

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. П. Бышик, В. Л., Мережа

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: НЕЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ВАРИАЦИОННОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ**

Гомель 2014

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. П. Бышик, В. Л., Мережа

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: НЕЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ВАРИАЦИОННОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ**

Практическое руководство для лабораторных занятий

для студентов специальности

1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям),

1-31 03 06 Экономическая кибернетика

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2014

УДК
ББК

С

Рецензенты:

заведующий кафедрой вычислительной математики и программирования учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кандидат физико-математических наук, доцент Д.С. Кузьменков;
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики УО «БелГУТ» С.И. Жогаль

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Бышик Т. П.

Методы оптимизации: Нелинейное программирование и вариационное исчисление: практ. рук-во / В. Л. Мережа; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – с.

ISBN XXX-XXX-XXX-XXX-X

В настоящем руководстве представлены материалы для практического выполнения лабораторных работ по разделам «Нелинейное программирование» и «Вариационное исчисление» курса Методы оптимизации. Каждая работа содержит постановку задачи, алгоритмы или схему её решения, снабжена иллюстративными примерами, вариантами индивидуальных заданий и вопросами.

Целью руководства является оказание помощи студентам специальности 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (по направлениям и 1-31 03 03-06 «Экономическая кибернетика» в выполнении лабораторных работ.

УДК
ББК

ISBN XXX-XXX-XXX-XXX-X

© Бышик Т. П., Мережа В. Л.; 2014 © УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2014

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КУНА-ТАККЕРА

Лабораторная работа 1

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X, \quad (1)$$

$$X = \{x : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, k}; g_i = 0, i = \overline{k+1, m}, x \in X \subset R^n$$

Здесь $f(x), g_i(x), i = \overline{1, k}$ - выпуклые функции, $g_i(x), i = \overline{k+1, m}$ - линейные функции,

Q - выпуклое множество.

Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), x \in R^n, \lambda \in R^m \quad (2)$$

Теорема Куна-Таккера:

для существования оптимального плана в задаче (1) с регулярным множеством планов:

$$\forall x^* \in X, x^* \in riQ, \quad (3)$$

$$g_i(x^*) < 0, i = \overline{1, k}$$

(riQ - относительная внутренность множества Q) необходимо и достаточно существование такого вектора $\lambda^0 \in R, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k}; \lambda_i^0, i = \overline{k+1, m}$ - произвольные, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ - седловая точка функции Лагранжа (2):

$$F(x^0, \lambda) \leq F(x^0, \lambda^0) \leq F(x, \lambda^0) \quad (4)$$

$$\forall x \in Q, \forall \lambda \in R^m, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k}$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i = \overline{1, k}$.

Замечание. Для линейных функций $g_i(x), i = \overline{1, k}$, теорема Куна-Таккера верна без условия Слейтера (3).

Схема решения:

1. Проверим, является ли данная задача задачей выпуклого программирования, используя свойства выпуклых функций, выпуклых множеств, критерии выпуклости функций.
2. Записываем задачу в виде (1). При этом множество Q строим по ограничениям исходной задачи так, чтобы легко можно было проверить принадлежность ему вектора $x \in R^n$.

Обычно, $Q = \{x : x_j \geq 0, \forall j \in I^* \subset I = \{i = \overline{1, n}\}\}$, I^* является подмножеством I .

3. Проверяем, является ли множество планов регулярным.
4. Ищем стационарные точки функции Лагранжа. Для этого решаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{1, k}, x \in X \\ g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k} \end{array} \right. \quad (5)$$

5. Для каждой стационарной точки проверяем условие (4).
6. Если среди стационарных точек найдется седловая точка функции Лагранжа $\{x^*, \lambda^*\}$, то x^* - решение исходной задачи $x^0 = x^*$. Если нет, (т.е. $x^0 \in \text{int } Q$), то переходим к п.7.
7. Ищем решение задачи на границе множества Q . Если Q состоит из внутренних точек, то задача решения не имеет. Пусть L - граница множества $Q, L \in Q$ и множества $L_i, i = \overline{1, s}$ - элементы L (например: грани, ребра, угловые точки). Для поиска решения задачи имеем совокупность следующих задач:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X_i, i = \overline{1, s}, \quad (6)$$

где $X_i = \{x : x \in L_i, g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, k}, g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}\}$

Если $X_i, 1 \leq i \leq s$ - выпуклое множество, то задачу (6) можно решать по схеме п.1 - п.6. Каждую стационарную точку задачи (6) проверяем на седловую для исходной задачи. Если мы не обнаружим решения исходной задачи при исследовании всех задач (6), то у нее решения нет.

Замечания.

1. Если $f(x)$ - строго выпуклая функция, то у задачи (1) может быть лишь один оптимальный план.
2. Если у задачи (1) найдено несколько различных оптимальных планов $x^{i0}, i = \overline{1, l}$, то решением является также любая их выпуклая линейная комбинация:

$$X = \sum_{i=1}^l \lambda_i x^{i0}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$$

Пример 1. Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x_1^2 + x_1^2 + x_1x_2 - 7x_3 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5, \\ 2x_2 + x_3 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x &\in R^3 \end{aligned} \quad (7)$$

Решение.

1. Составляем матрицу вторых производных целевой функции $f(x)$

$$(f(x) \in C^{(2)})$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Так как все главные миноры матрицы неотрицательные, то $f(x)$ - выпуклая функция. Ограничения задачи линейны. Следовательно, исходная задача является задачей выпуклого программирования.

2. Задачу (7) записываем в виде (1). Введем множество

$$Q = \{x: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x \in R^3\}, \text{ имеем:}$$

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 \rightarrow \min,$$

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5,$$

$$2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x \in Q$$

3. Так как ограничения задачи линейны, то условие Слейтера (3) проверять не нужно.

4. Составляем функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 7x_3 + \lambda_1(4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5) + \lambda_2(2x_2 + x_3 - 4), x \in Q, \lambda \in R^2, \lambda_2 \geq 0.$$

Составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 7 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0, \\ \lambda_2(2x_2 + x_3 - 4) = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Если $\lambda_2 = 0$, то из 3-го уравнения $\lambda_1 = -\frac{7}{2}$. Из 1, 2, 4 уравнения находим

$$x_1 = \frac{49}{22}, x_2 = \frac{7}{11}, x_3 = \frac{25}{11}.$$

Стационарная точка $\{x^1, \lambda^1\} = \{\frac{42}{22}, \frac{25}{11}, -\frac{7}{2}, 0\}$

2) Если $2x_2 + x_3 - 4 = 0$, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4\lambda_1 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 7, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Эта система решения не имеет.

5. Для пары $\{x^1, \lambda^1\}$ проверяем условие (4). Имеем

$$\frac{35}{44} \leq \frac{35}{44} \leq 3x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 \frac{7}{2}x_2 + \frac{35}{2} \quad (8)$$
$$\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \forall \lambda_2 \geq 0$$

6. В крайнем справа выражения в (8) стоит выпуклая функция, достигающая минимальное значение $\frac{35}{44}$ в своей стационарной точке:

$x_1 = \frac{49}{22}, x_2 = \frac{7}{11}$. Следовательно, (8) верно неравенство и $\{x^1, \lambda^1\}$ седловая точка функции Лагранжа (2), т.е. $x^0 = x^1$ – оптимальный план задачи (7) и $f(x^0) = \frac{35}{44}$.

Пример 2. Найти решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

1. Задача (9) – задача выпуклого программирования, так как $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$ и её ограничения линейны.

2. Положим $Q = \{x: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

3. Составляем функцию Лагранжа для задачи (9):

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2), \\ x &\in Q, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

4. Составляем и решаем систему уравнений (5):

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2, \\ 2x_2 + \lambda = 2, \\ \lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0, x \in Q, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

1) Если $\lambda = 0$, то из 1 и 2 уравнения получаем точку $x_1 = -1, x_2 = 1$, которая не принадлежит Q .

2) Если $\lambda \neq 0$, то из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = -2, \\ 2x_2 + \lambda = 2, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

находим пару: $\lambda = -2, x_1 = 0, x_2 = 2$, которая также не является стационарной, так как не выполняется условие $\lambda \geq 0$. Итак, у функции Лагранжа нет стационарных точек.

5. Ищем решение на границе множества Q . Её элементы $L_1 = \{x : x_2 \geq 0, x_1 = 0\}, L_2 = \{x : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}, L_3 = \{x_1 = x_2 = 0\}$. Решаем задачу на границе L_1 . Имеем

$$\begin{aligned} x_2^2 - 2x_2 &\rightarrow \min, \\ x_2 &\leq 2, \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Функция Лагранжа задачи (10) имеет вид

$$F(x, \lambda) = x_2^2 - 2x_2 + \lambda(x_2 - 2), x_1 \geq 0, \lambda \geq 0$$

Решаем систему (5). Для неё

$$\begin{aligned} 2x_2 + \lambda &= 2, \\ \lambda(x_2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Стационарная точка: $\lambda = 0, x_2 = 1$

Проверяем для пары $\{x_1 = 0, x_2 = 1; \lambda = 0\}$ условие (4) для исходной задачи. Имеем

$$\begin{aligned} -1 - \lambda &\leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2, \\ \forall \lambda &\geq 0, \forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Левое неравенство в (11) выполняется для $\forall \lambda \geq 0$. Так как $(x_1 + 1)^2 \geq 1$ при $x_1 \geq 0$ и $(x_2 - 1)^2 \geq 0$, то правое неравенство выполняется для $\forall x \in Q$.

Итак, $\{0;1;0\}$ - седловая точка функции Лагранжа задачи (9) и $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(x^0) = -1$.

Задание. Исследовать следующие задачи:

1. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_2 - 6 \rightarrow \min$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$	2. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 + 5x_2 - 5 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0$
3. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_3 \rightarrow \max$ $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$ $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$	4. $f(x) = 3x_1^2 + x_3^2 - 6x_2 + x_1 - 1 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 1$ $2x_1 + x_3 = 2$ $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$
5. $f(x) = 3x_1^2 + 11x_1 - 3x_2 - x_3 - 27 \rightarrow \min$ $x_1 - 7x_2 + 3x_3 \leq -7$ $5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$ $x_3 \geq 0$	6. $f(x) = x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 - 6x_2 \rightarrow \min$ $4x_1 + x_2 \leq 1$ $2x_1 + x_3 = 2$ $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$
7. $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_3 + 4 \rightarrow \min$ $x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$ $2x_2 + x_3 \geq 4$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	8. $f(x) = x_1^2 + x_1x_3 - 2x_2 + 4 \rightarrow \min$ $5x_1 - x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$
9. $f(x) = x_2^2 + x_3^2 - x_2 + 5 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$ $2x_1 + x_3 = 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	10. $f(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_2 \rightarrow \min$ $x_1 + x_3 = 1$ $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$ $x_1 \geq 0$

11. $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 \leq 1$ $x_2 + x_3 = 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	12. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + 6 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$ $4x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 4$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
13. $f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 6 \rightarrow \max$ $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$ $x_2 + 2x_3 = 2$ $x_1 \geq 0$	14. $f(x) = x_1^2 + x_2x_3 - x_1 - 1 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$ $2x_2 + x_3 = 2$ $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
15. $f(x) = x_2^2 + x_1 + x_3 - x_2 + 1 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$ $x_1 + 3x_2 \geq 1$ $x_1 \geq 0$	16. $f(x) = -x_1^2 + x_2x_3 - x_2^2 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4$ $x_1 + x_3 \leq 1$ $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
17. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 = 1$ $x_2 + x_3 \leq 2$	18. $f(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 + x_2^2 - 1 \rightarrow \min$ $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$ $x_1 + 2x_2 \geq -2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
19. $f(x) = -x_1^2 - x_2x_3 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ $-2x_1 + x_3 = 2$ $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$	20. $f(x) = -x_1x_3 + 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$ $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$

21. $f(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$ $x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3$ $x_1 \geq 0$	22. $f(x) = -x_1^2 - x_3^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $6x_1 + x_2 - x_3 = 1$ $2x_1 - x_3 \leq 2$ $x_3 \geq 0$
23. $f(x) = x_1 + x_3^2 + x_2x_3 - 4 \rightarrow \min$ $4x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$ $x_1 + 2x_2 \leq 3$ $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	24. $f(x) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2 + x_1 + 4 \rightarrow \min$ $x_1 - 2x_2 = 1$ $x_2 + x_3 \geq 1$ $x_2 \geq 0$
25. $f(x) = x_1^2 + x_3^2 + 6x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$ $2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$ $2x_2 + x_3 \geq -2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	26. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \min$ $x_1 - 3x_3 \leq 2$ $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Вопросы к лабораторной работе 1

1. Определение выпуклого множества и выпуклой функции;
2. Постановка задачи выпуклого программирования;
3. Определение регулярного множества планов (условие Слейтера);
4. Определение седловой точки;
5. Теорема Куна-Таккера.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа 2

Рассматривается задача минимизации с ограничениями смешанного типа:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1, p} \quad (2)$$

$$g_i(x) \leq 0, i = \overline{p+1, q} \quad (3)$$

$$x \in R^n, f(x) \in C^{(1)}, g_i(x) \in C^{(1)}, i = \overline{1, q}$$

Схема исследования.

1. Сведение задачи (1)-(3) к более простой задаче этого же типа (метод исключения).

Если из k -го ограничения-равенства $g_k(x) = 0, 1 \leq k \leq p$, можно легко выразить одну из переменных $x_{i^*}, 1 \leq i^* \leq n$, через остальные

$$x_i = h(x_i, i = \overline{1, n}, i \neq i^*), \quad (4)$$

то переменную x_{i^*} в задаче (1) – (3) удобно исключить. Для этого в функции $f(x), g_i(x), i = \overline{1, q}, i \neq k$ подставляют вместо x_{i^*} выражение из уравнения связи (4). В результате получаем эквивалентную задачу типа (1) – (3), но с меньшим числом неизвестных (на одно) и с меньшим числом ограничений (на одно). После полного завершения исследований новой задачи, используя её эквивалентность исходной, делаем выводы о задаче (1) – (3). Не ограничивая общности, считаем далее, что задача (1) – (3) не поддаётся упрощению.

2. Исследование вопроса о существовании решения задачи (1) – (3). Здесь используются критерий существования решений задач нелинейного программирования (НЛП) или теорема Вейерштрасса.

Если в результате мы убеждаемся, что у задачи решения нет, то исследование прекращается. Если решение есть (этот факт важен и используется в п.7) либо нельзя дать определённый ответ о его существовании, то поиск продолжается.

3. Нахождение условно-стационарных точек задачи (1) – (3) (точек подозрительных на решение).

а) составляем классическую функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^q \lambda_i g_i(x),$$

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{p+1, q}$$

б) используя классическое уравнение множителей Лагранжа, составляем систему уравнений для поиска условно-стационарных точек.

$$\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} = 0, g_i(x) = 0, i = \overline{1, p},$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{p+1, q}, \quad (5)$$

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{p+1, q}, x \in X$$

в) находим $\{x^s, \lambda^s\}, s = \overline{1, m}$ - все решения системы (5).

4. Необходимое условие второго порядка.

Количество точек, подозрительных на решение, можно сократить, используя необходимое условие второго порядка (здесь предполагаем, что $f(x), g_i(x) \in C^{(2)}, i = \overline{1, q}$. Для каждой пары проверяем на нетривиальность квадратичную форму:

$$l' \frac{\partial^2 F(x^s, \lambda^s)}{\partial x^2} l \geq 0 \quad (6)$$

На множестве допустимых направлений $l \in R^n$:

$$l' \frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x} = 0, i = \overline{1, p} \quad (7)$$

$$l' \frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x} = 0, i = I_a^+(x^s) = \{i : g_i(x^s) = 0, \lambda_i^s > 0\} \quad (8)$$

$$l' \frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x} \leq 0, i = I_a^0(x^s) = \{i : g_i(x^s) = 0, \lambda_i^s = 0\} \quad (9)$$

Замечание.

Условие (6) как и условие (10) из п.6 удобно сначала проверять для $\forall l \in R^n$, а затем сравнить множества, на которых они не выполняются, с множеством, выделяемым условиями (7) – (9).

5. Достаточное условие оптимальности.

Пусть $\{x^s, \lambda^s\}, s = \overline{1, m^1}$ - пары, удовлетворяющие условиям (6) – (9). Используя достаточное условие оптимальности, находим из числа точек, подозрительных на решение, локально-оптимальные планы. Ими будут те $x^s, s = \overline{1, m^1}$, для которых выполняется неравенство

$$l' \frac{\partial^2 F(x^s, \lambda^s)}{\partial x^2} l > 0, 1 \leq s \leq m^1 \quad (10)$$

На множестве векторов l , удовлетворяющих (7) – (9). $l \neq 0$.

Пусть $x^s, s = \overline{1, m^1}$ - локально-оптимальные планы. Находим из них лучший план x^* по правилу $f(x^*) = \min_{1 \leq s \leq m^1} f(x^s)$.

6. В случае нелинейных ограничений - точки, подозрительные на решение, могут также находиться (согласно обобщённому правилу множителей Лагранжа) среди решений системы

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} = 0,$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1, p}$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{p+1, q}, \lambda_i \geq 0, i = \overline{p+1, q}, x \in X$$

Решения этой системы присоединяем к уже найденным точкам, подозрительным на решение исходной задачи.

7. Нахождение оптимального плана.

Если у задачи (1) – (3) существует решение (см.п.2) и найдены все точки, подозрительные на решения $x^s, s = \overline{1, l}$, то оптимальный план x^0 можно найти из соотношения

$$f(x^0) = \min_{1 \leq s \leq l} f(x^s)$$

8. Поведение целевой функции на бесконечности.

Если определённого ответа на вопрос о существовании решения нет и X неограниченная область, то необходимо исследовать поведение целевой функции при $|x| \rightarrow \infty$ по различным направлениям.

9. Результаты исследования.

На основании п.1 – п.8 делаем заключение о результатах исследования задачи (1) – (3). В общем случае из-за сложности нелинейных задач, такое заключение не удаётся сделать полным.

Пример 1. Исследовать на экстремум следующую задачу:

$$2x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad (11)$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1, x_1 \geq 0$$

Исследование.

1. Записываем задачу (11) в виде (1) – (3)

$$f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \quad (12)$$

$$g_2(x) = -2x_1 + x_2 + 1 \leq 0,$$

$$g_3(x) = -x_1 \leq 0$$

Задача не поддаётся упрощению.

2. Исследуем вопрос о существовании решения задачи (12). Построим множество её планов.

Множество планов $X = \{x \in R^2 : x_1 + x_2 \leq 1, 2x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0\}$ неограниченная область. Строим множество уровня целевой функции $X_f(1) = \{x : 2x_1^2 - x_2 - 1 \leq 1\}$. Пересечение $X \cap X_f(1)$ (см. рис.1) компактно, и на этом множестве целевая функция непрерывна. Следовательно, по теореме Вейерштрасса у задачи (12) существует оптимальный план.

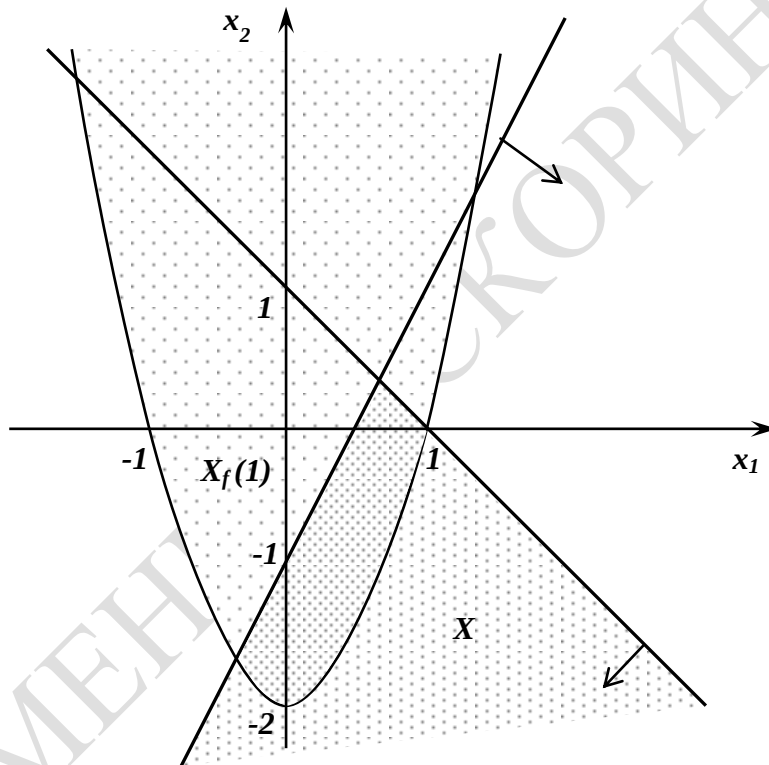


Рис.1

3. Ограничения задачи линейны (проверка на обыкновенность не требуется), следовательно, для её решения применяем классическое правило множителей Лагранжа.

$$F(x, \lambda) = 2x_1^2 - x_2 - 1 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) - \lambda_2(2x_1 - x_2 - 1) - \lambda_3 x_1,$$

$$x \in X, \lambda \geq 0$$

Находим условно-стационарные точки. Имеем систему

$$\begin{aligned}
4x_1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\
-1 + \lambda_2 + \lambda_1 &= 0, \\
\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) &= 0, \\
\lambda_2(2x_1 - x_2 - 1) &= 0, \\
\lambda_3 x_1 &= 0, x \in X, \lambda \geq 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Возможны 8 случаев:

- 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Нет решения.
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, x_1 = 0$. Нет решения.
- 3) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0$.

Имеем точку $\{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0\}$.

- 4) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Для точки $\{-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 1, 0, 0\} \quad x \in X$.

- 5) $\lambda_1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0, x_1 = 0$.

Для точки $\{0, -1, 0, 1, -2\}, \lambda_3 < 0$.

- 6) $\lambda_2 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, x_1 = 0$.

Для точки $\{0, 1, 1, 0, 1\} \quad x \in X$.

- 7) $\lambda_3 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0$.

Для точки $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{11}{9}, 0\} \quad \lambda_1 < 0$.

- 8) $x_1 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0$ нет решения.

Итак, получили одну условно-стационарную точку $\{x^1, \lambda^1\} = \{\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0\}$.

4. Проверяем для условно-стационарной точки необходимое и достаточное условия оптимальности. Так как

$$l' \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} l = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 4l_1^2 \geq 0, \forall l \in R^2, \quad \text{то точка } x^1 \text{ удовлетворяет}$$

необходимому условию второго порядка.

Для точки x^1 множество (7) – (9) имеет вид:

$$\{l : l' \frac{\partial g_2(x^1)}{\partial x} = 0\} = \{l \in R^2 : -2l_1 + l_2 = 0\}.$$

На этом множестве $4l_1^2 > 0$ всюду кроме точки $\{0,0\}$. Следовательно, достаточное условие выполняется и точка x^1 локально-оптимальный план.

5. Так как точка x^1 - единственная подозрительная на решение и у задачи решение существует, то $x^0 = x^1$ - оптимальный план,

$$f(x^0) = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Исследовать на экстремум следующую задачу:

$$\begin{aligned} & x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ & \begin{cases} x_1 + x_1x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 4x_1 + 3x_1x_2 - 3x_3 \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Исследование.

1. Из первого ограничения-равенства можно выразить одну из переменных (например x_3) и исключить её из задачи

$$x_3 = x_1 + x_1x_2 - 1 \quad (15)$$

Эквивалентная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2 \rightarrow \min \\ & g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0, \\ & g_2(x) = -x_1 - 1 \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

2. Множество планов X задачи (16) неограниченно. Пересечение множества уровня $X_f(-4) = \{x : (x_1 + 1)^2 - x_2^2 + 1 \leq 0\}$ с множеством планов X , также неограниченная область. Следовательно, определённого ответа на вопрос о существовании решения сразу нельзя получить.

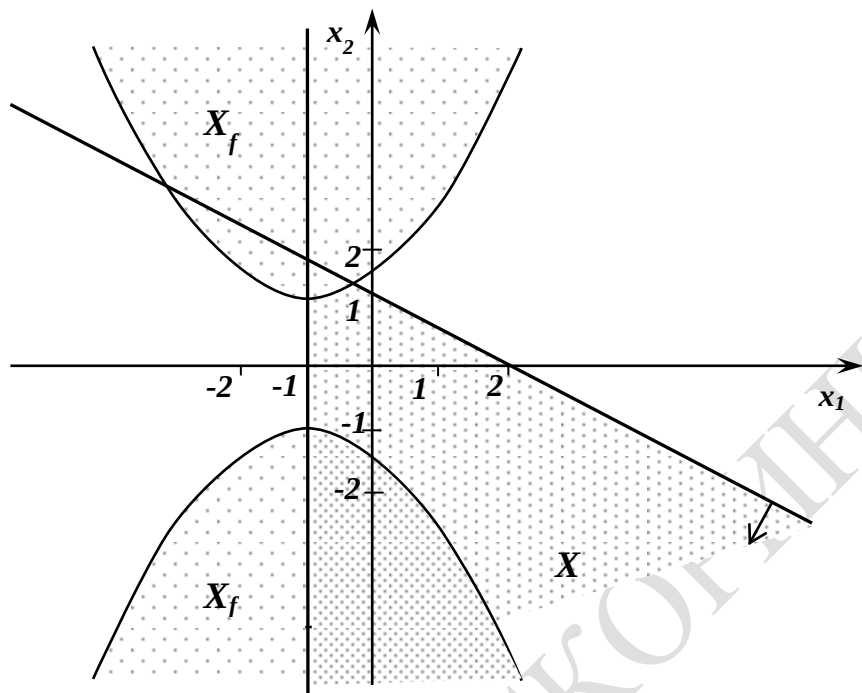


Рис.2

3. Ищем условно-стационарные точки.

$$F(x, \lambda) = x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) - \lambda_2(x_1 + 1),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ -2x_2 + 2\lambda_1 = 0, \\ \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) = 0, \\ \lambda_2(x_1 + 1) = 0. \end{cases}$$

Возможны 4 случая:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Имеем точку $\{-1, 0, 0, 0\}$

2) $\lambda_1 = 0, x_1 + 1 = 0$. Та же точка.

3) $\lambda_2 = 0, x_1 + 2x_2 - 2 = 0$.

Для точки $\{-2, 2, 2, 0\}$ $x \in X$

4) $x_1 + 1 = 0, x_1 + 2x_2 - 2 = 0$. Имеем точку $\{-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Итак, получено две условно-стационарные точки:

$$\{x^1, \lambda^1\} = \{-1, 0, 0, 0\}; \{x^2, \lambda^2\} = \{-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}.$$

4а) Для точки $\{x^1, \lambda^1\}$ множество (7) – (9) имеет вид

$$\{l : l' \frac{\partial g_2(x^1)}{\partial x} = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -l_1 \leq 0\}$$

и на нём квадратичная форма:

$$l' \frac{\partial^2 F(x^1)}{\partial x^2} l = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 2l_1^2 - 2l_2^2 \quad (17)$$

Не являются всюду неотрицательной (например, для точки $l_1 = 0, l_2 = 1$). Следовательно, x^1 не является локально-оптимальным планом;

4б) для точки $\{x^2, \lambda^2\}$ множество (7) – (9) имеет вид $\{l : l_1 = 0, l_1 + 2l_2 = 0\} = \{0, 0\}$ и на нём квадратичная форма (17) обращается в нуль. Следовательно, x^2 остаётся подозрительным на локально-оптимальный план.

5. Исследуем поведение целевой функции на бесконечности.

Луч $x_1 = 0, x_2 \leq -1$ принадлежит множеству планов X . На нём целевая функция задачи (15) имеет вид $f(x) = -x_2^2 - 2$. При $x_2 \rightarrow -\infty$ вдоль луча, $f(x) \rightarrow -\infty$. Таким образом, задача (16) не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции на множестве планов.

Вывод. Задача (14) не имеет решения.

Задание. Исследовать на экстремум следующие задачи:

1. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 7 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 - x_2 \geq 1,$ $x_1 \geq 0$	2. $f(x) = x_1^2 - 2x_2 + 3 \rightarrow \min$ $4x_1 - x_2 \leq 1,$ $x_1 + 2x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
3. $f(x) = -x_1 x_2 + x_2 + 1 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 \geq 1,$ $2x_1 - x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	4. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \rightarrow \min$ $3x_1 + 2x_2 \leq 1,$ $4x_1 - x_2 \leq 1,$ $x_1 \geq 0$

5. $f(x) = x_1 - 2x_2^2 + x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 \leq 1,$ $2x_1 - x_2 \leq 2,$ $x_2 \geq 0$	6. $f(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + x_2 \rightarrow \min$ $x_1 - 2x_2 + 1 \leq 0,$ $4x_1 - x_2 \leq 1,$ $x_1 \geq 0$
7. $f(x) = 8x_1 - x_2^2 + 4 \rightarrow \max$ $x_1 - 3x_2 \leq 1,$ $x_1 - x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0$	8. $f(x) = -x_1^2 - x_2 + 2x_1 \rightarrow \min$ $3x_1 - x_2 \leq 1,$ $x_1 + x_2 = 2,$ $x_1 \geq 0$
9. $f(x) = 8x_1 - x_2^2 + 4 \rightarrow \min$ $3x_1 - x_2 \geq 1,$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,$ $x_2 \geq 0$	10. $f(x) = 4x_1^2 - x_1x_2 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 \leq 1,$ $2x_1 - x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0$
11. $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 \rightarrow \min$ $3x_1 - x_2 = 1,$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,$ $x_2 \geq 0$	12. $f(x) = x_2^2 - x_1 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 \leq 1,$ $x_1 + x_2 \leq 1,$ $x_1 \geq 0$
13. $f(x) = x_1^2 - 2x_2 \rightarrow \min$ $2x_1 + x_2 \geq 1,$ $x_1 - x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0$	14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2 + 7 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 \geq 1,$ $x_1 - x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0$
15. $f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 \leq 1,$ $2x_1 - x_2 \geq 1,$ $x_1 \geq 0$	16. $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 1 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 \leq 1,$ $3x_1 + x_2 \leq 2,$ $x_1 \geq 0$

17. $f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 = 2,$ $-x_1 - 2x_2 \leq 1,$ $x_1 \geq 0$	18. $f(x) = x_1^2 - x_2 - 1 \rightarrow \min$ $x_1 + x_2 = 1,$ $2x_1 - x_2 \leq 1$
19. $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 \rightarrow \min$ $x_1 + 2x_2 = 3,$ $x_1 + x_2 \leq 1,$ $x_1 \leq 0$	20. $f(x) = x_1^3 - x_2^2 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 = 1,$ $x_1 + x_2 \leq 1$
21. $f(x) = x_1^4 - x_2 - 1 \rightarrow \min$ $3x_1 + x_2 \leq 1,$ $-x_1 - x_2 \geq -1$	22. $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \min$ $x_1 - 2x_2 \geq -1,$ $x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0$
23. $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 \rightarrow \min$ $2x_1 - x_2 \leq 1,$ $-x_1 - x_2 \geq -1$	24. $f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 - x_2 - 6 \rightarrow \min$ $x_1 - 2x_2 \leq 1,$ $x_1 \geq 0$
25. $f(x) = \frac{1}{4}x_1^4 - 2x_2 - 1 \rightarrow \min$ $4x_1 + x_2 \leq 1,$ $-2x_1 + x_2 \leq 1,$ $x_1 \geq 0$	26. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 1 \rightarrow \max$ $2x_1 + x_2 \geq 1,$ $x_1 + x_2 \leq 2.$

Вопросы к лабораторной работе 2

1. Постановка задачи нелинейного программирования;
2. Определение классической и обобщенной функций Лагранжа;
3. Определение обыкновенного плана для задачи НЛП с ограничениями-равенствами;
4. Классическое правило множителей Лагранжа для задачи НЛП с ограничениями-равенствами;
5. Обобщенное правило множителей Лагранжа для задачи НЛП с ограничениями-равенствами;
6. Определение обыкновенного плана для задачи НЛП с ограничениями-неравенствами;
7. Классическое правило множителей Лагранжа для задачи НЛП с ограничениями-неравенствами;
8. Обобщенное правило множителей Лагранжа для задачи НЛП с ограничениями-неравенствами.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Лабораторная работа 3

Постановка задачи. Имеется n неделимых предметов:

$I = \{i = \overline{1, n}\}$. Заданы: p_i - вес, c_i - ценность i -го предмета. $1 \leq i \leq n$.

Требуется уложить в рюкзак некоторую совокупность предметов с общей стоимостью не менее числа c и минимального веса.

Математическая модель задачи. Введём переменные $x_i, i = \overline{1, n}$,

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если предмет укладывается в рюкзак;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min, \quad x \in X, \\ X &= \{x : \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, n}\} \end{aligned} \quad (1)$$

Схема решения.

0-итерация.

Находим оценку $\xi_0 = \xi(x)$. Для этого решаем задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (2)$$

где $X = \{x : \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}\}$

Эта задача представляет из себя непрерывную оптимизационную задачу. Пусть x^* решение задачи (2). Положим $\xi_0 = f(x^*)$. Если x^* есть план задачи (1), то x^* и её решение.

В противном случае выполняем первую итерацию метода ветвей и границ: разбиваем множество X на два подмножества, укладывая или не укладывая один из предметов (например, первый):

$$X_{11} = \{x : x_1 = 0, \quad x \in X\}, \quad X_{12} = \{x : x_1 = 1, \quad x \in X\}.$$

Список множества для первой итерации $S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}$.

Рекорд итерации $r_0 = \infty$.

В общем случае k -ая итерация метода для $k=2, n$ выполняется следующим образом. Пусть $S_k = \{X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{ks(k)}\}$ - список множеств для этой итерации. Находим оценку $\xi_k = \min_{1 \leq i \leq s(k)} \xi(X_{ki})$, где $\xi(X_{ki})$ - оценки снизу значений функции задачи (1) на подмножестве X_{ki} . Они находятся, как решения непрерывных задач:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X_{ki}, \quad 1 \leq i \leq s(k)$$

Пусть $x^{*i}, 1 \leq i \leq s(k)$ решения задач (3).

Тогда полагаем $\xi(X_{ki}) = f(x^{*i})$.

Если при некотором i , $1 \leq i \leq s(k)$ задача (3) не имеет решения, то $\xi(X_{ki}) = \infty$.

Пусть среди решений x^{*i} , $1 \leq i \leq s(k)$ непрерывных задач (1) есть планы задач (1): $x^{k1}, x^{k2}, \dots, x^{kl} \in X$.

Вычисляем рекорд итерации

$$r_k = \min_{1 \leq i \leq l} \{f(x^{ki}), r^{k-1}\}, f(x^k) = r^k,$$

а) если $r^k = \xi^k$, то план x^k решение задачи (1);

б) если $r^k - \xi^k = \varepsilon > 0$, то $x^\varepsilon = x^k - \varepsilon$ - оптимальный план.

Если не выполняются случай а) либо случай б) (т.е. приближение нас не удовлетворяет), то переходим к следующей итерации. Составляем список множеств для $(k+1)$ -й итерации S_{k+1} . Для этого разбиваем множество $X_k (\xi(X_k) = \xi_k)$ на два подмножества (укладывая или не укладывая в рюкзак один из оставшихся в X_k предметов); X_k^1 и X_k^2 . В S_{k+1} включаем множества из S_k и X_k^1, X_k^2 , исключив множество X_k . Из списка S_{k+1} следует также исключить те множества списка S_k , для которых оценка снизу больше либо равна r^k .

Итерации продолжают либо до получения оптимального плана, либо до достижения заданной степени точности ε . Так как множества планов задачи (1) конечно, то всегда можно построить оптимальный план.

Метод решения непрерывных задач типа (2), (3).

Пусть требуется решить задачу (2). Для каждого i , $1 \leq i \leq n$ вычисляем относительный вес на единицу стоимости $\frac{p_i}{c_i}$. Ясно, что оптимальный план задачи (2) будет построен, если засыпать в рюкзак в первую очередь предметы (для непрерывной задачи их можно дробить) с наименьшим числом $\frac{p_i}{c_i}$.

Засыпая в рюкзак предметы в порядке возрастания числа до достижения заданной стоимости груза c , строим оптимальный план задачи (2). Задачи (3) решаются аналогично.

Пример. Решить задачу о рюкзаке с данными из таблицы:

N	1	2	3	4
c_i	20	10	12	7
p_i	3	4	5	2

$$n=4, c=30.$$

Математическая модель задачи имеет вид:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \min \quad (4)$$

$$20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 \geq 30 \quad (5)$$

$$x_i = 0 \cup 1, \quad i = \overline{1,4} \quad (6)$$

Решение.

0- итерация.

Решаем задачу (4), (5) с условием

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (7)$$

Вычисляем отношение $\frac{p_i}{c_i}, \quad i = \overline{1,4}$

$$\frac{p_1}{c_1} = \frac{3}{20}, \quad \frac{p_2}{c_2} = \frac{2}{5}, \quad \frac{p_3}{c_3} = \frac{5}{12}, \quad \frac{p_4}{c_4} = \frac{2}{7}.$$

Загружаем в рюкзак предметы в порядке возрастания относительной ценности: первый, четвертый, второй, третий. Оптимальный план задачи (4), (5), (7)

$$x^* = \{x_1^* = x_4^* = 1, x_2^* = 0,3, x_3^* = 0\},$$

$$\xi_0 = \xi(x) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6,2$$

x^* не является планом задачи (4)-(6).

Множество X разбиваем на подмножества: $S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}$

$$X_{11} = \{x \in X : x_1 = 0\}; \quad X_{12} = \{x \in X : x_1 = 1\}; \quad r_0 = \infty.$$

1-итерация.

Имеем $\xi(X_{11}) = \infty$. Так как $10+12+7=29 < 30$,

$$\xi(X_{12}) = \xi(X), \quad x^{*2} = x^*, \quad \xi_1 = \xi_0.$$

На итерации планы не построены: $r_1 = \infty$

Множество X_{11} исключаем из списка, а множество X_{12} разбиваем на два подмножества

$$X_{21} = \{x \in X_{12} : x_2 = 0\} = \{x \in X : x_1 = 1, x_2 = 0\}$$

$$X_{22} = \{x \in X : x_1 = x_2 = 1\}, \quad S_2 = \{X_{21}, X_{22}\}$$

2-итерация.

$$\xi(X_{21}) = 6,25, \quad x^{*1} = \{1, 0, \frac{1}{4}, 1\},$$

$$\xi(X_{22}) = 7, \quad x^{*2} = \{1, 1, 0, 0\}, \quad \xi_2 = 6,25.$$

Получен рекордный план итерации $x^2 = x^{*2}$, $r_2 = 7$, x^2 будет ε -оптимальный план: $\varepsilon = r_2 - \xi_2 = 0,75$. Так как p_i целое число, то условие $r_k - \varepsilon_k < 1$ означает, что рекордный план оптимальный. Следовательно, x^2 решение задачи

$$x^0 = \{1, 1, 0, 0\}, \quad f(x^0) = 7.$$

Задание. Записать математическую модель задачи. Решить задачу о рюкзаке с данными из таблицы при $n = 5$, $c = 30$ методом ветвей и границ. Нарисовать дерево вариантов.

Номера предметов в i -м варианте (i -номер студента по списку в журнале) выбираются следующим образом:

$$k = \overline{0,4},$$

$$1 \leq i \leq 14 : i + k,$$

$$15 \leq i \leq 24 : i + 2k - 14,$$

$$25 \leq i \leq 30 : i + 3k - 24.$$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
c_i	20	10	12	7	7	10	12	16	9	7	13	10	9	8	15	10	13	17
p_i	3	4	5	2	3	4	3	5	1	3	4	2	1	5	3	5	4	4

Вопросы к лабораторной работе 3

1. Постановка задачи о рюкзаке
2. Математическая модель задачи о рюкзаке
3. Общая схема метода ветвей и границ
4. Определение рекорда и рекордного плана

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Лабораторная работа 4

Пусть дана задача на безусловный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n \quad (1)$$

и известно начальное приближение x^1 . Требуется построить приближенное (улучшить план x^1) или точное решение задачи (1). Последовательные приближения строим по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k \ell^k, k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где ℓ^k - направление, а θ_k - шаг на k -й итерации.

Метод наискорейшего спуска (МНС)

МНС применим в случае $f(x) \in C^{(1)}$. В этом методе в качестве ℓ^k выбирают направление антиградиента

$$\ell^k = -\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

а шаг θ_k на итерации находят как решение задачи одномерной оптимизации

$$\varphi(\theta) = f\left(x^k - \theta \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}\right) \rightarrow \min, \theta \geq 0, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Метод Ньютона (МН)

МН в основном применяется при условии $f(x) \in C^2, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0$. В методе шаг полагают равным 1, $\theta_k = 1$, а направление вычисляется по формуле

$$\ell^k = -\left(\frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x}, k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Анализ решения.

Если на k -й итерации для плана $x^* = x^k$ выполняется условие

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

то дальнейшее улучшение планов по МНС и МН невозможно. План удовлетворяет необходимому условию оптимальности 1-го порядка, и, следовательно, подозрителен на решение. Он может быть подвергнут исследованию на оптимальность с помощью известных для задачи (1) более сильных (необходимых и достаточных) условий оптимальности.

Например, если $f(x) \in C^{(2)}$, то условие $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} \geq 0$ является необходимым,

а условие $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} > 0$ - достаточным для локальной оптимальности плана x^* . Если $f(x), x \in R^n$ - выпуклая функция, то условие (6) является критерием оптимальности плана x^* .

Пример 1. Решить методом наискорейшего спуска задачу:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 7 \rightarrow \min, x \in R^2, \quad (7)$$

начав итерационный процесс в точке $x^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Решение.

Вычисляем градиент целевой функции: $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix}$

1-я итерация. 1. Проверяем для начального плана условие (6)

$$\frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. Составляем и решаем задачу (4):

$$\varphi(\theta) = 5^2 - 8\theta + 10^2 - 16\theta - 2(5 - 8\theta) - 4(10 - 16\theta) + 7 = 320\theta^2 - 320\theta + 82,$$

а) находим стационарную точку функции $\varphi(\theta)$;

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = 640\theta - 320 = 0, \theta^0 = \frac{1}{2} > 0,$$

б) так как $\frac{\partial^2 \varphi(\theta^0)}{\partial \theta} = 640 > 0$

решение задачи $\varphi(\theta) \rightarrow \min, \theta \geq 0$ и $\theta_1 = \frac{1}{2}$

3. Строим x^2 :

$$x^2 = x^1 - \theta_1 \frac{\partial f(x^1)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2-я итерация.

1. Проверяем для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, точка x^2 является стационарной точкой целевой функции.

Анализ полученного решения.

Целевая функция задачи (7) строго выпукла, так как

$$\frac{\partial^2 f(x^2)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

Следовательно, план x^2 является оптимальным и $f(x^0) = 5$.

Пример 2. Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска, сделав две итерации, и затем применить метод Ньютона к задаче

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 \rightarrow \min, x \in R^n, x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Сравнить полученные планы по целевой функции.

Решение.

Вычисляем градиент и матрицу вторых производных целевой функции

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} > 0$$

Улучшаем план x^1 методом наискорейшего спуска.

1-я итерация.

1. Вычисляем в точке x^1 градиент

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Вычисляем θ_1

$$\varphi(\theta) = 36\theta^2 - 20\theta + 2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 72\theta_1 - 20 = 0, \theta_1 = \frac{5}{18}$$

3. Строим x^2 :

$$x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{18} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{5}{9} \\ 1 - \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

4. Подсчитываем $\Delta f = f(x^2) - f(x^1)$:

$$f(x^1) = 2, \quad f(x^2) = \frac{-7}{9}, \quad \Delta f = f(x^2) - f(x^1) = -2\frac{7}{9},$$

то есть целевая функция при переходе от x^1 к x^2 уменьшилась на $2\frac{7}{9}$

2-я итерация.

1. Проверяем для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Вычисляем θ_2 :

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{31} (6\theta^2 - 80\theta - 63),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{81} (92\theta_2 - 80) = 0, \theta_2 = \frac{5}{12}$$

3. Строим x^3 :

$$x^3 = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} - \frac{5}{12} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{27} \\ \frac{2}{27} \end{pmatrix}$$

4. Подсчитываем $f(x^3) - f(x^2)$:

$$f(x^3) = -\frac{239}{243},$$

$$f(x^3) - f(x^2) = -\frac{239}{243} + \frac{1}{9} = -\frac{58}{243},$$

то есть план x^3 лучше на $58/243$.

Применим к задаче (8) метод Ньютона.

1-я итерация.

Строим x^2 по формуле (2). Считаем ℓ^1 , имеем

$$\frac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\ell^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = x^1 + \ell^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2-я итерация.

Проверяем для x^2 условие (6):

$$\frac{\partial f(x^2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x^2 - стационарная точка целевой функции.

Анализ решения.

Так как целевая функция задачи (8) строго выпукла, то

$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ оптимальный план, $f(x^0) = -1$.

План x^3 , построенный по МНС, является ξ -оптимальным с

$$\xi = f(x^3) - f(x^0) = 1 - 239/243 = \frac{4}{243}.$$

Задание. Улучшить начальный план x^1 методом наискорейшего спуска (сделать 2 итерации), а затем применить метод Ньютона к задаче $f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$, сравнить полученный план по целевой функции.

1. $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \rightarrow \min, x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $f(x) = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1 \rightarrow \min, x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
4. $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (0, 0)$
5. $f(x) = 16x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (7, 4)$
6. $f(x) = 4x_1 - 5x_1^2 + x_2 - 6x_2^2 \rightarrow \min, x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$
7. $f(x) = 5x_1 - 2x_1^2 + 3x_2 - 1x_2^2 \rightarrow \min, x^1 = (4, 5)$
8. $f(x) = -10x_1 - 2x_1^2 - 2x_2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (6, 4)$
9. $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_1 - x_2) \rightarrow \max, x^1 = (3, -1)$
10. $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2, 3)$
11. $f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, x^1 = (5, 2)$
12. $f(x) = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3, 10)$
13. $f(x) = x_1 + x_2 - 8x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2, 7)$
14. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2, 2)$

15. $f(x) = -20x_1^2 - 18x_2^2 - x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, x^1 = (2,3)$
16. $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,5)$
17. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 30x_1 + 6x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2,6)$
18. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min, x^1 = (4,2,1)$
19. $f(x) = 3x_1 - 0,2x_1^2 + x_2 - 0,5x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (1,2)$
20. $f(x) = 2x_1 - 0,1x_1^2 + 3x_2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,1)$
21. $f(x) = 3x_1 - (x_1 - 2)^2 - (2x_2 + 1)^2 \rightarrow \max, x^1 = (5,4)$
22. $f(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 + 0,1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0,5)$
23. $f(x) = -6x_1 + 4x_2^2 + x_1^2 - 18 \rightarrow \min, x^1 = (3,2)$
24. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 11)^2 \rightarrow \min, x^1 = (7,0)$
25. $f(x) = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 \rightarrow \max, x^1 = (0,1,2)$
26. $f(x) = (9x_1 - 10)^2 + (0,1x_2 + 10)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0,5)$

Вопросы к лабораторной работе 4

1. Метод наискорейшего спуска;
2. Метод Ньютона;
3. Общая схема методов первого порядка;
4. Три способа выбора шага.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лабораторная работа 5

Задача распределения ресурсов имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = C, \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

где n - число технологических процессов, между которыми нужно распределить сырье в объеме C , с целью получения максимальной прибыли;

x_i – количество сырья, выделяемое на i -й процесс;

$f_i(x_i)$ – прибыль получаемая в i -ом процессе при использовании в нем сырья в объеме x_i , $i = \overline{1, n}$.

Так как целевая функция и ограничения в задаче (1)-(3) сепарабельны, то к ней применим метод динамического программирования.

Пусть C – целое число и x_i , $i = \overline{1, n}$ – могут принимать лишь целые неотрицательные значения. В этом случае для задачи (1)-(3) удобно использовать следующую табличную реализацию метода динамического программирования.

1. Рассчитываем функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y - z)], \quad (4)$$

$$0 \leq y \leq C$$

с начальным условием

$$B_1(y) = f_1(y), \quad 0 \leq y \leq C \quad (5)$$

Данные заносим в таблицу, имеющую $s+1$ столбцов и $n+1$ строк.

$y \backslash B(y)$	1	2	...	k	...	C
$B_1(y)$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	...	$B_1(k)$	...	$B_1(C)$
$B_2(y)$	$B_2(1)$ $[x_2(1)]$	$B_2(2)$ $[x_2(2)]$	...	$B_2(k)$ $[x_2(k)]$	...	$B_2(C)$ $[x_2(C)]$
...	...	...	...	...		...
$B_n(y)$	$B_n(1)$ $[x_n(1)]$	$B_n(2)$ $[x_n(2)]$	...	$B_n(k)$ $[x_n(k)]$		$B_n(C)$ $[x_n(C)]$

При заполнении таблицы в ее клетке вместе со значениями $B_k(y)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq y \leq n$ записываем также (в квадратных скобках) и величину $x_k(y)$, определяемую как то число z , $0 \leq z \leq y$, на котором в уравнении (4) достигается максимум (если таких чисел несколько, записываем все).

2. Определяем оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(3). Максимальная прибыль равна величине $B_n(C)$.
3. Определяем оптимальное распределение сырья между процессами x_i , $i = \overline{1, n}$.

Из таблицы последовательно находим $x_n^0 = x_n(C)$,
 $x_n^0 = x_i(C - \sum_{j=n}^{i=1} x_j^0)$, $i=n-1, \dots, 2$; $x_i^0 = C - \sum_{j=n}^2 x_j^0$.

Решений $x_i^0 = \{x_i^0, i = \overline{1, n}\}$ может оказаться несколько.

Замечание: Описанную выше табличную реализацию удобно применять в случае изменения условий задачи (1)-(3): при сокращении или при упрощении либо количества сырья C , либо чисел n технологических процессов. При сокращении чисел C или n для подсчета решения новой задачи рассматривается соответствующая часть таблицы, получаемая путем вычеркивания ненулевых столбцов или строк. При увеличении C или n для получения решения новой задачи таблицу следует нарастить.

Пример 1. Решить следующую задачу распределения ресурсов:

$$\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

(6)

Решение:

Заполняем таблицу, рассчитывая функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана.

Имеем, $f_1(x) = \frac{x_1^2}{2}$, $f_2(x) = x^2 - x$, $f_3(x) = 2x$, $C=5$, $n=3$

а) для первой строки таблицы

$$B_1(y) - f_1(y) = \frac{y^2}{2}, \quad 1 \leq y \leq 5$$

$$B_1(1) = 0,5; B_1(2) = 2; B_1(3) = 4,5; B_1(4) = 8; B_1(5) = 12,5$$

б) для второй строки

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + B_1(y-z)] = \max_{0 \leq z \leq y} [z^2 - z + \frac{(y-z)^2}{2}];$$
$$1 \leq y \leq 5$$

$$B_2(1) = \max_{0 \leq z \leq 1} [z^2 - z + \frac{(1-z)^2}{2}] \max [0 + 0,5; 0 + 0] = 0,5;$$

$$x_2(1) = 0;$$

$$B_2(2) = \max_{0 \leq z \leq 2} [z^2 - z + \frac{(2-z)^2}{2}] \max [0 + 2; 0 + 0,5; 2 + 0] = 2;$$

$$x_2(2) = \begin{cases} 0; \\ 2; \end{cases}$$

$$B_2(3) = \max_{0 \leq z \leq 3} [0 + 4,5; 0 + 2; 2 + 0,5; 6 + 0] = 6;$$

$$x_2(3) = 3;$$

$$B_2(4) = \max_{0 \leq z \leq 4} [0 + 8; 0 + 4,5; 2 + 2; 6 + 0,5; 12 + 0] = 12;$$

$$x_2(4) = 4;$$

$$B_2(5) = \max_{0 \leq z \leq 5} [0 + 12,5; 0 + 8; 2 + 4,5; 6 + 2; 12 + 0,5; 20 + 0] = 20$$

$$x_2(5) = 5;$$

с) для третьей строки

$$B_3(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_3(z) + B_2(y-z)] = \max_{0 \leq z \leq y} [2z + B_2(y-z)];$$
$$1 \leq y \leq 5;$$

$$B_3(1) = \max_{0 \leq z \leq 1} [2z + B_2(1-z)] = \max[0 + 0,5; 2 + 0] = 2; \quad x_3(1) = 1;$$

$$B_3(2) = 4; \quad x_3(2) = 2;$$

$$B_3(3) = 6; \quad x_3(3) = \begin{cases} 0; \\ 3; \end{cases}$$

$$B_3(4) = 12; \quad x_3(4) = 0;$$

$$B_3(5) = 20; \quad x_3(5) = 0;$$

$y \backslash B(y)$	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	0,5	2	4,5	3	12,5
$B_2(y)$	0,5 [0]	2 [0;2]	6 [3]	12 [4]	20 [5]
$B_3(y)$	2 [1]	4 [2]	6 [0;3]	12 [0]	20 [0]

Ответ:

$$B_3(5) = 20;$$

$$x_3^0 = x_3(5) = 0, \quad x_2^0 = x_2(5 - 0) = 5, \quad x_1^0 = 0 - x_2^0 - x_3^0 = 0$$

Пример 2. Найти решение задачи (5) при сокращении ресурса на 2
Из таблицы получим $B_3(3) = 6$;

Имеем два решения: $\bar{x}_3^0 = 3, \bar{x}_2^0 = 0, \bar{x}_1^0 = 0$;

$$\overline{\bar{x}}_3^0 = 0, \overline{\bar{x}}_2^0 = 3, \overline{\bar{x}}_1^0 = 0.$$

Задание: Записать задачу в виде (1)-(2)-(3)

1. Решить задачу распределения ресурсов при $C=6, n=3$.
2. Найти по таблице решение в случае сокращения ресурсов на одну единицу, $C=5$.
3. Определить, эффективно ли введение еще одного дополнительного технологического процесса f_4 ?

Номер варианта выбирается по таблице:

Номер по порядку i	f_1	f_2	f_3	f_4
1-10	A_i	B_i	B_i	$B_i + 1$
11-17	$A_i - 10$	$B_i - 9$	$B_i - 8$	$B_i - 8$
18-24	$A_i - 17$	$B_i - 15$	$B_i - 16$	$B_i - 14$
25-28	$A_i - 24$	$B_i - 21$	$B_i - 20$	$B_i - 20$

где i- порядковый номер студента по журналу.

Варианты функций прибыли:

A. $f(x)=0, x=0$

$$1. \begin{cases} x^2 - 1, & x = 1, 2, 3 \\ 2x + 1, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2^x - 2, & x = 1, 2, 3 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + 6, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4 + x^2 - 2x, & x = 1, 2, 3 \\ 2x + 3, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2x, & x = 1, 2, 3 \\ x + 6, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3^{x-2}, & x = 1, 2, 3 \\ 2^x - 2, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - 2, & x = 1, 2, 3 \\ 2^{x-3} + 3, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2, & x = 1, 2, 3 \\ 9, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1, & x = 1, 2, 3 \\ x + 2, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 1, & x = 1, 2, 3 \\ \frac{x^2}{4} + 3, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x, & x = 1, 2, 3 \\ 10, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$$

Б.

$$1. \frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$2. \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$$

$$3. \frac{1}{18}(x^3 - x^2)$$

$$4. \frac{1}{2}x$$

$$5. 0,3[2^x - (x - 1)^2]$$

$$6. 0,2(x^2 + 3x)$$

$$7. 2(7x - x^2)$$

$$8. 0,05[3^{x-1} - \frac{(x-1)^2}{3}]$$

$$9. 2x$$

$$10. 0,3(x^2 + 2x)$$

В.

$x \backslash N_0$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	2	4	8
2	2	3	4	5	8	11
3	2	2	4	5	6	9
4	2	4	6	8	8	8
5	0	4	5	5	9	10
6	1	1	4	6	8	11
7	2	3	5	7	9	10
8	1	3	5	7	9	10
9	0	2	4	6	8	12
10	0	0	3	5	7	9

Вопросы к лабораторной работе 5

1. Постановка задачи распределения ресурсов;
2. Определение функции Беллмана;
3. Уравнение Беллмана;
4. Идея метода динамического программирования.

ГТУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лабораторная работа 6

Требуется решить задачу

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx \rightarrow \min, y \in Y, \quad (1)$$

где

$$Y = \{y(x) \in C_{[a,b]}^1 : y(a) = c, y(b) = d\}$$

Кривую $y^0 \in Y$ называют слабой минималью задачи (1), если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$J(y^0) \leq J(y), \forall y \in Y,$$

$$|y(x) - y^0(x)| \leq \varepsilon, |y_x(x) - y_x^0(x)| \leq \varepsilon, x \in [a, b]$$

Схема исследования задачи (1)

1. Составляем уравнение Эйлера и находим его общее решение:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} y_{xx} + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y \partial y_x} y_x + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial x \partial y_x} - \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

2. Пусть $y = y(x, c_1, c_2)$ общее решение дифференциального уравнения (2). Находим экстремали задачи, подбирая произвольные постоянные c_1 и c_2 из условий

$$y(a, c_1, c_2) = c, y(b, c_1, c_2) = d.$$

3. Для каждой экстремали $y^*(x), x \in [a, b]$ проверяем необходимое условие слабого минимума второго порядка Лежандра-Клебша.

$$\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2} \geq 0, \forall x \in [a, b] \quad (3)$$

Экстремали, не удовлетворяющие условию (3), не могут быть минималиями задачи (1). Исключаем их из рассмотрения.

4. Для неособых экстремалей $y^*, x \in [a, b]$ (удовлетворяющих усиленному условию Лежандра-Клебша)

$$\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2} > 0, \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

проверяем условие Якоби:

а) строим уравнение Якоби вдоль $y(x), x \in [a, b]$

$$a(x)h_{xx}(x) + b(x)h_x(x) + c(x)h(x) = 0, x \in [a, b], \quad (5)$$

где

$$a(x) = \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2}, b(x) = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2}, c(x) = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y \partial y_x} - \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y^2}, x \in [a, b].$$

б) находим общее решение уравнения (5)

$$h = h(x, D_1, D_2), x \in [a, b],$$

в) из кривых (6) выделяем класс кривых $h = h(x, D), x \in [a, b]$ удовлетворяющих условию $h(a, D) = 0$,

г) для кривых $h(x, D) = 0$ находим наименьшую сопряжённую с точкой a точку x^* , исследуя уравнение

$$h(x, D) = 0 \quad (7)$$

Если для неособой экстремали $y^*(x)$ точка $x^* \in]a, b[$, то она не является минималью. Исключаем её из рассмотрения.

5. Проверяем для неособых экстремалей достаточное условие слабого минимума. Если для некоторой экстремали, удовлетворяющей условию (4), не существует точки x^* из отрезка $]a, b[$ сопряжённой с a , то эта экстремаль является слабой минималью.

6. Для слабой минимали $y = y^*(x), x \in [a, b]$ вычисляем значение функционала $J_* = J(y^*)$

Пример. Исследовать задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^\alpha (y_{xx}^2 - y^2 + 4y \sin 2x) dx \rightarrow \min \quad (8)$$

$$y(0) \in C_{[0, \alpha]}^{(1)}, y(0) = 0, y(\alpha) = -\frac{2}{3} \sin 2\alpha \quad (9)$$

1. Составляем уравнение Эйлера

$$y_{xx} + y = 2 \sin 2x, x \in [0, \alpha] \quad (10)$$

2. Общее уравнение (10) имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \frac{2}{3} \sin 2x, x \in [0, \alpha]$$

Используя (9), находим $c_1 = c_2 = 0$

Таким образом, экстремаль имеет вид

$$y^*(x) = -\frac{2}{3} \sin 2x, x \in [0, \alpha] \quad (11)$$

3. Для экстремали проверяем условие (4):

$$\frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y_x^*(x))}{\partial y_x^2} = 2 \geq 0$$

Итак, условие Лежандра-Клебша выполняется в усиленной форме, т.е. экстремаль (если она существует) является неособой, удовлетворяет необходимому условию минимума Лежандра-Клебша.

4. Составляем и решаем уравнения Якоби

а) $h_{xx}(x) + h(x) = 0, x \in [0, \alpha]$

б) общее решение имеет вид

$$h(x) = D_1 \sin x + x D_2 \cos x \quad (12)$$

в) кривая семейства (12), удовлетворяющая условию $h(0) = 0$ имеет вид

$$h = h(x, D) = D \sin x, x \in [0, \alpha]$$

г) наименьшая сопряжённая с точкой a точка кривой (12) $x^* = \pi$

5. Вывод:

а) если $\alpha < \pi$, то кривая (11)

$$y(x) = -\frac{2}{3} \sin 2x, x \in [0, \alpha]$$

- слабая минималь задачи (8)-(9), так как для неё выполняется достаточное условие слабого минимума;

б) если $\alpha > \pi$, то у задачи (8)-(9) нет слабых минималей, так как в этом случае для экстремалей не выполняется необходимое условие Якоби;

в) если $\alpha = \pi$, то экстремаль (11) остаётся подозрительной на слабую минималь.

6. Пусть $\alpha \leq \pi$. Для кривой (11) вычисляем значение функционала $J(y^*)$

Задание. Исследовать на экстремум следующие задачи:

1. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-2x} y_x^2 + e^{2x} y + \frac{3}{2} e^{-2x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

2. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + y_x + y(2e^x - x^2) + \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

3. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 4xe^x y - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

4. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 e^x + 3e^{2x} xy + e^x y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

5. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-3x} y_x^2 + e^{-3x} y \sin x - e^{-3x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

6. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 2y_x + 4y \sin x - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

7. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-5x} y_x^2 + 4x^2 e^{-3x} y - 2e^{-5x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

8. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 3y_x + (x^2 - x + 1 + \frac{1}{2} y^2)) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
9. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-4x} y_x^2 + e^{-4x} y_x + e^{-4x} (-18x^2 + 6x)y) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
10. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-5x} y_x^2 - \frac{3}{5} e^{-5x} y_x - 3e^{-5x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
11. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 2y_x + 4e^x y - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
12. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-2x} y_x^2 + 4e^{-x} y - \frac{1}{2} e^{-2x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
13. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-2x} y_x^2 + \frac{3}{2} e^{-2x} y_x - 4e^{-x} y + \frac{3}{2} e^{-2x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
14. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-3x} y_x^2 + e^{-3x} (3e^{2x} + 2x^2)y - e^{-3x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
15. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 3y_x + 4e^x y + \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
16. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-3x} y_x^2 - 13xe^{-3x} y + 1) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
17. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 2y_x + 6y \sin 2x - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
18. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{-x} y_x^2 - 13e^{-x} y \sin 2x - \frac{1}{2} e^{-x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
19. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 4y_x + y \sin 2x - 2y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
20. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 3y_x + 4xy \cos 2x - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
21. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + y_x + xy \sin x - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
22. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{2x} y_x^2 + e^{2x} y \sin x - \frac{5}{2} e^{2x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
23. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 3y_x + 6y \cos 2x - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
24. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 2y_x + 2y \sin 2x - \frac{1}{2} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
25. $\int_0^b (\frac{1}{2} e^{2x} y_x^2 + e^{2x} x^2 y + e^{2x} xy - \frac{5}{2} e^{2x} y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$
26. $\int_0^b (\frac{1}{2} y_x^2 + 5y_x + y \cos 3x - 2y^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 1$

Вопросы к лабораторной работе 6

1. Постановка основной задачи вариационного исчисления;
2. Определение слабой минимали;
3. Необходимое условие минимума Эйлера;
4. Необходимое условие минимума Лежандра-Клебша;
5. Определение сопряженной точки;
6. Необходимое условие минимума Якоби;
7. Достаточное условие минимума.

ГТУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Применение теоремы Куна-Таккера.
Лабораторная работа 1
2. Исследование задач нелинейного программирования.
Лабораторная работа 2
3. Решение задачи о рюкзаке методом ветвей и границ.
Лабораторная работа 3
4. Решение задачи безусловной минимизации.
Лабораторная работа 4
5. Решение задачи распределения ресурсов методом
динамического программирования.
Лабораторная работа 5
6. Исследование основной задачи вариационного исчисления.
Лабораторная работа 6