирать в зависимости от области спектральных чисел, в которой желательно установить вид энергетического спектра турбулентности.

Литература

[1] В. Н. Татарский. Распространение волн в турбулентной среде. Изд. «Наука», М., 1967.
[2] В. П. Лукин, В. Л. Миронов, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов. II. Всес. симп. по распространению лазерного излучения в атмосфере, тез. докл., Томск, 1973.
[3] А. С. Гурвич, Н. С. Тиме, Л. С. Туровцева, В. Ф. Турчин. Изв. АН СССР, сер. ФАО, *5*, 484, 1974.
[4] В. Н. Стасенко. ПМТФ, *3*, 152, 1970.
[5] С. Р. Стефанов, А. М. Трохан, Ю. Д. Чашечкин. ПМТФ, *5*, 103, 1971.
[6] В. Г. Иванов. ЖТФ, *44*, 677, 1974.
[7] Т. И. Арсеньян, А. А. Семенов, В. С. Бухаров. Квантовая электроника, *1*, 820, 1974.
[8] А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика, часть II. Изд. «Наука», М., 1967.
[9] T. L. Ho. J. Opt. Soc. Am., *60*, 667, 1970.
[10] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Изд. «Наука», М., 1974.
[11] R. A. Schmeltzer. Quart. Appl. Math., *24*, 339, 1967.
[12] A. Ishimaru. Radio Sci., *4*, 295, 1969.
[13] Н. С. Тиме. Изв. вузов, радиофизика, *8*, 1197, 1971.
[14] В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич. Усп. физ. наук, *102*, 345, 1970.

Поступило в Редакцию 13 мая 1975 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины