

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

В. А. Люлька

Рассмотрено излучение классического заряда, совершающего движение по эллиптической орбите. Получены формулы для спектрально-углового распределения излучения для этого случая. Проведены численные расчеты распределения излучения по азимутальному углу при некоторых конкретных значениях параметров, характеризующих движение. Получены также формулы для компонент линейной поляризации излучения.

Вопросам излучения, возникающего при движении заряда в различных типах внешних полей, посвящено много работ [1-6]. Особенно подробно исследованы различные детали магнитотормозного или синхротронного излучения, возникающего при движении электронов в постоянном однородном магнитном поле [4-6]. Как известно, траектория движения заряда в таком поле в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, представляет собой окружность. Излучение, возникающее при круговом движении классического заряда, рассматривалось еще Шоттом [4], а в последние десятилетия оно стало объектом интенсивных исследований в связи с быстрым развитием ускорительной техники и возможностью практического использования этого излучения.

Подробный обзор работ и библиография по этой проблеме даны в [5-7]. Излучение заряда при гиперболическом движении в постоянном однородном электрическом поле исследовалось в работе [8]. Мы рассмотрим в данной работе излучение классического заряда, движущегося по эллиптической траектории с постоянной угловой скоростью. Это движение будет описываться следующими уравнениями:

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R\varepsilon \sin \omega t, \quad z = 0. \quad (1)$$

Здесь параметр эллиптичности ε может принимать значения $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. При $\varepsilon = \pm 1$ имеем круговое движение с частотой ω , связанной с величиной магнитного поля H известным образом [1, 6]. Случай $\varepsilon = 0$ дает осцилляторное движение, рассмотренное в работе [9]. Этот последний случай требует, однако, особого рассмотрения, и мы в дальнейшем будем считать, что $\varepsilon \neq 0$. Движение по эллиптической орбите в плоскости $x-y$ реализуется в поле плоской монохроматической электромагнитной волны эллиптической поляризации, распространяющейся вдоль оси z . Правда, в этом случае движение заряда по оси z носит более сложный характер, чем даваемый (1). Мы поэтому будем считать нашу задачу модельной, в которой попытаемся исследовать характерные черты излучения заряда, движущегося по закону (1). Учитывая большой интерес, который вызывают исследования различных процессов, происходящих в поле лазерной волны, такой подход может считаться оправданным.

Другим примером, где осуществляется эллиптическое движение, является, как известно [10], движение тел, взаимодействующих по кулоновскому закону. Правда и здесь движение будет более сложным, чем даваемое формулой (1), поэтому и для данного случая мы можем рассматривать нашу задачу как модельную.

Отметим, наконец, что уравнения (1) можно рассматривать как описывающие два осцилляторных движения по осям x и y с разными ампли-

тудами, но одинаковой частотой ω . Оба эти движения можно осуществить соответствующим выбором внешних полей [6]. Вектор-потенциал поля излучения, движущегося со скоростью $v(\tau)$ классического заряда e , как известно, имеет вид [5]

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{v(\tau)}{R'} \delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right) d\tau. \quad (2)$$

Здесь $R' = (|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|^2)^{1/2}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{R}' — то же самое для движущегося заряда в момент времени τ . Рассматривая поле в волновой зоне, имеем

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{cr} \int v(\tau) \delta\left(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{Rk_e \sin \theta \sin \alpha_e}{c}\right) d\tau. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$\omega\tau - \varphi_e = \alpha_e - \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi_e = \frac{\cos \varphi}{k_e}, \quad \sin \varphi_e = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{k_e}, \quad k_e = (\cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}. \quad (4)$$

Углы θ и φ являются сферическими углами радиуса-вектора \mathbf{r} .

Поступая обычным образом и используя (3) и (4), получим для интенсивности излучения в направлении, определяемом углами θ и φ , выражение

$$dW(\theta, \varphi) = \frac{e^2 \beta^2 c}{2\pi R^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 \{ [f_1(\varphi) \sin^{-2} \theta - 1] J_{\nu}^2(\eta) + \varepsilon^2 \beta^2 f_2(\varphi) J_{\nu}^{\prime 2}(\eta) \} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

Функции $f_i(\varphi)$ имеют вид

$$f_1(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi + \varepsilon^4 \sin^2 \varphi}{k_e^4}, \quad f_2(\varphi) = \frac{1}{k_e^2}. \quad (6)$$

Далее, мы обозначили $\beta = R\omega/c$, а аргументом функций Бесселя является величина $\eta = \nu \beta k_e \sin \theta$ при $|\eta| \leq \theta$.

Выражение (5) является обобщением известной формулы Шотта [4] для излучения заряда, движущегося по закону (1). При $\varepsilon=1$ она как раз и переходит в обычную формулу Шотта [5, 6] для кругового движения. Отметим, однако, что для рассматриваемого нами случая (1) имеет место зависимость интенсивности излучения не только от угла θ , но и от азимутального угла φ . Ниже мы более подробно рассмотрим эту зависимость. Интегрируя (5) по $d\theta$ и используя известные формулы для интегралов с функциями Бесселя, получим спектрально-угловое распределение интенсивности

$$dW(\nu, \varphi) = \frac{e^2 \beta^2 c}{2\pi R^2} \nu \left\{ 2\nu f_1(\varphi) \int_0^{2\nu\beta k_e} \frac{J_{2\nu}(x)}{x} dx - \frac{1}{\beta k_e} \int_0^{2\nu\beta k_e} J_{2\nu}(x) dx + \varepsilon^2 f_2(\varphi) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{2\beta}{k_e} J_{2\nu}'(2\nu\beta k_e) + \frac{\beta}{k_e} \int_0^{2\nu\beta k_e} J_{2\nu}(x) dx - \frac{2\nu}{k_e^2} \int_0^{2\nu\beta k_e} \frac{J_{2\nu}(x)}{x} dx \right] \right\} d\varphi. \quad (7)$$

При $\varepsilon=1$ зависимость от угла φ исчезает, и выражение (6) переходит в соответствующие формулы, приведенные во многих работах [5, 6, 11]. Исследование выражения (7) в нерелятивистском случае можно провести таким же образом, как и для кругового движения [5, 6]. Что же касается ультрарелятивистского предела, то здесь целесообразно воспользоваться асимптотикой функций Бесселя [5] и с помощью (5) получить приближенные выражения для интенсивности излучения, обобщающие соответствующие формулы [5, 6, 12] для кругового движения. Мы, однако, не будем приводить здесь соответствующие выражения, а рассмотрим угловое распределение излучения при движении (1).

Проведя в (5) суммирование по ν с использованием известных формул с функциями Бесселя [5], получим

$$dW(\theta, \varphi) = \frac{e^2 3^4 c}{32\pi R^2} \{ [f_1(\varphi) - \sin^2 \theta] \Psi_1(\theta, \varphi) + \varepsilon^2 f_2(\varphi) \Psi_2(\theta, \varphi) \} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\theta, \varphi) &= \frac{k_e^2 (4 + \beta^2 k_e^2 \sin^2 \theta)}{(1 - \beta^2 k_e^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \\ \Psi_2(\theta, \varphi) &= \frac{4 + 3\beta^2 k_e^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 k_e^2 \sin^2 \theta)^{5/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

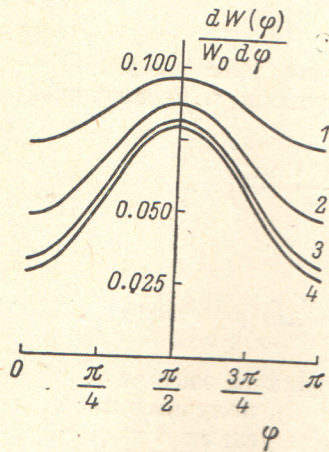


Рис. 1.

$\varepsilon = 0.75$ (1), 0.50 (2), 0.25 (3),
 0.10 (4), $\beta = 0.1$.

Из этих формул, как и в случае синхротронного излучения [5], видно, что в ультрарелятивистском случае при $\beta \sim 1$ из-за малых знаменателей в (8') должна существовать резкая зависимость интенсивности излучения от изменения углов θ и φ . Зависимость от угла θ хорошо известна из теории синхротронного излучения [5, 6], — при $\beta \sim 1$ излучение сосредоточено в основном в плоскости орбиты $\theta \sim \pi/2$.

Поэтому рассмотрим здесь азимутальное распределение интенсивности излучения. Проинтегрировав (8) по $d\theta$, получим распределение интенсивности излучения $dW(\varphi)/d\varphi$ в зависимости от угла φ . Результаты численных расчетов этой величины приведены на рис. 1—3 для различных значений β , $W_0 = e^2 \beta^4 c / 32\pi R^2$.

В нерелятивистском случае (рис. 1) максимум излучения достигается при $\varphi = \pi/2$ (а также $3\pi/2$). В релятивистском случае (рис. 2) наблюдается

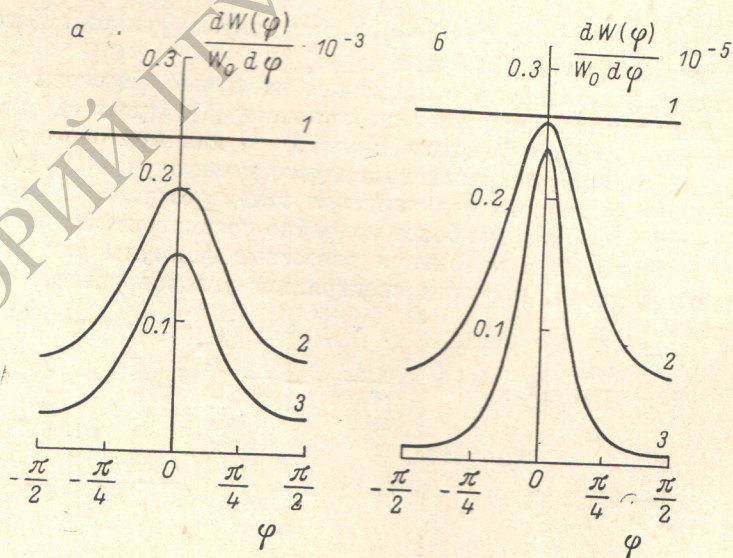


Рис. 2.

$\alpha - \varepsilon = 1$ (1), 0.9 (2), 0.75 (3), $\beta = 0.9$, $\beta = 0.99$.
 $\beta - \varepsilon = 1$ (1), 0.99 (2), 0.95 (3), $\beta = 0.99$.

более резкая зависимость от угла φ . Максимум излучения приходится в этом случае на углы $\varphi = 0$ и π . При уменьшении ε максимумы становятся все более узкими. Если учесть, что в релятивистском случае излучение сосредоточено в плоскости орбиты, т. е. при $\theta \sim \pi/2$, то можно заключить, что при движении, подчиняющемся уравнению (1), излучение (при $\varepsilon \neq 1$), усредненное по периоду движения $T = 2\pi/\omega$ заряда, носит направленный

характер и сосредоточено в основном в сравнительно небольшом телесном угле около оси x . В известной мере это напоминает излучение линейных антенн в радиотехнике [13].

Для сравнения с разобранными крайними случаями на рис. 3 приведены результаты расчетов для промежуточной области изменения значений β .

Рассмотрим, наконец, поляризационные свойства излучения при эллиптическом движении (1). Для этого разложим электрический вектор поля излучения E в волновой зоне на составляющие

$$E = E_{\varphi} l_{\varphi} + E_{\theta} l_{\theta}. \quad (9)$$

Здесь l_{φ} и l_{θ} — обычные сферические базисные векторы. Тогда интенсивности излучения для каждой из компонент E_{φ} и E_{θ} гармоника ν даются выражениями

$$\left. \begin{aligned} dW_{\theta} &= \frac{e^2 \beta^2 c}{2\pi R^2} \nu^2 J_{\nu}^2(\eta) \operatorname{ctg}^2 \theta d\Omega, \\ dW_{\varphi} &= \frac{e^2 \beta^2 c}{2\pi R^2} \beta^2 \nu^2 \left[\frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\beta^2 k_{\varepsilon}^4 \sin^2 \theta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi J_{\nu}^2(\eta) + \frac{\varepsilon^2}{k_{\varepsilon}^2} J_{\nu}^2(\eta) \right] d\Omega_{\ast} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При $\varepsilon=1$ эти выражения переходят в соответствующие формулы для π - и σ -компонент синхротронного излучения [14]. Отметим также, что сумма $dW_{\theta} + dW_{\varphi}$, как нетрудно видеть, дает (5).

Литература

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. ФМ, 1962.
- [2] Р. Беккер. Электронная теория. ОНТИ, 1936.
- [3] Дж. Джексо. Классическая электродинамика. Изд. «Мир», 1965.
- [4] G. A. Schott. Electromagnetic Radiation. Cambridge, 1912.
- [5] Сб. «Синхротронное излучение» под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова, 1974.
- [6] А. А. Соколов, И. М. Тернов. Релятивистский электрон. Изд. «Наука», 1974.
- [7] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук, 97, 569, 1969.
- [8] А. М. Никитшов, В. И. Ригус. ЖЭТФ, 56, 2035, 1969.
- [9] А. Н. Матвеев. Вестн. МГУ, сер. физ. и астрон., № 10, 33, 1951.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. ФМ, 1958.
- [11] Л. А. Арцимович, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 26, 379, 1946.
- [12] J. Schwinger. Phys. Rev., 75, 1912, 1949.
- [13] Дж. А. Страттон. Теория электромагнетизма. ОГИЗ, 1948.
- [14] А. А. Соколов, И. М. Тернов. ЖЭТФ, 31, 473, 1956.

Поступило в Редакцию 26 февраля 1975 г.

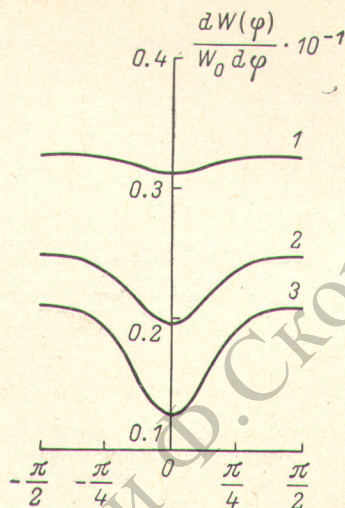


Рис. 3.

$\varepsilon=0.75$ (1), 0.50 (2), 0.25 (3), $\beta=0.5$.