Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. П. Бышик, В. Л. Мережа

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ:
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Практическое руководство

для студентов специальности
1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям),
1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015

УДК 519.852(076)
ББК 22.183.41я73
Б95

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук Д. С. Кузьменков;
кандидат технических наук С. И. Жогаль

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Бышик, Т. П.

Б95 Методы оптимизации: Линейное программирование : практическое руководство / Т. П. Бышик, В. Л. Мережа ; М-во образования РБ, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 43 с.
ISBN 978-985-439-999-7

В настоящем руководстве представлены материалы для практического выполнения лабораторных работ по разделу «Линейное программирование» курса Методы оптимизации. Каждая работа содержит постановку задачи, алгоритмы или схему её решения, снабжена иллюстративными примерами, вариантами индивидуальных заданий и вопросами.

Предназначено студентам специальности 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (по направлениям и 1-31 03 03-06 Экономическая кибернетика в выполнении лабораторных работ.

УДК 519.852(076)
ББК 22.183.41я73

ISBN 978-985-439-999-7

Оглавление

Предисловие

Цель настоящего практического руководства по курсу «Методы оптимизации» состоит в том, чтобы выработать навыки решения разнообразных задач оптимизации. В этой части пособия рассматриваются задачи линейного программирования. Каждая работа содержит постановку задачи, алгоритм или схему её решения, снабжена иллюстративными решениями типовых примеров, вариантами индивидуальных заданий и вопросами.

В настоящем руководстве рассмотрены аналитические методы решения задач поиска экстремума линейных функций со многими переменными с линейными ограничениями, представлены материалы для практического выполнения лабораторных работ по курсу «Методы оптимизации».

В первой работе описан алгоритм решения линейных задач графическим методом, причем показано, как можно свести задачу линейного программирования со многими переменными к эквивалентной задаче с одной или двумя переменными. Графический метод для задач с двумя переменными позволяет иллюстрировать возможные исходы решения задач. Далее описаны алгоритмы решения линейных задач оптимизации табличными симплекс-методом и двухфазным симплекс-методом, которые позволяют решить любую линейную задачу. Четвертая работа знакомит студентов с теорией двойственности и возможным ее применением к исследованию задач. Изучение двойственного симплекс-метода позволяет рационально исследовать некоторые специальные модели и применять его к решению проблем из других более сложных разделов, например, теории игр. Наконец, в последней работе рассматривается метод потенциалов для решения одного из случаев важнейших транспортных задач.

Лабораторная работа 1. Графический метод решения задач линейного программирования

1. Постановка задачи оптимизации.
2. Определение оптимального плана.
3. Определение локального оптимального плана.
4. Определение минимизирующей последовательности.
5. Постановка производственной задачи.

Метод применим к задачам линейного программирования с двумя переменными:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

Алгоритм

1. В декартовой системе координат на плоскости строим множество X планов задачи как пересечение m полуплоскостей, задаваемых линейными неравенствами системы (1.2). При этом возможен один из случаев:

а) X – пустое множество;

б) X – выпуклый многоугольник;

в) X – выпуклая неограниченная многоугольная область.

Если а), то задача не имеет решения; если б) или в) – переходим к п. 2.

2. По целевой функции Z строим вектор $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ (градиент целевой функции), через начало координат проводим прямую Z_0 (линию нулевого уровня целевой функции): $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$.

3. При решении задачи максимизации (минимизации) прямую Z_0 перемещаем параллельно в направлении вектора $\bar{c}$ (вектора $-\bar{c}$) в наиболее отдалённую точку A (точку B) множества планов X. Координаты точки A (точки B) и составляют оптимальный план задачи максимизации (минимизации) функции Z на множестве X.

Если множество X ограничено, то задача всегда имеет решение. Если же X – неограниченная многоугольная область, то задача может не иметь решения в случае, когда не существует наиболее удалённой точки, т. е. целевая функция неограниченно возрастает (убывает) на X.

Если задача имеет оптимальный план, то он достигается либо в одной из вершин границы множества X, либо на одной из её сторон (альтернативный оптимум).

Замечание

Некоторые задачи линейного программирования с числом переменных $n > 2$ могут быть сведены к эквивалентным линейным задачам с двумя переменными. Для этого систему ограничений-равенств исходной задачи приводим к единичному базису. Определяем из неё базисные переменные (эти выражения называют уравнениями связи). Подставляем их в целевую функцию и ограничения-неравенства задачи. После решения полученной эквивалентной задачи с двумя переменными решение исходной задачи (базисные переменные) находят из уравнений связи.

Пример 1.1. Решить графическим методом задачу:

$$\begin{aligned}
&z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max(\min)\\
&x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\
&x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3,\\
&6x_1 - 2x_2 + x_3 \le 1,\\
&x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Решение

1. Приводим систему ограничений-неравенств к единичному базису

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Уравнения связи имеют вид:

$$\begin{aligned}
&x_3 = -1 + 3x_2,\\
&x_4 = 2 - 2x_2 - x_1
\end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Исключаем базисные переменные x_3, x_4 из задачи (1.3):

$$\begin{aligned}
&z = 2x_1 + x_2 + (-1 + 3x_2) + 3(2 - 2x_2 - x_1) = -x_1 - 2x_2 + 5,\\
&6x_1 - 2x_2 + (-1 + 3x_2) \le 1,\\
&6x_1 + x_2 \le 2,\\
&-1 + 3x2 \ge 0,\\
&x_2 \ge \frac{1}{3},\\
&2 - 2x_2 - x_1 \ge 0,\\
&x_1 + 2x_2 \le 2.
\end{aligned}$$

3. Обозначив $u = z - 5$, получаем задачу (1.5) эквивалентную задаче (1.3):

$$\begin{aligned} & u = -x_1 - 2x_2 \to \max(\min) \\ & 6x_1 + x_2 \le 2, \\ & x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge \frac{1}{3}. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

4. На плоскости x_1Ox_2 строим множество X планов задачи (1.5), вектор $\bar{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, линию нулевого уровня $u = 0$ и линии уровней $u = u_{\max}$, $u = u_{\min}$, (см. рисунок 1):

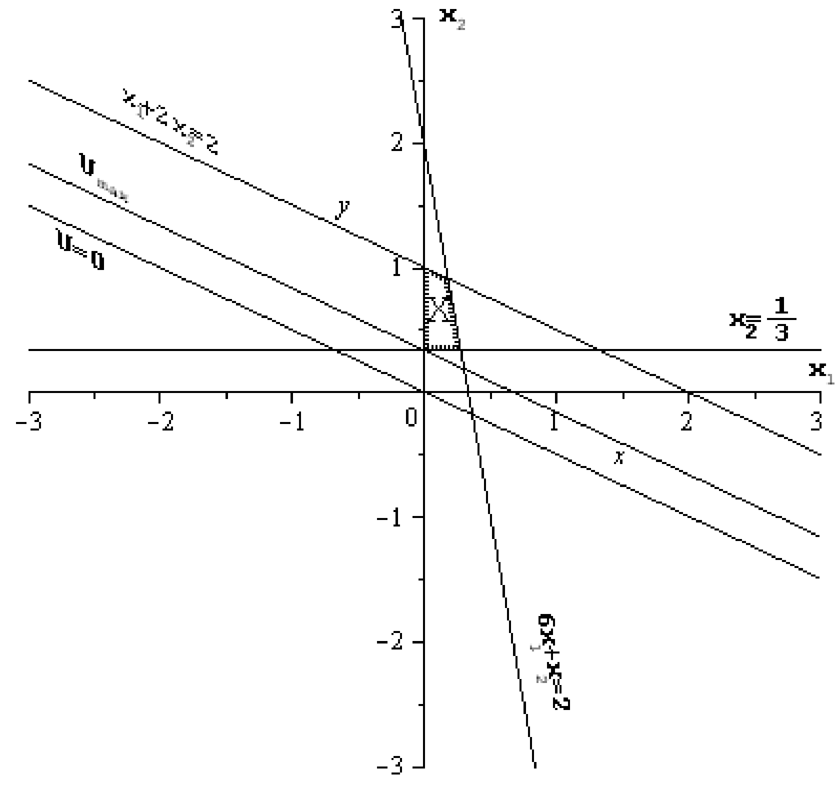

Рисунок 1 – Графическое решение задачи (1.5)

5. *Анализ.* Область X – четырёхугольник $ABCD$. В точке $A\left(0, \frac{1}{3}\right)$ целевая функция u имеет максимальное значение $u_{\max} = u\left(0, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$.

Функция u имеет минимальное значение во всех точках отрезка BC, так как линии уровня функции u параллельны этому отрезку, задача минимизации имеет альтернативный оптимум.

Имеем точки с координатами: $B\,(0,\,1)$ и $C\left(\dfrac{2}{11},\dfrac{10}{11}\right)$.

Координаты $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ произвольной точки отрезка BC можно записать в виде:

$$\tilde{x}_1 = \alpha x_{1B} + (1-\alpha)x_{1C} = -\frac{2}{11}\alpha + \frac{2}{11},$$

$$\tilde{x}_2 = \alpha x_{2B} + (1-\alpha)x_{2C} = -\frac{1}{11}\alpha + \frac{10}{11},$$

$\left(-\dfrac{2}{11}\alpha + \dfrac{2}{11},\ \dfrac{1}{11}\alpha + \dfrac{10}{11}\right)$ – общее решение задачи минимизации функции u.

Используя решение задачи (1.5) и уравнения (1.4), получаем решение исходной задачи (1.3):

$x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{1}{3},\ x_3 = 0,\ x_4 = \dfrac{4}{3}$ – оптимальный план задачи максимизации.

$\tilde{x}_1 = -\dfrac{2}{11}\alpha + \dfrac{2}{11},\ \tilde{x}_2 = \dfrac{1}{11}\alpha + \dfrac{10}{11},\ \tilde{x}_3 = \dfrac{3}{11}\alpha + \dfrac{19}{11},\ \tilde{x}_4 = 0,\ \alpha \in [0, 1]$ – оптимальный план задачи минимизации.

Ответ: $z_{max} = 4$, $x_{max} = \left(0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{4}{3}\right)$, $z_{min} = 3$ на отрезке.

Задание. Графическим методом решить следующие задачи:

1. $z = x_1 - x_2 + x_3 \to \max(\min)$
$4x_1 - x_2 + x_3 = 6,$
$-3x_1 - x_2 + x_4 = 2,$
$x_2 - 2x_3 + x_4 \le 1,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 4}$

2. $z = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \max(\min)$
$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$
$-3x_1 + x_2 + x_4 = 1,$
$2x_2 - x_3 + x_4 \le 3,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 4}$

3. $z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max(\min)$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$2x_2 + 3x_3 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 4}$

4. $z = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \max(\min)$
$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 20,$
$x_2 + x_5 = 2,$
$x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 5}$

$$5.\ z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2,$$
$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ 3,\ 4$$

$$6.\ z = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \to \max(\min)$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$
$$2x_1 + x_2 - x_4 \geq -7,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 4}$$

$$7.\ z = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \to \max(\min)$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 3,$$
$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 4}$$

$$8.\ z = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ 3,\ 4$$

$$9.\ z = 2x_1 + 3x_2 + x_4 \to \max(\min)$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2,$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10,$$
$$-2x_1 + 5x_2 + x_5 = 10,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 5}$$

$$10.\ z = -x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_4 \to \max(\min)$$
$$-2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 6,$$
$$-4x_1 + x_3 + 4x_4 = 4,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 4}$$

$$11.\ z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max(\min)$$
$$x_1 - x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 2,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 4}$$

$$12.\ z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \max(\min)$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1,$$
$$3x_1 + x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$4x_1 + x_2 + x_4 \leq 2,$$
$$x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,\ 4}$$

$$13.\ z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \to \max(\min)$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = -1,$$
$$x_1 - 3x_2 - x_4 = -13,$$
$$4x_1 + x_2 + x_5 = 26,$$
$$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 6}$$

$$14.\ z = x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max(\min)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 20,$$
$$x_1 + x_3 + 3x_4 = 8,$$
$$x_1 + x_5 = 2,$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,\ 5}$$

15. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max(\min)$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_1 - x_2 + 5x_4 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_4 \le 1,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$$

16. $z = 3x_1 - 2x_2 + x_4 \to \max(\min)$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 4,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$
$$-x_1 + 2x_3 + x_4 \le 2,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

17. $z = 5x_1 + x_2 - x_3 \to \max(\min)$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 8,$$
$$x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

18. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max(\min)$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2,$$
$$x_1 + x_3 - 2x_4 \le 1,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

19. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max(\min)$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10,$$
$$5x_1 - 2x_3 + x_5 = 10,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$$

20. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max(\min)$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 - 3x_3 = 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \le 4,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

21. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max(\min)$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 \le 13,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

22. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \max(\min)$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15,$$
$$5x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 10,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 3,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 1,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$$

23. $z = 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max(\min)$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1,$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

24. $z = x_1 + x_3 + x_4 \to \max(\min)$
$$-x_1 + 4x_3 - x_4 = 6,$$
$$x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 72,$$
$$-3x_1 + 11x_4 - x_5 = 16,$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$$

25. $z = 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max(\min)$
$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3,$
$x_1 + 7x_2 - 2x_4 = 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 1,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

26. $z = -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \to \max(\min$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$3x_1 + x_2 - x_5 = -5,$
$3x_1 + x_3 - 4x_6 = -6,$
$4x_1 + x_2 - 4x_6 = 3,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}$

Лабораторная работа 2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

1. Постановка задачи линейного программирования в канонической форме.
2. Определение базисного плана.
3. Критерий оптимальности в симплекс-методе.
4. Достаточное условие неограниченного возрастания целевой функции.
5. Алгоритм симплекс-метода, правило прямоугольника.

Симплекс-метод применяется к задачам линейного программирования, которые в канонической форме обладают свойствами: ранг матрицы системы основных ограничений равен числу уравнений, ограничения задачи не противоречивы, причём известен или легко строится начальный базисный план.

Алгоритм

1. Задачу линейного программирования приводим к каноническому виду

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \ge 0$$
$$x, c \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A \ - \ (n \times m) \text{ матрица.} \tag{2.1}$$

2. Строим начальный базисный план. Для этого исходную задачу преобразуем к виду (2.2):

$$c'x \to \max, \quad (A_Б\ A_Н)\begin{pmatrix} x_Б \\ x_Н \end{pmatrix} = b, \quad x \ge 0, \quad (b \ge 0), \tag{2.2}$$

где
$x_Б = \{x_j,\ j \in J_Б\}, \quad J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\} \in J, \quad x_Н = \{x_j,\ j \in J_Н = J \setminus J_Б\}, \quad J = \{1, 2, ..., n\},$
$A_Б = E_m, \quad A_Н = \{a_j,\ j \in J_Н\}, \quad a_j = \{a_{ij},\ i \in I\}, \quad I = \{1, 2, ..., m\}.$

Вектор $x^1 = \begin{pmatrix} x_Б^1 \\ x_Н^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ – начальный базисный план задачи (2.1).

Вычисляем на нём значение целевой функции и оценки:
$z(x^2) = c'x^1 = c'_Б b, \quad c'_Б = \{c_j,\ j \in J_Б\}, \quad \Delta_j = c'_Б A_Б^{-1} a_j - c_j = c'_Б a_j - c_j, \quad j \in J_Н$
и переходим к пункту 3.

3. Строим начальную симплексную таблицу, задающую базисный план x^1.

4. Проверяем выполнение критерия оптимальности плана. Если все оценки $\Delta_j \ge 0, \quad j \in J_Н$, то базисный план (2.2) оптимален. Задача решена. Если $\exists\, \Delta_j < 0, \quad j \in J_Н$, то идём к пункту 5.

5. Проверяем достаточные условия неограниченности целевой функции. Если

$$\exists \Delta_{j^*} < 0, \quad j^* \in J_Н, \quad a_{ij^*} \le 0, \quad \forall i \in I_Б, \tag{2.3}$$

то задача (2.1) не имеет решения, так как целевая функция не ограничена на множестве планов. Если условие (2.3) не имеет места, то переходим к пункту 6.

6. Совершаем симплекс-итерацию – переход к новому базисному плану:
а) строим новый базис с индексным множеством

$J_Б = (J_Б \setminus q) \cup p,$

где p и q находят из соотношений:

$\Delta_p = \min \Delta_j$ (p-й столбец – разрешающий),

$\theta_q = \dfrac{b_q}{a_{ip}} = \min\limits_{\{i \in I,\, a_{ip} > 0\}} \dfrac{b_i}{a_{ip}}$ (q-й строка – разрешающая),

а элемент таблицы a_{qp} – разрешающий;

б) строим новую симплекс-таблицу, совершая основное симплексное преобразование по элементу a_{qp}:

$$a'_{qj} = \frac{a_{qj}}{a_{qp}}, \quad b'_q = \frac{b_q}{a_{qp}}, \quad a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} - a_{qi}}{a_{qp}},$$

$$b'_i = a_i - \frac{b_q - a_{ip}}{a_{qp}}, \quad \forall i \in I, \quad i \neq q, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_p - a_{qj}}{a_{qp}},$$

$$\forall j \in J, \quad x^2 = \begin{pmatrix} x^2_Б \\ x^2_Н \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(J'_Б) \\ x^2(J'_Н) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \{b_i, i \in I\}, \quad J'_Н = J \setminus J_Б.$$

7. К новой таблице применяем пункт 4 алгоритма и т. д.

Замечания

1. Расчет новой симплекс-таблицы нужно начинать с определения значений столбца b и строки Δ, так как если для некоторого базисного плана выполняется критерий оптимальности (см. пункт 4), то нет необходимости вычислять оставшуюся часть таблицы.

2. Для проверки правильности вычисления симплекс-таблиц можно ввести столбец $\sum$, который равен сумме всех столбцов таблицы и также вычисляется по правилу прямоугольника.

Пример 2.1. Симплекс-методом решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} & z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2, \\ & 3x_1 + x_3 \leq 5, \quad x_i \geq 0, \; i = \overline{1, 3} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Решение

1. Приводим задачу (2.4) к каноническому виду:

$$\begin{aligned} & z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ & 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 6}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

1. Из системы ограничений задачи (2.5) определяем начальный базисный план:

$$x^1 = (0, 0, 0, 1, 2, 5), \quad J_Б = \{4, 5, 6\}.$$

2. Составляем для задачи (2.5) начальную симплекс-таблицу и применяем симплекс-метод:

c			-1	1	3	0	0	0		
$c_Б$	Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Σ	θ
0	a_4	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	4	$1/1\rightarrow$
0	a_5	2	-4	2	-1	0	1	0	0	–
0	a_6	5	3	0	1	0	0	1	10	5/1
	Δ	0	1	-1	$-3\uparrow$	0	0	0	-3	
	a_3	1	2	-1	1	1	0	0	4	–
	a_5	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	4	$3/1\rightarrow$
	a_6	4	1	1	0	-1	0	1	6	4/1
	Δ	3	7	$-4\uparrow$	0	3	0	0	9	
	a_3	4	0	0	1	2	1	0	8	–
	a_2	3	-2	1	0	1	1	0	4	–
	a_6	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	2	$1/3\rightarrow$
	Δ	15	$-1\uparrow$	0	0	7	4	0	26	
	a_3	4								
	a_2	$\frac{11}{3}$								
	a_1	$\frac{1}{3}$								
	Δ	$15\frac{1}{3}$	0	0	0	$6\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$25\frac{2}{3}$	

Последняя таблица задаёт оптимальный план: задачи (2.4), так как все оценки $\Delta_j \geq 0$, $j \in J_Н = \{4, 5, 6\}$ и

$$x_1^0 = \frac{1}{3}, \quad x_2^0 = \frac{11}{3}, \quad x_3^0 = 4.$$

Ответ: $x^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 4, 0, 0, 0\right)$, $\quad z_{\max} = 15\frac{1}{3}.$

Задание

Симплекс-методом решить следующие задачи:

1. $z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$2x_1 + x_2 \leq 4,$

$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$

$-x_1 + x_3 \geq -1,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 3}$

2. $z = 3x_1 - x_3 \rightarrow \max$

$x_1 - x_2 + x_4 = 5,$

$2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4,$

$-2x_2 + x_6 = 8,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 6}$

3. $z = x_2 - x_1 \to \max$
$-2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 - x_2 \le 2,$
$x_1 + x_2 \le 5,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,2}$

4. $z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$
$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6,$
$x_2 - x_3 + x_4 \le 2,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

5. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$
$2x_1 + x_2 - x_3 \le 2,$
$2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 6,$
$8x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 12,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

6. $z = 8x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 20,$
$-6x_1 + x_2 \le 12,$
$x_1 - x_2 \le 2,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

7. $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5,$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3,$
$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

8. $z = -x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$
$-x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 4,$
$2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

9. $z = 2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_5 \to \max$
$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1,$
$x_2 - x_3 + x_5 = 4$
$x_2 + x_4 \le 2,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

10. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$
$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5,$
$x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 3,$
$x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 5,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}$

11. $z = -5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$
$x_1 - x_2 - x_3 \le 2,$
$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$2x_1 + x_2 + x_5 = 2,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}$

12. $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4,$
$2x_1 + x_2 \le 1,$
$x_2 + x_4 \le 3,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

13. $z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$
$3x_1 - x_3 \le 8,$
$-x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

14. $z = 10x_1 - 7x_2 - 5x_3 \to \min$
$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 5,$
$x_1 - 3x_3 \le 1,$
$x_2 + x_3 \le 4,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

15. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$
$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$
$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

16. $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$
$-5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15,$
$x_1 - x_2 \le 4,$
$-2x_1 + x_3 \le 2,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

17. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 7,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

18. $z = -8x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10,$
$x_1 + x_2 - x_3 \le 5,$
$4x_1 + x_2 \le 7,$
$x_i \ge 0, i = \overline{1, 3}$

19. $z = x_1 + x_2 - x_3 \to \max$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1,$
$x_1 + x_3 \le 2,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

20. $z = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3,$
$3x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 5,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

21. $z = 6x_1 + x_2 - x_3 \to \min$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9,$
$-x_1 - x_2 + 4x_3 \le 2,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

22. $z = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$-x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6,$
$2x_1 + x_3 \le 5,$
$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, 3}$

23. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$

$x_1 + x_2 \le 1,$

$x_1 + 2x_3 \le 1,$

$x_1 - x_2 + x_3 \le 2,$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

24. $z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

$2x_1 + x_3 + x_4 \le 1,$

$x_2 - 2x_4 \le 3$

$x_1 - x_2 + x_3 \le 4,$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

25. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5,$

$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2,$

$-x_1 + x_2 - x_3 \ge -1,$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$

26. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$

$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$

$-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10,$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$

Лабораторная работа 3. Двухфазный симплекс-метод решения задач линейного программирования

1. Постановка задачи первой фазы в общем виде.
2. Три случая, которые возможны в результате решения задачи на первой фазе.
3. Лемма о непустоте множества планов задачи первой фазы.

Дана задача линейного программирования в канонической форме:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \ge 0 \quad (b \ge 0) \tag{3.1}$$

Предположим, что для неё трудно построить начальный базисный план. В этом случае задачу (3.1) следует решать двухфазным симплекс-методом.

Алгоритм

Первая фаза. Построение начального базисного плана задачи (3.1).

1. Составляем задачу первой фазы:

$$-e'x_{И} \to \max, \quad Ax + x_{И} = b, \quad x \ge 0, \quad x_{И} \ge 0 \tag{3.2}$$

где $e' = (1, 1, \ldots, 1) \in R^m$, $x_n = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) \in R^m$ – вектор искусственных переменных.

2. Задачу (3.2) решаем симплекс-методом. Для неё

$$J_Б = J_И = \{n+1, n+2, ..., n+m\}, \quad A_Б = E_m, \quad x_Б = b.$$

3. Пусть решение задачи (3.2) – $\{x^*, x_И^*\}$ задается таблицей T^* с множеством базисных индексов $J_Б$ и элементами

$$a_{ij}^*, \quad i \in J_Б^*, \quad j \in J \bigcup J_Б.$$

Возможны три случая:

а) если $x_И^* \neq 0$, то исходная задача не имеет планов. Процесс решения окончен;

б) если $x_И^* = 0$ и $J_Б^* \bigcap J_И = \varnothing$ (среди базисных планов нет искусственных), то x^* – базисный план задачи (3.1) с базисным множеством $J_Б^*$;

в) если $x_И^* = 0$, но $J_Б^* \bigcap J_И \neq \varnothing$ (среди базисных переменных имеются искусственные), то для $\forall i \in J_Б^* \bigcap J_И$ возможны два подслучая:

1) если в строке, соответствующей переменной i таблицы T^* имеется элемент $a_{ij}^* \neq 0, j \in J$, то, выбирая a_{ij}^* за разрешающий элемент и выполняя с ним симплексное преобразование, исключаем искусственную переменную x_i^* из базисных, а x_j вводим в состав базисных переменных;

2) если же в этой строке все $a_{ij}^* = 0, \forall j \in J$, то в системе ограничений задачи (3.2) $(i-n)$ уравнение есть следствие остальных уравнений. Его нужно из (3.2) удалить, а из таблицы T^* вычеркнуть указанную i-ю строку и j-й столбец.

Выполнение процедур 1) и 2) над всеми элементами множества $J_Б^* \bigcap J_И$ приведут к б).

Вторая фаза. Построение оптимального плана исходной задачи (3.1)–(3.3). Принимая x^* за начальный базисный план, а T^* без столбцов $j \in J_И$ – за начальную симплексную таблицу, решаем задачу (3.1)–(3.3) симплекс-методом.

Замечание

В конкретных случаях при составлении задачи первой фазы (3.2) искусственные переменные следует вводить только в те ограничения задачи (3.1), в которых нет базисных переменных. Более того, в основных ограничениях задачи (3.1) предварительно с помощью элементарных эквивалентных преобразований (умножение ограничений на положительное число, сложение ограничений) могут быть построены некоторые легко выделяющиеся базисные переменные. Все это ускоряет решение задачи первой фазы.

Пример 3.1. Двухфазным симплекс-методом решить задачу:

$$
\begin{aligned}
&z = 3x_1 + x_2 - x_4 \to \max, \\
&3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\
&x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 2, \\
&-2x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Решение

Первая фаза. Составляем задачу первой фазы. Так как в первой равенстве уже есть базисная переменная x_3, то достаточно ввести всего лишь две искусственные переменные x_5 и x_6 во второе и третье равенства.

$$
\begin{aligned}
&F = -x_5 - x_6 \to \max, \\
&3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\
&x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 2, \\
&-2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1, \\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 6}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$x^1 = (0, 0, 1, 0, 2, 1)$ – начальный базисный план задачи (3.4), $J_Б = \{3, 5, 6\}$, $J_И = \{5, 6\}$.

Задачу (3.4) решаем симплекс-методом:

c / $c_Б$			0	0	0	0	-1	-1	
	Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ
0	a_3	1	3	-5	1	0	0	0	
-1	a_5	2	1	2	0	2	1	0	1
-1	a_6	1	-2	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	$1 \to$
	F	-3	1	$-3 \uparrow$	0	-1	0	0	
	a_3	6	-7	0	1	-5	0	5	
	a_5	0	$\boxed{5}$	0	0	4	1	-2	$0 \to$
	a_2	1	-2	1	0	-1	0	1	
	F	0	$-5 \uparrow$	0	0	-4	0	3	
	a_3	6	0	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{5}$	
	a_1	0	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
	a_2	1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	
	F	0	0	0	0	0	1	1	

Последняя таблица задаёт оптимальный план задачи (3.4) $\{x^*, x^*_И\} = \{0, 1, 6, 0, 0, 0\}$. Искусственные переменные x^*_5, x^*_6 не входят в базис. Следовательно $x^* = (0, 1, 6, 0)$ – начальный базисный план задачи (3.3), $J^*_Б = \{1, 2, 3\}$.

Вторая фаза. Используя последнюю таблицу, отбросив в ней столбцы a_5, a_6 и заменив вектор стоимости *c,* решаем задачу (3.3) симплексным методом в следующей таблице:

c / $c_Б$			3	1	0	-1	
	Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	θ
0	a_3	6	0	0	1	$\frac{8}{5}$	
3	a_1	0	1	0	0	$\frac{4}{5}$	
1	a_2	1	0	1	0	$\frac{3}{5}$	
	Δ	1	0	0	0	4	

Так как все оценки в строке Δ в этой таблице неотрицательны, то таблица задает оптимальный план исходной задачи (3.3).

Ответ: $x^0 = (0, 1, 6, 0)$, $z_{\max} = 1$.

Задание. Двухфазным симплекс-методом решить следующие задачи:

1. $z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \min$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2,$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6,$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}$

2. $z = 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \max$

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 16,$

$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 10,$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}$

3. $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \to \max$

$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2,$

$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4,$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}$

4. $z = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \to \max$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7,$

$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4,$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}$

5. $z = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\
& x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

6. $z = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\
& 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

7. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\
& -x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

8. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\
& x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

9. $z = x_1 + x_2 - x_3 + x_6 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 = 4, \\
& x_2 - 2x_5 - x_6 = 5, \\
& -x_3 - 2x_5 - x_6 = 7, \\
& -x_3 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 3, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 6}
\end{aligned}
$$

10. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& 6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

11. $z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 7, \\
& -x_1 + 3x_3 \le 2, \\
& 4x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 3}
\end{aligned}
$$

12. $z = 8x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \\
& x_1 + x_2 - x_3 \le 5, \\
& 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 3}
\end{aligned}
$$

13. $z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\
& x_1 + 2x_2 - x_4 = 3, \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

14. $z = -1.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 3, \\
& -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 1, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}
\end{aligned}
$$

15. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9, \\
& x_2 + x_3 \le 9, \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 10, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 3}
\end{aligned}
$$

16. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6, \\
& 4x_1 - 2x_2 + x_3 \le 12, \\
& x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 6, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 3}
\end{aligned}
$$

17. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \ge 5,\\ &-x_1 + 3x_3 \le 3,\\ &x_1 + x_2 \ge 8,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 2} \end{aligned}$$

18. $z = -x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 3,\\ &x_1 + x_3 \le 10,\\ &3x_1 + x_2 \ge 9,\\ &-x_1 + x_2 \le 4,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 2} \end{aligned}$$

19. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,\\ &x_1 + 14x_2 + 10x_4 - 10x_4 = 24,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

20. $z = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\\ &x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

21. $z = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,\\ &2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

22. $z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 - x_3 + 2x_4 = 1,\\ &4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

23. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3,\\ &2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

24. $z = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -5,\\ &x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

25. $z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2,\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

26. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{aligned} &-x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 1,\\ &2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3,\\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned}$$

Лабораторная работа 4. Теория двойственности в линейном программировании

1. Определение двойственной задачи к задаче линейного программирования (ЛП) в каноническом виде.
2. Определение двойственной задачи к задаче ЛП в нормальном виде.
3. Шесть соотношений двойственности.

Все множество задач линейного программирования можно разбить на пары взаимодвойственных задач.

Для канонической формы:

$z = c'\ x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \ge 0;$

$T = b'\ y \to \min, \quad A'\ y \ge c.$

Для нормальной формы:

$z = c'\ x \to \max, \quad Ax \le b, \quad x \ge 0;$

$T = b'\ y \to \min, \ A'\ y \ge c, \quad y \ge 0.$

Для общей формы:

$$z = c'_{(1)} x_{(1)} + c'_{(2)} x_{(2)} \to \max$$

$$\left(A_{11} A_{12}\right)\begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix} = b_{(1)},$$

$$\left(A_{21} A_{22}\right)\begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix} \le b_{(2)}, \qquad x_{(1)} \ge 0. \tag{4.1}$$

$$T = b'_{(1)} y_{(1)} + b'_{(2)} y_{(2)} \to \min$$

$$\left(A'_{11}\, A'_{21}\right)\begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix} \ge c_{(1)}, \quad \left(A'_{12}\, A'_{22}\right)\begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix} = c_{(1)}, \quad y_{(2)} \ge 0, \tag{4.2}$$

где x, $c \in R^n$, $\quad y, b \in R^m, \quad x_{(1)}, c_{(1)} \in R^l, \quad c_{(2)}, x_{(2)} \in R^{n-l},$

$y_{(1)}, b_{(1)} \in R^S, \quad y_{(2)}, b_{(2)} \in R^{m-S}, \quad A_{11} - (S \times l), \quad A_{12} - (S \times (n-l)),$

$A_{21} - (m-S) \times l), \quad A_{22} - (m-S) \times (n-l)$ – матрицы.

Связь между любой парой взаимодействующих задач раскрывается следующими ***соотношениями двойственности.***

1. *Теорема существования.* Для существования задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы не были пусты множества её прямых и двойственных планов.

2. *Теорема двойственности.* Для существования решения прямой задачи линейного программирования (4.1) необходимо и достаточно существования решения y^0 двойственной ей задачи (4.2). На решениях x^0, y^0 значения целевой функций задач (4.1), (4.2) равны:

$$c'\ x^0 = b'\ y^0 \tag{4.3}$$

3. *Основное неравенство*. На каждой паре из прямого x и двойственного y планов выполняется неравенство:

$$c'\ x \le b'\ y \tag{4.4}$$

4. *Достаточное условие несовместности ограничений.* Если вдоль некоторой последовательности $\{y_k\}$ $(\{x_k\})$, k = 1, 2… двойственных (прямых) планов двойственная (прямая) целевая функция неограниченно убывает (возрастает):

$$b' y_k \to -\infty \ (c' x^k \to \infty), \ k \to \infty, \tag{4.5}$$

то задача (4.1) (задача (4.2)) не имеет планов.

5. *Достаточное условие оптимальности.* Если на некоторых прямом x^* и двойственном y^* планах выполняется равенство:

$$c' x^* = b' y^*, \tag{4.6}$$

то x^*, y^* – решение задач (4.1) и (4.2).

6. *Условия дополняющей нежесткости.* Планы x^0, y^0 задач (4.1), (4.2) тогда и только тогда оптимальны, когда

$$x^{0/}(A' y^0 - c) = 0, \quad y^{0/}(Ax^0 - b) = 0. \tag{4.7}$$

Из равенств (4.7) и ограничений задач (4.1), (4.2) следует:

а) если $x_i^0 \neq 0 \quad (y_j^0 \neq 0)$, то i-е ограничение задачи (4.2) (j-е ограничение задачи (4.1)) активно на плане y^0 (на плане x^0);

б) если j-е ограничение прямой задачи (i-е ограничение двойственной задачи) пассивно на плане x^0 (на плане y^0), то $y_j^0 = 0 \ (x_i^0 = 0)$,

$1 \le i \le l, \quad m - S \le j \le m.$

Соотношения двойственности позволяют:

1) установить разрешимость задач;

2) проверить оптимальность плана этой задачи по свойствам решения двойственной;

3) по оптимальному плану одной задачи найти оптимальный план двойственной.

Пример 4.1. Проверить, является ли оптимальным план $x^0 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$ для задачи:

$$\begin{aligned} & z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ & -6x_1 + 2x_2 - x_4 \ge -1, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Решение

1. Проверим, является ли x^0 планом задачи (4.8):

$$x_1^0 = 0,\ \ x_2^0 = \frac{1}{3} > 0,\ \ x_3^0 = \frac{4}{3} > 0,\ \ x_4^0 = 0, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} &1\cdot 0 - 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{4}{3} + 1\cdot 0 = 1,\\ &1\cdot 0 + 5\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{4}{3} - 1\cdot 0 = 3,\\ &-6\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot 0 = \frac{2}{3} > -1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

2. Приводим задачу (4.8) к виду (4.1):

$$\begin{aligned} &z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max\\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ &x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3,\\ &6x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 1,\\ &x_i \ge 0;\quad i = \overline{1,5} \end{aligned} \tag{4.11}$$

3. Строим задачу двойственную к (4.11):

$$\begin{aligned} &T = y_1 + 3y_2 + y_3 \to \min\\ &y_1 + y_2 + 6y_3 \ge 2,\\ &-y_1 + 5y_2 - 2y_3 \ge 1,\\ &y_1 + y_2 \ge 3,\\ &y_1 - y_2 + y_3 \ge 1,\quad y_3 \ge 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

4. Предположим, что x^0 оптимальный план задачи (4.11), тогда из соотношения 1 следует, что у задачи (4.12) есть планы, более того существует y^0 – оптимальный план для (4.12) (соотношение 2). По соотношению 6: $x^{0/}(A^/ y^0 - c) = 0$.

Откуда из первого равенства соотношения 6 и из (4.9) следует, что

$$-y_1^0 + 5y_2^0 - 2y_3^0 = 1,$$

$$y_1^0 + y_2^0 = 3.$$

Так как на x^0 третье ограничение задачи (4.11) пассивно (см.10), то из второго равенства соотношения 6: $y_3 = 0$.

Из системы $\begin{cases} -y_1^0 + 5y_2^0 = 1\\ y_1^0 + y_2^0 = 3 \end{cases}$ находим $y_1^0 = \dfrac{7}{3}$, $y_2^0 = \dfrac{2}{3}$.

5. Проверяем, является ли вектор $y^0 = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{2}{3}, 0\right)$ планом задачи (4.12):

$$1\cdot\frac{7}{3}+1\cdot\frac{2}{3}+6\cdot0=3>2,$$

$$1\cdot\frac{7}{3}-1\cdot\frac{2}{3}+1\cdot0=\frac{5}{3}>1,$$

$$y_3^0=0,$$

так как все условия выполняются, y^0 – план задачи (4.12).

6. Вычисляем на x^0 и y^0 значение целевых функций задач (4.8) и (4.12):

$$c'x^0=2\cdot0+1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{4}{3}+1\cdot0=\frac{13}{3},$$

$$b'y^0=1\cdot\frac{7}{3}+3\cdot\frac{2}{3}+1\cdot0=\frac{13}{3}.$$

Так как $c'x^0=b'y^0$ и x^0, y^0 планы своих задач, то по соотношению (4.5) они будут решениями задач (4.8), (4.12).

Задание 1. Определить, является ли вектор x^0 решением соответствующей задачи.

Задание 2. Используя теорию двойственности, доказать оптимальность задачи минимизации (или максимизации) из лабораторной работы 1.

1. x^0 = (2, 2)

$$z=8x_1+5x_2\to\min$$
$$4x_1-x_2\ge6,$$
$$9x_1+8x_2\le157,$$
$$-3x_1+11x_2\ge16,$$
$$x_1\ge0,\quad x_2\ge0$$

2. x^0 = (4, 9)

$$z=3x_1+x_2\to\min$$
$$-4x_1+5x_2\le29,$$
$$3x_1-x_2\le14,$$
$$5x_1+2x_2\ge38,$$
$$x_1\ge0,\quad x_2\ge0$$

3. x^0 = (5, 6)

$$z=x_1+5x_2\to\max$$
$$3x_1-x_2\ge9,$$
$$2x_1+3x_2\le50,$$
$$-x_1+4x_2\ge19,$$
$$x_1\ge0,\quad x_2\ge0$$

4. x^0 = (3, 3)

$$z=7x_1+x_2\to\min$$
$$11x_1-3x_2\ge24,$$
$$9x_1+4x_2\le110,$$
$$-2x_1+7x_2\ge15,$$
$$x_1\ge0,\quad x_2\ge0$$

5. $x^0 = (10, 4)$

$$z = x_1 + 8x_2 \to \min$$
$$-3x_1 + 14x_2 \le 78,$$
$$5x_1 - 6x_2 \le 26,$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 26,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

6. $x^0 = (7, 5)$

$$z = x_1 + 9x_2 \to \min$$
$$6x_1 - 5x_2 \ge 17,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 34,$$
$$-4x_1 + 9x_2 \ge 17,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

7. $x^0 = (16, 9)$

$$z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$$
$$-3x_1 + 14x_2 \le 78,$$
$$5x_1 - 6x_2 \le 26,$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 26,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

8. $x^0 = (8, 5)$

$$z = x_1 + 7x_2 \to \min$$
$$x_1 + 4x_2 \le 53,$$
$$x_1 - x_2 \le 3,$$
$$7x_1 + 3x_2 \ge 71,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

9. $x^0 = (5, 6)$

$$z = 6x_1 + 7x_2 \to \min$$
$$3x_1 - x_2 \ge 9,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 50,$$
$$-x_1 + 4x_2 \ge 19,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

10. $x^0 = (7, 10)$

$$z = 7x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$-x_1 + x_2 \le 3,$$
$$5x_1 + 3x_2 \le 97,$$
$$x_1 + 7x_2 \ge 77,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

11. $x^0 = (2, 2)$

$$z = x_1 + x_2 \to \min$$
$$4x_1 - x_2 \ge 6,$$
$$9x_1 + 8x_2 \le 157,$$
$$-3x_1 + 11x_2 \ge 16,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

12. $x^0 = (6, 3)$

$$z = 5x_1 + x_2 \to \min$$
$$10x_1 - x_2 \ge 57,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 53,$$
$$6x_1 - 7x_2 \le 15,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

13. $x^0 = (4, 4)$

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$2x_1 - x_2 \ge 4,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 37,$$
$$-4x_1 + 9x_2 \ge 20,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

14. $x^0 = (6, 4)$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$-4x_1 + 5x_2 \le 29,$$
$$3x_1 - x_2 \le 14,$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 38,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

15. $x^0 = (3, 3)$

$z = 9x_1 + 2x_2 \to \min$

$11x_1 - 3x_2 \geq 24,$

$9x_1 + 4x_2 \leq 110,$

$-2x_1 + 7x_2 \geq 15,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

16. $x^0 = (2, 6)$

$z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

$-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$

$5x_1 - 6x_2 \leq 26,$

$x_1 + 4x_2 \geq 26,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

17. $x^0 = (13, 8)$

$z = 4x_1 + 3x_2 \to \min$

$2x_1 - x_2 \geq 4,$

$x_1 + 3x_2 \leq 37,$

$-4x_1 + 9x_2 \geq 20,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

18. $x^0 = (5, 12)$

$z = 9x_1 + 2x_2 \to \min$

$x_1 + 4x_2 \leq 53,$

$x_1 - x_2 \leq 3,$

$7x_1 + 3x_2 \geq 71,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

19. $x^0 = (7, 5)$

$z = 5x_1 + 3x_2 \to \min$

$6x_1 - 5x_2 \geq 17,$

$x_1 + 2x_2 \leq 34,$

$-4x_1 + 9x_2 \geq 17,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

20. $x^0 = (9, 13)$

$z = 3x_1 + x_2 \to \min$

$-4x_1 + 5x_2 \leq 29,$

$3x_1 - x_2 \leq 14,$

$5x_1 + 2x_2 \geq 38,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

21. $x^0 = (5, 6)$

$z = x_1 + 5x_2 \to \min$

$3x_1 - x_2 \geq 9,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 50,$

$-x_1 + 4x_2 \geq 19,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

22. $x^0 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$z = x_1 + 3x_2 \to \max$

$x_1 - x_2 \leq 1,$

$2x_1 + x_2 \leq 2,$

$x_1 - x_2 \geq 0,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

23. $x^0 = (10, 5)$

$z = 7x_1 + x_2 \to \min$

$11x_1 - 3x_2 \geq 24,$

$9x_1 + 4x_2 \leq 110,$

$-2x_1 + 7x_2 \geq 15,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

24. $x^0 = (13, 8)$

$z = 6x_1 + x_2 \to \max$

$3x_1 - x_2 \geq 9,$

$2x_1 + 3x_2 \leq 50,$

$-x_1 + 4x_2 \geq 19,$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

25. $x^0 = (13, 9)$

$$z = 5x_1 + x_2 \to \max$$

$$10x_1 - x_2 \ge 57,$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 53,$$

$$6x_1 - 7x_2 \le 15,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

26. $x^0 = (16, 9)$

$$z = 5x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$-3x_1 + 14x_2 \le 78,$$

$$5x_1 - 6x_2 \le 26,$$

$$x_1 + 4x_2 \ge 26,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Лабораторная работа 5. Двойственный симплекс-метод решения задач линейного программирования

1. Определение двойственного базисного плана.
2. Определение коплана.
3. Определение псевдоплана.
4. Критерий оптимальности.
5. Достаточное условие пустоты множества допустимых планов.
6. Алгоритм двойственного симплекс-метода.

Метод удобно применять к задачам линейного программирования, для которых известен или легко строится начальный двойственный базисный план (или соответствующий ему коплан), а также к уже решенным симплекс-методом задачам в случае изменения вектора условий b.

Алгоритм

Пусть дана задача линейного программирования

$$z = c'x \to \max, \quad (A_Б A_Н)x = b, \quad x \ge 0 \tag{5.1}$$

(обозначения те же, что и в лабораторной работе 2, $A_Б = E_m$).
Двойственная к (5.1) задача (см. лабораторную работу 4) имеет вид:

$$\begin{aligned} &T = b'y \to \min \\ &A'_Б\, y \ge c_Б, \\ &A'_Н\, y \ge c_Н. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Предположим теперь, что $A'_Н c_Б \geq c_Н$, тогда вектор $y = c_Б$ начальный двойственный базисный план задачи (5.1).

Ему соответствует базисный коплан $\delta = (\delta_Б = 0, \delta_Н = A'_Н c_Б - c_Н)$ и базисный псевдоплан $\kappa = (\kappa_Б = b, \kappa_Н = 0)$.

1. Строим начальную двойственную симплекс-таблицу.
2. Проверяем выполнение критерия оптимальности. Если $\kappa_Б \geq 0$, то вектора y, κ – оптимальные планы задач (5.2), (5.1), а если $\exists\, \kappa_j < 0,\ j \in I_Б$, то идем к пункту 3.
3. Проверяем достаточное условие отсутствия прямых планов. Если

$$\exists \quad \kappa_j < 0\ ,\ j \in I_Б \qquad и \qquad a_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \tag{5.3}$$

то ограничения задачи (5.1) несовместимы. Если условие (5.3) не имеет места, то переходим к пункту 4.

4) Совершаем двойственную симплекс-итерацию – переход к новому базисному коплану:

а) строим новый базис с индексным множеством $I`_Б = (I_Б \setminus q) \bigcup p$,

где p и q находятся из соотношений:

$$\kappa_q = \min_{j \in J_Б} \kappa_j\ ,\quad \sigma_p = -\frac{\delta_p}{a_{qp}} = \min_{\substack{i \in I_Н \\ a_{qi<0}}} \left(-\frac{\delta_i}{a_{qi}} \right).$$

Элемент таблицы a_{qp} – разрешающий.

б) строим новую двойственную симплекс-таблицу, совершая основное симплексное преобразование по элементу a_{qp}:

$$a'_{qj} = \frac{a_{qj}}{a_{qp}},\ \kappa'_q = \frac{\kappa_q}{a_{qp}}\ ,$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} * a_{qj}}{a_{qp}},\ \kappa'_i = \kappa_i - \kappa_{q*} \frac{a_{ip}}{a_{qp}}\ , \quad \forall i \in I, i \neq q,$$

$$\delta'_j = \delta_j - \frac{\delta_p * a_{qi}}{a_{qp}}, \forall j \in I\ .$$

5) К новой таблице применяем пункт 2 алгоритма и т. д.

Замечание

Расчет новой таблицы нужно начинать с определения значений столбца κ и строки δ, так как если выполняется критерий оптимальности (см. пункт 2), то нет необходимости вычислять оставшуюся часть таблицы.

Пример 5.1. Решить двойственным симплекс-методом задачу:

$$\begin{aligned}
&z = -2x_1 - x_2 \to \max \\
&x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\
&-4x_2 - 2x_5 = -10, \\
&-2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Решение

1. Приводим задачу (5.4) к виду (5.1):

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$x \ge 0, \quad J_Б = \{1, 5, 4\}$$

2. Строим двойственную задачу к задаче (5.5):

$$\begin{aligned}
&-2y_1 + 5y_2 - y_3 \to \min \\
&\quad y_1 \ge -2, \\
&-y_1 + 2y_2 - 2y_3 \ge -1, \\
&-y_1 - y_3 \ge 0, \\
&\quad y_2 \ge 0, \\
&\quad y_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Вектор $y = c_Б = (-2, 0, 0)$ является невырожденным двойственным базисным, так как $A'_Н C_Б > C_Н$:

$-1*(-2) + 2*0 - 2*0 = 2 > -1,$

$-1*(-2) + 0*0 - 1*0 = 2 > 0.$

3. Вычисляем базисный коплан и базисный псевдоплан, составляем начальную двойственную симплекс-таблицу и применяем двойственный симплекс-метод.

$\delta = A' y - c = (0, 3, 2, 0, 0)$,

κ = (-2, 0, 0, -1, 5).

Базис	$\kappa_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	-2	1	-1	$\boxed{-1}$	0	0
a_5	5	0	2	0	0	1
a_4	-1	0	-2	-1	1	0
δ		0	3	2	0	0
σ			3	2 ↑		
a_3	2	-1	1	1	0	0
a_5	5	0	2	0	0	1
a_4	1	-1	-1	0	1	0
δ		2	1	0	0	0
σ						

4. Последняя таблица задает оптимальный план задачи (5.4), так как $\kappa_Б \geq 0$.

Ответ: $x^0 = (0, 0, 2, 1, 5)$, $c' x^0 = 0$.

Задание. Двойственным симплекс-методом решить следующие задачи:

1. $z = -x_1 - 10x_2 \to \max$
$-2x_1 - 2x_2 + 2x_5 = -1,$
$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2,$
$-4x_1 + 2x_2 + x_4 = -1,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

2. $z = -2x_2 - 4x_4 \to \max$
$-6x_1 + 3x_2 = -1,$
$-3x_2 + x_3 - 3x_4 = -2,$
$6x_2 - 12x_4 + x_5 = -2,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

3. $z = -2x_3 - x_4 \to \max$
$2x_1 - 2x_3 - 2x_4 = -1,$
$4x_2 - 32x_3 + 4x_4 = -7,$
$8x_3 - 16x_4 + 4x_5 = -1,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

4. $z = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \to \max$
$5x_1 - 5x_2 - 5x_4 = -2,$
$20x_2 + 5x_3 - 25x_4 = -1,$
$15x_2 - 30x_4 + 10x_5 = -1,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

5. $z = -\frac{1}{3}x_1 - x_4 \to \max$
$12x_1 + 6x_2 - 18x_4 = -1,$
$12x_1 + 6x_3 - 18x_4 = -1,$
$3x_1 - 6x_4 + 3x_5 = -1,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

6. $z = -\frac{1}{2}x_1 - x_5 \to \max$
$21x_1 + 7x_3 - 28x_5 = -1,$
$28x_1 + 7x_2 - 49x_5 = -2,$
$14x_1 + 28x_4 - 49x_5 = -5,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

7. $z = -\frac{1}{2}x_2 - 3x_4 \to \max$
$5x_1 - 5x_2 - 4x_4 = -1,$
$5x_2 + x_3 - 2x_4 = -1,$
$-10x_2 + x_4 + x_5 = -1,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

8. $z = -x_1 - \frac{1}{4}x_4 \to \max$
$4x_1 - 32x_4 + 4x_5 = -3,$
$-4x_1 + 4x_2 + 4x_4 = -2,$
$-8x_1 + 4x_3 + 4x_4 = -5,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

9. $z = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \to \max$
$-2x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1,$
$6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3,$
$2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = -1,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

10. $z = -x_1 - 5x_4 \to \max$
$-12x_1 + 3x_4 + 3x_5 = -8,$
$3x_1 + 3x_3 - 9x_4 = -8,$
$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = -3,$
$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$

11. $z = -\frac{1}{2}x_2 - 2x_5 \to \max$

$$\begin{aligned} &-x_2 + x_3 - x_5 = -3,\\ &x_1 + 2x_2 - 4x_5 = -1,\\ &-x_2 + x_4 + x_5 = -1,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

12. $z = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} &-4x_1 + 2x_2 + 2x_5 = -3,\\ &2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1,\\ &-2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -5,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

13. $z = -x_1 - \frac{1}{4}x_3 \to \max$

$$\begin{aligned} &4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -1,\\ &-4x_1 - 4x_3 + 4x_4 = -7,\\ &-64x_1 + 4x_3 + 4x_5 = -39,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

14. $z = -\frac{2}{3}x_2 - x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &4x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -3,\\ &2x_1 + 4x_2 - 6x_4 = -1,\\ &-8x_2 + 2x_4 + 4x_5 = -7,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

15. $z = -x_2 - \frac{1}{2}x_5 \to \max$

$$\begin{aligned} &5x_1 + 5x_2 - 20x_5 = -2,\\ &-5x_2 + 10x_3 + 5x_5 = -3,\\ &5x_2 + 15x_4 - 15x_5 = -1,\\ &x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

16. $z = -5x_1 - 4x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 = 2,\\ &-4x_1 - 3x_2 - x_4 = -12,\\ &-4x_1 + 4x_2 - x_5 = 10,\\ &x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

17. $z = -\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -5,\\ &x_2 - 3x_4 + x_5 = -1,\\ &-x_2 + x_3 + x_4 = -2,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

18. $z = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} &-4x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -7,\\ &2x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -1,\\ &-6x_1 + 2x_4 + 2x_5 = -5,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

19. $z = -\frac{2}{3}x_1 - 5x_3 \to \max$

$$\begin{aligned} &-6x_1 + 6x_3 + 6x_4 = -1,\\ &12x_1 + 6x_2 - 18x_3 = -11,\\ &-24x_1 + 6x_3 + 6x_5 = -7,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

20. $z = -x_2 - \frac{1}{6}x_3 \to \max$

$$\begin{aligned} &-6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -1,\\ &-6x_2 - 6x_3 + 6x_5 = -7,\\ &3x_1 + 3x_2 - 9x_3 = -1,\\ &x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

21. $z = -\frac{1}{7}x_1 - x_3 \to \max$

$-7x_1 - 7x_3 + 7x_5 = -4,$

$-x_1 + x_2 + x_3 = -1,$

$-63x_1 + 7x_4 = -9,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$

22. $z = -5x_1 - \frac{3}{2}x_4 \to \max$

$3x_1 + 3x_3 - 3x_4 = -1,$

$-2x_1 - 2x_4 + 2x_5 = -1,$

$-4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -1,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$

23. $z = -3x_2 - 2x_4 \to \max$

$-3x_3 + 3x_4 = -2,$

$2x_2 - 2x_4 - 2x_5 = -2,$

$5x_1 - 2x_2 + x_4 = -1,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$

24. $z = -2x_2 - 2x_3 \to \max$

$-6x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -2,$

$-2x_2 - 3x_5 = -5,$

$-2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$

25. $z = -x_2 - 3x_3 \to \max$

$2x_1 - 3x_2 = -2,$

$3x_2 - x_3 + 2x_5 = -2,$

$3x_2 - x_3 - 2x_4 = -5,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$

26. $z = -2x_2 - 3x_5 \to \max$

$-x_2 - 2x_3 - x_5 = -2,$

$2x_2 - x_4 = 1,$

$-x_1 + 3x_5 = 1,$

$x_i \geq 0, i = \overline{1, 5}$

Лабораторная работа 6. Решение матричной транспортной задачи методом потенциалов

1. Постановка транспортной задачи.
2. Математическая модель транспортной задачи.
3. Условие общего баланса.
4. Метод минимального элемента.
5. Метод потенциалов.

Постановка задачи. Имеется m пунктов производства определенного вида продукции с заданным объемом производства $a_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$ и n пунктов потребления этой продукции в объемах $b_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}.$ Известна стоимость перевозки, единицы продукции из i-го пункта производства в j-й пункт потребления – c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Требуется найти такой план перевозок $x=(x_{ij},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})$, чтобы продукция со всех пунктов была вывезена:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,,\quad i=\overline{1,m} \tag{6.1}$$

Запросы всех пунктов потребления были удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,\quad j=\overline{1,n} \tag{6.2}$$

И транспортные расходы были минимальными:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{6.3}$$

Здесь x_{ij} – количество продукции, перевозимое из i-го пункта производства в j-й пункт потребления. Ясно, что

$$x_{ij} \geq 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n} \tag{6.4}$$

Задача (6.1)–(6.4) является специальной задачей линейного программирования.

Для существования ее решения необходимо и достаточно выполнения условия общего баланса: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (количество производимой продукции равно количеству потребляемой) и в этом случае применим метод потенциалов.

Алгоритм

При решении задач (6.1)–(6.4) используют транспортные таблицы с множеством клеток $U=\{(i,\,j),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\}$.

	b_1	b_2	…	b_n		
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	u_1	
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	u_2	
…	…	…	…	…		…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	u_m	
	v_1	v_2	…	v_n		

1. Построение начального базисного плана перевозок методом минимального элемента.

Метод минимального элемента. Находим в таблице клетку с минимальной стоимостью перевозки $c_{i_1 j_1} = \min_{(i,j)\in U} c_{ij}$.

Полагаем перевозку в этой клетке $\Delta_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$. Если $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ $(x_{i_1 j_1} = b_{j_1})$, то исключаем из дальнейшего рассмотрения строку i_1 (столбец j_1), а число b_{j_1} (число a_{i_1}) заменим на $b_{j_1} - x_{i_1 j}$ (на $a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$). Если $a_{i_1} = b_{j_1}$, то исключаем из рассмотрения либо строку i_1, либо столбец j_1.

С уменьшенной таблицей поступаем аналогично. Через $n+m-1$ шагов будут построены перевозки x_{ij}, $(i, j)\in U_Б = \{(i_k, j_k), k=\overline{1, n+m-1}\}$ – базисное множество клеток. Полагаем, $x_{ij} = 0, (i, j)\in U_Н = U \setminus U_Б$ – множество небазисных клеток.

2. Решение задачи (6.1)–(6.4) методом потенциалов:

1) находим потенциалы v_j, $j=\overline{1, n}$, u_i, $i=\overline{1, m}$ строк и столбцов транспортной таблицы, решая систему:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j)\in U_Б. \tag{6.5}$$

При решении системы (6.5), следует один из потенциалов выбирать произвольным. Например, потенциал для строки или столбца, содержащих наибольшее количество базисных клеток, полагать равным нулю;

2) вычисляем оценки для небазисных клеток:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \quad (i, j)\in U_Н;$$

3) проверяем критерий оптимальности базисного плана:

а) если $\Delta_{ij} \le 0$, $\forall (i, j)\in U_Н$, то базисный план перевозок оптимален. Вычисляем на нем транспортные расходы и записываем ответ;

б) если $\exists$ $\Delta_{ij} > 0$, $(i, j)\in U_Н$, то переходим к пункту 4.

4) находим максимальную оценку:

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(i,j)\in U_Н} \Delta_{ij};$$

5) начиная из клетки (i_0, j_0) с использованием клеток $U_Б$, строим цикл;

6) помечаем клетки цикла знаками «+» и «–» попарно, начиная с клетки (i_0, j_0);

7) среди перевозок, помеченных знаком «–» выбираем наименьшую:

$\theta^0 = x_{i^* j^*}$;

8) строим новую транспортную таблицу с базисным множеством

$U_Б^{/} = (U_Б \setminus (i^* j^*)) \bigcup (i^0 j^0)$.

Для нее базисный план получается из предыдущего, если изменить в нем лишь перевозки по циклу следующим образом: к перевозкам в клетках, помеченных знаком «+» прибавляем θ^0, а из перевозок, помеченных знаком «–» вычитаем θ^0. Переходим к пункту1.

Замечания

1. В результате одной итерации транспортные расходы сократятся на величину $\theta^0 \Delta_{i_0 j_0}$.

2. Если для оптимального базисного плана $\exists\, x_{i^1 j^1} = 0, \quad (i^1, j^1) \in U_Н$, то у задачи существует альтернативный оптимум. Его можно найти, совершив еще одну итерацию, считая $(i^0 j^0) = (i^1, j^1)$.

Пример 6.1. Записать математическую модель и решить транспортную задачу методом потенциалов:

a_i \ b_j	150	170	190	210	180
250	7	9	16	10	16
350	13	12	18	12	30
300	19	15	10	13	13

Решение

1. Математическая модель данной транспортной задачи имеет вид: найти план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix}$$

при условиях $x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}$ и ограничениях

$$
\begin{array}{ll}
 & x_{11}+x_{21}+x_{31}=150, \\
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=250, & x_{12}+x_{22}+x_{32}=170, \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=350, & x_{13}+x_{23}+x_{33}=190, \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=300, & x_{14}+x_{24}+x_{34}=210, \\
 & x_{15}+x_{25}+x_{35}=180
\end{array}
$$

так, чтобы стоимость перевозок была минимальной:

$$z=7x_{11}+9x_{12}+16x_{13}+10x_{14}+16x_{15}+13x_{21}+12x_{22}+18x_{23}+12x_{24}+$$
$$+30x_{25}+19x_{31}+15x_{32}++10x_{33}+13x_{34}+13x_{35}\to\min.$$

2. Проверяем выполнение условия общего баланса:

250 + 350 + 300 = 900 и 150 + 170 + 190 + 210 + 180 = 900,

значит, задача имеет решение.

3. Строим начальный базисный план по методу минимального элемента и решаем задачу методом потенциалов:

b_j / a_i	150	170	190	210	180	
250	7 150	− 9 100	16 -2	10 -1	+ 16 1	17
350	13 -3	+ 12 70	18 -1	12 210	− 30 70	20
300	19 -16	15 -10	10 190	13 -8	13 110	13
	-10	-8	-3	-8	0	

Заметим, что $U_Б=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(2,5),(3,3),(3,5)\}$, $|U_Б|=7$. Так как $\Delta_{15}=1>0$, то начальный план перевозок не является оптимальным. Для клетки (1,5) строим цикл. Выбираем $\theta^0=\min(100,70)=70$ и переходим к новому базисному плану:

7 150	9 30	16 -3	10 -1	16 70	16
13 -3	12 140	18 -2	12 210	30 -1	19
19 -15	15 -9	10 190	13 -7	13 110	13
-9	-7	-3	-7	0	

Так как все оценки $\Delta_{ij}\le 0$, то план перевозок оптимальный.

$$z_{\min} = 7*150 + 9*30 + 16*70 + 12*140 + 12*210 + 10*190 + 13*110 = 8770.$$

$$\text{Ответ: } X^0 = \begin{pmatrix} 150 & 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 140 & 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 190 & 0 & 110 \end{pmatrix}, \ z_{\min} = 8770.$$

Задание. Написать математическую модель и решить транспортную задачу методом потенциалов.

1.

a_i \ b_j	40	20	20	20
25	6	8	14	4
30	5	2	2	8
35	7	6	7	5
10	4	5	12	7

2.

a_i \ b_j	10	40	20	30
10	12	9	14	7
15	11	13	10	8
25	4	2	3	5
50	2	6	13	3

3.

a_i \ b_j	10	40	40	10
15	2	7	8	4
25	3	8	5	1
30	5	10	3	9
30	1	4	4	10

4.

a_i \ b_j	60	65	75	50
70	4	7	15	5
80	7	6	2	3
80	3	4	8	5
20	8	2	4	7

5.

a_i \ b_j	30	70	50	100
70	7	5	1	6
120	5	3	4	9
20	6	8	7	7
40	4	3	5	5

6.

a_i \ b_j	75	125	60	140
80	4	5	2	11
40	7	3	2	4
160	3	4	3	5
120	5	7	9	6

7.

a_i \ b_j	45	40	5	10
30	7	9	9	5
15	2	5	8	9
35	5	6	4	2
20	3	4	3	3

8.

a_i \ b_j	25	35	45	35
50	6	8	2	4
30	7	2	5	4
40	8	1	7	2
20	1	2	8	12

9.

a_i \ b_j	60	40	35	65
45	5	4	2	3
30	8	7	5	7
50	4	2	6	8
75	2	5	1	3

10.

a_i \ b_j	200	100	80	120
60	6	3	3	8
140	3	2	7	6
150	5	4	2	12
140	2	5	8	7

11.

a_i \ b_j	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	8	15	11	21
150	19	16	26	12	20

12.

a_i \ b_j	180	140	190	120	170
300	12	21	9	10	16
280	13	15	11	13	21
220	19	26	12	17	22

13.

a_i \ b_j	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	16	26	17	20

14.

a_i \ b_j	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21

15.

a_i \ b_j	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

16.

a_i \ b_j	170	120	190	140	180
280	28	12	7	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

17.

a_i \ b_j	180	120	90	105	105
150	14	6	4	4	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	15	3

18.

a_i \ b_j	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

19.

a_i \ b_j	100	70	130	110	90
150	20	3	9	15	35
150	14	10	12	20	46
200	25	11	16	19	48

20.

a_i \ b_j	190	140	180	120	170
280	7	3	9	15	35
220	3	10	12	20	46
300	15	11	16	19	48

21.

b_j / a_i	120	180	105	90	105
200	9	6	17	11	8
250	13	4	9	5	7
150	6	7	14	10	6

22.

b_j / a_i	175	225	230	170	200
350	5	13	18	17	8
400	6	10	15	6	3
250	24	21	9	16	17

23.

b_j / a_i	120	110	85	195	190
250	15	7	16	4	11
250	20	9	6	10	9
200	2	4	7	3	6

24.

b_j / a_i	160	120	100	150	170
250	14	11	9	13	18
180	6	5	14	4	14
270	7	19	11	6	13

25.

b_j / a_i	160	160	180	220	280
350	6	11	10	14	19
300	17	6	4	11	9
350	12	8	19	10	13

26.

b_j / a_i	40	30	80	40	20
70	1	3	2	3	1
50	4	7	5	4	2
90	8	2	3	3	3

Литература

1 Альсевич, В. В. Методы оптимизации: упражнения и задания: учебное пособие / В. В. Альсевич, В. В. Крахотко. – Мн.: Изд-во БГУ, 2005. – 405 с.

2 Альсевич, В. В. Сборник задач по методам оптимизации: Линейное программирование: учебное пособие для студ. мат. и экон. спец. / В. В. Альсевич, В. В. Крахотко. – Мн.: Изд-во БГУ, 1997. – 67 с.

3 Васильев, Ф. П. Линейное программирование / Ф. П. Васильев, А. Ю. Иваницкий. – М.: «Факториал», 1998. – 176 с.

4 Габасов, Р. Методы оптимизации: учебное пособие / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Мн: Изд-во БГУ, 1981. – 350 с.

5 Методы оптимизации: учебное пособие / Р. Габасов [и др.].– Мн: Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

6 Галлеев, Э. М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи / Э. М. Галлеев. – М.: Либроком, 2013. – 336 с.

7 Карманов, В. Г. Математическое программирование: учебное пособие / В. Г. Карманов. – М.: Физматлит, 2001. – 263 с.

8 Кузнецов, А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А Сакович, Н. И. Холод. – Мн: Высшая школа, 1994. – 285 с.

9 Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.

Производственно-практическое издание

Бышик Татьяна Петровна,
Мережа Валерий Леонидович

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Практическое руководство

для студентов специальности
1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям),
1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 15.05.2015. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 25 экз. Заказ 377.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.