

позволяет определить допустимые значения e'_s

$$e'_{1,2} = \frac{(N - K - 1)b^2 + Ka^2 \pm \sqrt{[(N - K - 1)b^2 + Ka^2]^2 + 4a^2b^2N}}{2}. \quad (14)$$

и соответственно два вектора e_s ($s = 1, 2$). Вектор $S(0) = (0, 0, \dots, 0, a_{K+1}, \dots, a_N)$, задающий в рассматриваемом случае граничные условия, можно представить в виде суперпозиции e_1 и e_2 , поэтому в голограмме при реконструкции возбуждятся только моды M_1 и M_2 . Коэффициенты d_m , фигурирующие в (9), определяются формулами

$$d_{1,2} = \pm [(\beta/\alpha)_1 - (\beta/\alpha)_2]^{-1}. \quad (15)$$

Фазовые скорости мод M_1 и M_2 в голограмме различны, и на глубине $z'_n = 2\pi n/k_0 \sqrt{\epsilon_0} (e_1 - e_2)$ ($n = 1, 2, \dots$) амплитуды их плоских компонент, соответствующих объектному пучку, сложатся в фазе

$$S(z') = \frac{1}{(\beta/\alpha)_1 - (\beta/\alpha)_2} (2a_0, 2a_1, \dots, 2a_K, [(\beta/\alpha)_1 + (\beta/\alpha)_2] a_{K+1}, \dots, [(\beta/\alpha)_1 + (\beta/\alpha)_2] a_N).$$

Плоскостям $z = z'_n$ соответствует наибольшая дифракционная эффективность голограммы $\eta(z'_n) = \eta_{\max}$. Для оценки η_{\max} найдем отношение суммарной интенсивности компонент восстановленного пучка при $z = z'_n$ к суммарной интенсивности реконструирующего пучка при $z = 0$

$$\eta_{\max}(K, N, a, b) = 4a^2(K+1)/\{(N-K)b^2[(\beta/\alpha)_1 - (\beta/\alpha)_2]^2\}. \quad (16)$$

Подставив $(\beta/\alpha)_{1,2}$ в (16), получим

$$\eta_{\max}(K, N, a, b) = \frac{4(K+1)(N-K)a^2b^2}{(N-K-1)^2b^4 + 2(N-K-1)Ka^2b^2 + K^2a^4 + 4a^2b^2N}. \quad (17)$$

Дифракционная эффективность при произвольном z определяется в соответствии с (9) и (17) формулой

$$\eta(z, K, N, a, b) = \eta_{\max}(K, N, a, b) \sin^2(\pi z/2z'_1). \quad (18)$$

Исследование (17) показывает, что при $1 \ll K \ll N$ для получения голограммы с высокой дифракционной эффективностью необходимо во время записи обеспечить равенство суммарных интенсивностей плоских компонент объектного и референтного пучков. Если же объектный или референтный пучок состоит из одной плоской волны (т. е. $K=0$ или $K=N-1$) и $N \gg 1$, то дифракционная эффективность голограммы будет тем большей, чем больше интенсивность этой единственной плоской волны по сравнению с общей интенсивностью компонент пучка, образованного множеством плоских волн.

Литература

- [1] Ю. Н. Денисюк. ДАН СССР, 144, 1275, 1962.
- [2] Н. Kogelnik. Bell Syst. Techn. J., 48, 2909, 1969.
- [3] E. J. Saccoccio. J. Appl. Phys., 38, 3995, 1967.
- [4] В. В. Аристов, В. Ш. Шехтман. Усп. физ. наук, 104, 51, 1971.
- [5] М. С. Соскин. Матер. IV Всесоюзн. школы по голографии, 231. Л., 1972.
- [6] П. П. Эвальд. Усп. физ. наук, 89, 287, 1966.
- [7] P. P. Ewald. Ann. Phys., 54, 519, 1917.
- [8] В. Г. Сидорович, Д. И. Стаселько. ЖТФ, 44, 2572, 1974; Письма ЖТФ, 1, 424, 1975; ЖТФ, 45, 2597, 1975.

Поступило в Редакцию 6 октября 1975 г.

УДК 535.13.01

О ФОРМУЛЕ ЛОРЕНЦ—ЛОРЕНЦА

В. Л. Кузьмин

Известная формула Лоренц—Лоренца

$$1 = \frac{4\pi\alpha r}{3} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1}, \quad (1)$$

разложенная в ряд по αr , имеет вид

$$n - 1 = 2\pi\alpha r + \frac{2}{3} (\pi\alpha r)^2 + \frac{10}{9} (\pi\alpha r)^3 + \dots \quad (2)$$

Такая запись формулы (1) является оправданной, так как попытки [1-5, 7] найти строго (с учетом межмолекулярных корреляций) связь между показателем преломления n и $\alpha\rho$ основаны на исследовании рядов по $\alpha\rho$. Так, было показано, что (1) не учитывает зависимости n от волнового вектора k [1-7]. Покажем, что и в длинноволновом пределе ($k=0$) формула (2) не может в общем случае быть верной, начиная с члена $\sim (\alpha\rho)^3$.

В работе [7] исследовался ряд

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) + \alpha\rho \int A_{01}^0 d\mathbf{r}_1 \left[\mathbf{D}(\mathbf{r}_1) + \alpha\rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 A_{12} G(1, 2) \mathbf{D}(\mathbf{r}_2) + \right. \\ \left. + \alpha^2 \rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 G(1, 2, 3) A_{12} A_{23} \mathbf{D}(\mathbf{r}_3) + \dots \right] \quad (3)$$

(мы используем обозначения работы [7] с заменой \mathbf{E} на \mathbf{D} , поскольку \mathbf{D} , с точки зрения макроскопической электродинамики, — вектор электрической индукции). Учет первых двух членов в квадратных скобках дает формулу

$$1 = 4\pi n^2 \alpha\rho (n^2 - 1)^{-1} [1 - 8\pi\alpha\rho Y/3 + \dots], \quad Y = n^2. \quad (4)$$

Для определения коэффициента при $(\alpha\rho)^3$ рассмотрим вклад третьего члена. Функция $G(1, 2, 3)$ является связной частью функции $N(1, 2, 3)$ [7]

$$N(1, 2, 3) = \frac{\sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_i) \sum_{j \neq i}^N \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_j) \sum_{k \neq j}^N \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{x}_k)}{\sum_{i \neq j \neq k \neq i} + \sum_{k=i}^N} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}_j) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{x}_k) = \rho(1, 2, 3) + \\ + \rho(1, 2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3), \quad (5)$$

так что $G(1, 2, 3) = g(1, 2, 3) + \rho(1, 2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)$, где $g(1, 2, 3)$ — трехчастичная функция Урселла [8]. Известно [8], что

$$g(1, 2, 3) = 2\rho^3 \text{ при } r_{12} = r_{23} = 0, \quad \rho(1, 2) = 0 \text{ при } r_{12} = 0. \quad (6)$$

В длинноволновом пределе, когда $A_{ij} = \nabla \times \nabla \times r_{ij}^{-1}$ (полагаем $Y \approx 1$ в члене $\sim (\alpha\rho)^3$),

$$\alpha^2 \rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 g(1, 2, 3) [(\Delta \delta_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta) r_{12}^{-1}] [(\Delta \delta_{\beta\gamma} - \nabla_\beta \nabla_\gamma) r_{23}^{-1}] D_\gamma(\mathbf{r}_3) = \\ = \alpha^2 \rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 g(1, 2, 3) \left[\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \frac{1}{3} \left(\Delta \frac{1}{r_{12}} \right) \left(\Delta \frac{1}{r_{23}} \right) + \left(\nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{1}{r_{12}} \right) \left(\nabla_\beta \nabla_\gamma \frac{1}{r_{23}} \right) \right] D_\gamma(\mathbf{r}_3) = \\ = [128 (\pi\alpha\rho)^2 / 9] D_\alpha(\mathbf{r}_1) \quad (7)$$

(α, β, γ — декартовы составляющие). Здесь использовалось (6) и тождества $\Delta r_{ij}^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{r}_{ij})$, $\nabla_\alpha \nabla_\beta r_{ij}^{-1} = -\delta_{\alpha\beta} (4\pi/3) \delta(\mathbf{r}_{ij})$; последнее справедливо только при изотропности подынтегрального выражения по направлению \mathbf{r}_{ij} : это может быть и не так в члене с $\nabla_\alpha \nabla_\beta r_{12}^{-1} \nabla_\beta \nabla_\gamma r_{23}^{-1}$. Однако поскольку основной вклад в интеграл дает область малых \mathbf{r}_{ij} , то вообще можно положить под интегралом $g(1, 2, 3) \approx g(1, 1, 1)$. Далее

$$\alpha^2 \rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 \rho(1, 2) A_{12}^0 A_{21} D(\mathbf{r}_1) \approx \alpha^2 \rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 \rho(1, 2) r_{12}^{-6} [\mathbf{D}(\mathbf{r}_1) + 3r_{12}^{-2} r_{12}(\mathbf{r}_1 \mathbf{D}(\mathbf{r}_1))] = \\ = 2\alpha^2 \rho^{-1} \int d\mathbf{r}_2 \rho(1, 2) r_{12}^{-6} \mathbf{D}(\mathbf{r}_1) \equiv a (\pi\alpha\rho)^2 \mathbf{D}(\mathbf{r}_1), \quad (8)$$

где a — некоторая положительная ($\rho(1, 2) > 0$ всегда) величина. При выводе (8) использовали тождество $\rho(1, 2) \delta(1, 2) = 0$. Таким образом, из (7) и (8) следует, что член с $G(1, 2, 3)$ дает вклад $(128/9 + a) (\pi\alpha\rho)^2$ в квадратную скобку формулы (4). Разложив последнюю в ряд по $\alpha\rho$, получим

$$n - 1 = 2\pi\alpha\rho + (2/3) (\pi\alpha\rho)^2 + (a - 22/9) (\pi\alpha\rho)^3 + \dots \quad (9)$$

Из (8) видно, что a сильно зависит от $\rho(1, 2)$, так что для различных веществ и термодинамических состояний не может выполняться условие $a - 22/9 = 10/9$, приводящее к совпадению (9) и (2). Так, в газовом пределе $\rho(1, 2) \approx \rho^2 \exp[-(kT)^{-1} \Phi(r_{12})]$, где $\Phi(r_{12})$ — парный межмолекулярный потенциал, и a сильно зависит от температуры T и вида $\Phi(r_{12})$. Любопытно отметить, что (9) совпадает с (2) (вплоть до $(\alpha\rho)^3$), если предположить $\rho(1, 2) = \rho^2 \theta(r_{12} - b)$ (т. е. промоделировать лоренцову полость) при $\rho^{-1} = 4\pi b^3/3$, чего быть не может, так как при любой упаковке объем ρ^{-1} , приходящийся в системе на твердый шарик радиуса b , больше объема $4\pi b^3/3$ твердого шарика.

- [1] J. G. Kirkwood. J. Chem. Phys., 4, 592, 1936.
 [2] P. Mazur, M. Mandel. Physica, 22, 299, 1956.
 [3] S. Larsen, R. Mountain, R. Zwanzig. J. Chem. Phys., 42, 2187, 1965.
 [4] D. Bedeaux, P. Mazur. Physica, 67, 23, 1973.
 [5] В. Л. Кузьмин. Опт. спектр., 38, 745, 1975.
 [6] В. И. Татарский. ЖЭТФ, 46, 1399, 1964.
 [7] В. Л. Кузьмин. Опт. и спектр., 40, 552, 1976.
 [8] J. L. Lebowitz, J. K. Percus. J. Math. Phys., 4, 116, 1969.

Поступило в Редакцию 13 октября 1975 г.

УДК 535.32.096 : 547.532

ХАРАКТЕР ТЕМПЕРАТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ БЕНЗОЛА И СЕГНЕТОВОЙ СОЛИ

В. П. Семенова

Исследование зависимости показателя преломления от температуры является одной из важных сторон изучения проблемы структурных изменений жидкостей и твердых тел.

Дифференциальный фотоэлектрооптический рефрактометр ФЭОР, описанный в [1, 2], дает возможность непрерывного наблюдения за ходом температурной зависимости относительного изменения показателя преломления. Были исследованы зависимости $\Delta n(T)$ для жидкого бензола и кристалла сегнетовой соли. Исследуемая жидкость заливалась в кювету, в которую погружалась призма рефрактометра. Кювета в свою очередь помещалась в сосуд с водой. Температура в сосуде была на несколько градусов выше или ниже температуры исследуемой жидкости. Зависимость $\Delta n(T)$ снималась как при повышении температуры жидкости, так и при ее понижении. Жидкости в кювете и в сосуде перемешивались мешалками. Непрерывные изменения температуры фиксировались с помощью термометра с точностью ± 0.1 К. Точность фиксации абсолютного значения температуры составляла ± 0.2 К, что связано с инерционностью термометра. Вычисления и измерения инерционности термометра проводились по методике, описанной в [3]. На рис. 1 представлена зависимость $\Delta n(T)$ бензола. Из рис. 1 следует, что в точках 3.2 и 5.5°C результаты совпадают с данными, представленными в [4]. Также имеется дополнительная точка перегиба в окрестности 9°C, не обнаруженная в работе [4].

Сегнетова соль, имеющая химическую формулу $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, — первый кристалл, у которого были обнаружены сегнетоэлектрические свойства, наблюдающиеся в интервале температур от -18 до $+24$ °С. Представляя интерес и в теоретическом, и в прикладном плане, этот кристалл, однако, из-за сложности строения изучен недостаточно. Литература, посвященная сегнетовой соли, как указывают Иона и Ширане [5], часто содержит противоречивые данные.

Исследование температурной зависимости показателя преломления $n(T)$ является одной из важных сторон изучения проблемы фазовых переходов II рода. В сегнетовой соли в точках Кюри наблюдается перестройка структуры из ромбической фазы в моноклинную. Однако в работах Валашека [6] и Баранского [7] приводятся линейные зависимости $n(T)$. По-видимому, влияние фазового перехода не было замечено из-за недостаточной чувствительности измерений, как отмечается у Иоффе [8]. Мюллером [9] были обнаружены небольшие отклонения от линейности двулучепреломления в точках фазовых превращений II рода. В свете вышесказанного пред-

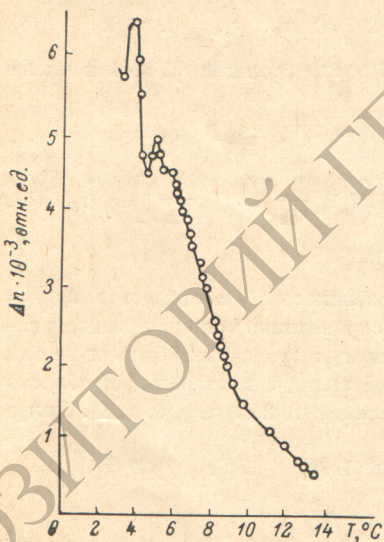


Рис. 1. Характер температурных изменений показателя преломления бензола.