

Н. С. Богданова
(БГУ, Минск)
МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ
С ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим модельную задачу дискретной оптимизации, задачу о рюкзаке, которая в наиболее общей постановке имеет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max; \sum_{i=1}^n a_i(x_i) \leq \beta;$$

$$a_i, \beta > 0; 0 \leq x_i \leq h_i; a_i h_i \leq \beta,$$

где x_i – целые, $f_i(0) = 0$, $f_i(x_i)$ – неубывающие функции. В настоящей задаче предположим, что $f_i(x_i)$ – выпуклые монотонные сепарабельные функции и порядково-выпуклые для $1 \leq i \leq n$. Тогда используя известные факты построения градиентного алгоритма [1], получим следующий алгоритм:

1 Положить $x_i^0 = 0$, $x_i^1 = 0$, $x_i^2 = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2 Пока $\sum_{i=1}^n a_i(x_i^0) = [a_i(x_i) - \text{линейные функции}] = \sum_{i=1}^n a_i x_i^0 < \beta$, выполнять п. 3 – 5. Найти пару i_0, k_0 , на которой достигается $\max_{i, k_i: x_i^0 < S_i^{k_i} < h_i} \Delta_i(S_i^{k_i}, x_i^0)$.

3 Положить $x_i^1 = x_i^0$.

4 Положить $x_{i_0}^1 = S_{i_0}^{k_0}$.

5 Найти $l_0 = \arg \max f_i(x_i)$.

6 Положить $x_{l_0}^2 = h_{l_0}$.

7 Положить $x^A = \arg \max \{f(x^1), f(x^2)\}$, где x^A – искомое решение. Трудоемкость алгоритма $O((\sum_{i=1}^n \lceil \log_2 h_i \rceil)^2)$.

Если рассматривать данную задачу на аппроксимационной решётке $Z(a^i)$, которая строится по формуле $a_{i+1} = \max\{\lceil \alpha \cdot a_i \rceil, a_i + 1\}$, то при $\alpha \leq 1$ оценка точности погрешности градиентного алгоритма будет равна $1/2$ [1], если $\alpha > 1$, то оценка будет равна $1/2\alpha$ [2].

Литература

- 1 Ковалев, М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Изд. 2-е, стереотип. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – С.107 – 130.
- 2 Емельяненко, Н.С. Гарантированная оценка точности для модельной задачи о рюкзаке с выпуклыми монотонными сепарабельными функциями // Информационные технологии и системы 2012 (ИТС 2012): материалы международной научной конференции, БГУИР, Минск, Беларусь, 24 октября 2012 г. / редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск: БГУИР, 2012. – 352 с.