

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД В ОПТИКЕ
АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД

А. И. Семенов и Ф. С. Миронов

Матричный метод расчета оптических свойств многослойных систем распространен на слоистые среды любой анизотропии. Построена матрица для однородного слоя, представляющего собой двухосный кристалл с произвольной ориентацией главных осей тензора диэлектрической проницаемости. Как и в изотропном случае, полная матрица для многослойной анизотропной отражающей системы представляет собой произведение матриц однородных слоев, образующих эту систему. На основе матричного уравнения получены общие выражения для электрического поля в отраженной от анизотропной системы и в прошедших в анизотропную подложку волнах, справедливые при любом числе однородных слоев.

Теория слоистых сред приобретает важное значение в оптике в связи с широким применением систем тонких плоскопараллельных пленок. Для расчета оптических свойств многослойных систем предложено много методов. Наиболее общая теория распространения плоских электромагнитных волн через такие среды развита в работах Абелеса [1]. В этих работах введены матрицы второго порядка, позволяющие довольно просто описать любую систему из многих плоскопараллельных изотропных слоев. Позднее были предприняты отдельные попытки распространить матричный метод на слоистые анизотропные среды [2, 3], но матрицы для конкретных видов анизотропии построены не были. Недавно вышла работа Минкова [4], в которой решена задача о распространении света через анизотропную слоистую среду, однако автор ограничивается рассмотрением только одноосных кристаллов. Кроме того, в работе [4] используется метод, требующий для построения матриц привлечения свойств обыкновенной и необыкновенной волн, а это затрудняет переход к общему случаю двухосных кристаллов.

В настоящей работе для получения конкретного вида матрицы анизотропного слоя мы использовали подход, аналогичный методу Абелеса [1]. Это позволило одинаково легко рассмотреть как одноосные, так и двухосные кристаллы с произвольной ориентацией главных осей тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} .

Рассмотрим систему плоскопараллельных однородных слоев двухосных кристаллов на анизотропной (тоже, в общем случае, двухосной) подложке. В каждой однородной среде главные оси соответствующего тензора ϵ_{ik} ориентированы произвольно. Предполагается, что рассматриваемая система не обладает естественной оптической активностью, а главные оси тензора проводимости совпадают с главными осями тензора диэлектрической проницаемости.

Из уравнений Максвелла для монохроматической волны ($\mu=1$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -ix_0 \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = ix_0 \mathbf{D}, \quad (2)$$

где $\alpha_0 = \omega/c$, следует хорошо известное волновое уравнение

$$\Delta E - \text{grad div } E + \alpha_0^2 D = 0. \quad (3)$$

В дальнейшем будем учитывать, что зависимость общего поля, представляющего собой сумму плоских волн, от времени и координат x, y в каждой точке пространства дается множителем

$$\exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y), \quad (4)$$

что является следствием условий

$$k_x = \text{const} = k_{0x} = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_0} \sin \varphi_0, \quad k_y = \text{const}, \quad (5)$$

вытекающих из однородности в плоскости (x, y) . В рассматриваемом случае плоскость падения совпадает с плоскостью (x, z) (рис. 1), поэтому $k_y = 0$ и зависимость от координаты y исключается.

Рассмотрим уравнение (3) для j -го однородного анизотропного слоя (рис. 1) $z_{j-1} \leq z \leq z_j$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{ik}^{(j)}$.

Из z -составляющей этого уравнения находим

$$E_z = -\frac{\alpha_0^2}{f} (\varepsilon_{13}^{(j)} E_x + \varepsilon_{23}^{(j)} E_y) - \frac{ik_x}{f} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (6)$$

где

$$f = \alpha_0^2 \varepsilon_{33}^{(j)} - k_{0x}^2, \quad (7)$$

а элементы тензора $\varepsilon_{ik}^{(j)}$ относятся к координатной системе (x, y, z) . Расписывая x - и y -составляющие уравнения (3) и используя (6), приходим к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно E_x и E_y .

Линейно независимыми частными решениями этой системы, как можно показать, будут

$$e_x^{(m)} = \gamma_x^{(m)} \exp(-ik_{mz}^{(j)} z), \quad e_y^{(m)} = \exp(-ik_{mz}^{(j)} z) \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad (8)$$

$$\gamma_x^{(m)} = \frac{-(k_{mz}^{(j)})^2 f + \alpha_0^2 (\varepsilon_{22}^{(j)} - k_{0x}^2) - \alpha_0^4 \varepsilon_{23}^{(j)2}}{k_{mz}^{(j)} k_{0x} \alpha_0^2 \varepsilon_{23}^{(j)} - \alpha_0^2 (f \varepsilon_{12}^{(j)} - \alpha_0^2 \varepsilon_{13}^{(j)} \varepsilon_{23}^{(j)})}. \quad (9)$$

Здесь $k_{mz}^{(j)}$ — z -составляющие волновых векторов плоских волн в j -м однородном слое, определяемые с учетом условия $k_x = k_{0x}, k_y = 0$ (см. (5)) уравнением Френеля

$$\|\alpha_0^2 \varepsilon_{ik}^{(j)} - \delta_{ik} k^2 + k_i k_k\| = 0. \quad (10)$$

В качестве линейно независимых частных решений могут быть выбраны и другие функции

$$E_x^{(m)}, E_y^{(m)} \quad (m = 1, \dots, 4), \quad (11)$$

удовлетворяющие определенным граничным условиям и являющиеся линейными комбинациями найденных частных решений.

Общее решение системы имеет вид

$$E_x = \sum_{m=1}^4 c_m E_x^{(m)}, \quad E_y = \sum_{m=1}^4 c_m E_y^{(m)}. \quad (12)$$

Постоянные c_1, \dots, c_4 определяются из условий на верхней границе $z = z_j$ однородного слоя

$$\sum_m c_m E_x^{(m)}(z_j) = E_x(z_j), \quad \sum_m c_m E_y^{(m)}(z_j) = E_y(z_j), \quad (13)$$

$$\sum_m c_m E_x^{(m)'}(z_j) = E_x'(z_j), \quad \sum_m c_m E_y^{(m)'}(z_j) = E_y'(z_j). \quad (14)$$

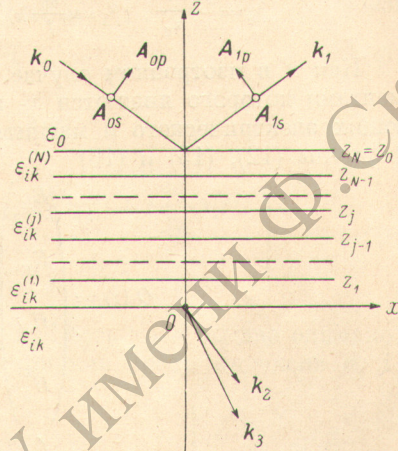


Рис. 1. Схематическое изображение отражающей системы.

Тангенциальная составляющая электрического поля с компонентами E_x и E_y , очевидно, полностью определена в любой точке j -го однородного слоя соотношениями (12) и уравнениями (13) и (14). Компоненты H_x и H_y тангенциальной составляющей магнитного поля определенным образом выражаются через E_x и E_y . Из уравнения (1), используя (6), легко находим

$$H_x = \beta_0 E_y' = \sum_{m=1}^4 c_m H_x^{(m)}, \quad (15)$$

$$H_y = \beta_1 E_x + \beta_2 E_y + \beta_3 E_x' = \sum_{m=1}^4 c_m H_y^{(m)}, \quad (16)$$

$$H_x^{(m)} = \beta_0 E_y^{(m)'}, \quad H_y^{(m)} = \beta_1 E_x^{(m)} + \beta_2 E_y^{(m)} + \beta_3 E_x^{(m)'}, \quad (17)$$

где

$$\beta_0 = -\frac{i}{x_0}, \quad \beta_1 = \frac{x_0}{f} k_{0x} \varepsilon_{13}^{(j)}, \quad \beta_2 = \frac{x_0}{f} k_{0x} \varepsilon_{23}^{(j)}, \quad \beta_3 = i \frac{x_0}{f} \varepsilon_{33}^{(j)}. \quad (18)$$

Как и в изотропном случае, введем в рассмотрение столбец $Q(z)$, элементами которого являются x - и y -компоненты тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, и преобразуем его, используя формулы (12), (15) и (16)

$$Q(z) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_m c_m E_x^{(m)} \\ \sum_m c_m E_y^{(m)} \\ \sum_m c_m H_x^{(m)} \\ \sum_m c_m H_y^{(m)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$M = \begin{pmatrix} E_x^{(1)}, E_x^{(2)}, E_x^{(3)}, E_x^{(4)} \\ E_y^{(1)}, E_y^{(2)}, E_y^{(3)}, E_y^{(4)} \\ H_x^{(1)}, H_x^{(2)}, H_x^{(3)}, H_x^{(4)} \\ H_y^{(1)}, H_y^{(2)}, H_y^{(3)}, H_y^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Частные решения $E_x^{(m)}, E_y^{(m)}$ ($m=1, \dots, 4$) выберем так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям на верхней границе $z=z_j$ однородного слоя:

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(1)}(z_j) = 1, \quad E_x^{(2)}(z_j) = 0, \quad E_x^{(3)}(z_j) = 0, \quad E_x^{(4)}(z_j) = 0, \\ E_y^{(1)}(z_j) = 0, \quad E_y^{(2)}(z_j) = 1, \quad E_y^{(3)}(z_j) = 0, \quad E_y^{(4)}(z_j) = 0, \\ E_x^{(1)'}(z_j) = -\frac{\beta_1}{\beta_3}, \quad E_x^{(2)'}(z_j) = -\frac{\beta_2}{\beta_3}, \quad E_x^{(3)'}(z_j) = 0, \quad E_x^{(4)'}(z_j) = \frac{1}{\beta_3}, \\ E_y^{(1)'}(z_j) = 0, \quad E_y^{(2)'}(z_j) = 0, \quad E_y^{(3)'}(z_j) = \frac{1}{\beta_0}, \quad E_y^{(4)'}(z_j) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В этом случае постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 , определяемые из системы уравнений (13)–(14), запишутся

$$c_1 = E_x(z_j), \quad c_2 = E_y(z_j), \quad c_3 = H_x(z_j), \quad c_4 = H_y(z_j),$$

и уравнение (19) свяжет значения столбца Q на верхней ($z=z_j$) и нижней ($z=z_{j-1}$) границах j -го однородного слоя

$$Q(z_{j-1}) = M(z_{j-1}, z_j) Q(z_j), \quad (22)$$

где $M(z_{j-1}, z_j)$ — матрица (20), построенная на частных решениях, удовлетворяющих граничным условиям (21). Найдем явный вид этих частных решений, воспользовавшись простейшими линейно независимыми решениями (8)

$$E_x^{(m)} = \sum_{n=1}^4 \alpha_{mn} e_x^{(n)}, \quad E_y^{(m)} = \sum_{n=1}^4 \alpha_{mn} e_y^{(n)}. \quad (23)$$

Коэффициенты $\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{m4}$ ($m=1, 2, 3, 4$) легко находятся из системы четырех уравнений, возникающих из (23) в результате использования m -го столбца граничных условий (21).

В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(m)} &= \frac{1}{w_0} \sum_{n=1}^4 b_{mn} \gamma_x^{(n)} \exp [ik_{nz}^{(j)} (z_j - z)] \\ E_y^{(m)} &= \frac{1}{w_0} \sum_{n=1}^4 b_{mn} \exp [ik_{nz}^{(j)} (z_j - z)] \end{aligned} \right\} (m=1, \dots, 4), \quad (24)$$

где

$$w_0 = - (k_{1z}^{(j)} k_{2z}^{(j)} + k_{3z}^{(j)} k_{4z}^{(j)}) \gamma_{12} \gamma_{34} + (k_{1z}^{(j)} k_{3z}^{(j)} + k_{2z}^{(j)} k_{4z}^{(j)}) \gamma_{13} \gamma_{24} - (k_{1z}^{(j)} k_{4z}^{(j)} + k_{2z}^{(j)} k_{3z}^{(j)}) \gamma_{14} \gamma_{23}, \quad (25)$$

$$\gamma_{mn} = \gamma_x^{(m)} - \gamma_x^{(n)}, \quad (26)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{i, k, l=1}^4 \tau_{nikl} \gamma_{ik} A_{ikl}^{(m)}, \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ikl}^{(1)} &= -k_{iz}^{(j)} k_{kz}^{(j)} + i \frac{\beta_1}{\beta_3} k_{lz}^{(j)}, \quad A_{ikl}^{(2)} = k_{iz}^{(j)} k_{kz}^{(j)} \gamma_x^{(l)} + i \frac{\beta_2}{\beta_3} k_{lz}^{(j)}, \\ A_{ikl}^{(3)} &= ik_{lz}^{(j)} \frac{\gamma_x^{(l)}}{\beta_0}, \quad A_{ikl}^{(4)} = -i \frac{\beta_3}{\beta_3} k_{lz}^{(j)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь $\tau_{nikl}=0$, если среди индексов n, i, k, l есть хотя бы два одинаковых, и $\tau_{nikl}=(-1)^{\sigma_{nikl}}$ (σ_{nikl} — число беспорядков среди индексов n, i, k, l), если все индексы различны. Очевидно, в формуле (27) суммирование надо вести только по тем значениям i, k, l , которые удовлетворяют условию $i \neq k \neq l \neq n$.

Подставляя выражения (24) в матрицу (20) и полагая $z=z_{j-1}$, получаем матрицу j -го однородного анизотропного слоя

$$M_j(z_{j-1}, z_j) = M_j(z_j, z_{j-1}) = M_j(d_j), \quad (29)$$

которая связывает значения столбца Q на верхней и нижней границах этого слоя (см. уравнение (22)). Выпишем элементы $m_{ik}^{(j)}$ этой матрицы, вводя обобщенную запись,

$$m_{ik}^{(j)} = \frac{1}{w_0} \sum_{n=1}^4 b_{kn} g_{in} \exp (ik_{nz}^{(j)} d_j) \quad (i, k=1, \dots, 4), \quad (30)$$

$$g_{1n} = \gamma_x^{(n)}; \quad g_{2n} = 1; \quad g_{3n} = -i\beta_0 k_{nz}^{(j)}; \quad g_{4n} = \beta_1 \gamma_x^{(n)} + \beta_2 - i\beta_3 k_{nz}^{(j)} \gamma_x^{(n)}. \quad (31)$$

При $d_j=0$ матрица, очевидно, переходит в единичную.

Таким образом, получено выражение для матрицы однородного слоя, представляющего собой, в общем случае двухосный кристалл с произвольной ориентацией главных осей тензора диэлектрической проницаемости. Элементы тензора $\varepsilon_{ik}^{(j)}$, входящие в выражение для матрицы, относятся к координатной системе (x, y, z) (рис. 1). Выразим их через главные значения $\varepsilon_1^{(j)}, \varepsilon_2^{(j)}, \varepsilon_3^{(j)}$ тензора и углы Эйлера χ_j, θ_j, ν_j , определяющие ориентацию системы главных осей (ξ_j, η_j, ζ_j) относительно системы (x, y, z) (рис. 2).

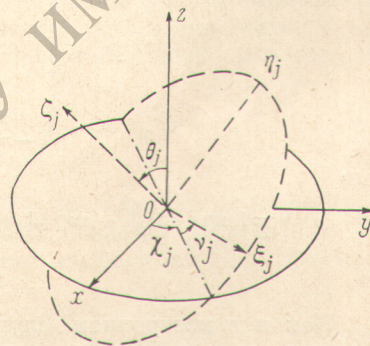


Рис. 2. Ориентация системы главных осей тензора диэлектрической проницаемости j -го слоя относительно координатной системы (x, y, z) , связанной с плоскостью падения.

Несложные вычисления приводят к результатам

$$\varepsilon_{11}^{(j)} = \varepsilon_1^{(j)} + (\varepsilon_2^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) (\cos \chi_j \sin \nu_j + \sin \chi_j \cos \theta_j \cos \nu_j)^2 + (\varepsilon_3^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) \sin^2 \chi_j \sin^2 \theta_j, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{12}^{(j)} = (\varepsilon_2^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) [\sin \chi_j \cos \chi_j (\sin^2 \nu_j - \cos^2 \theta_j \cos^2 \nu_j) - \cos 2\chi_j \cos \theta_j \sin \nu_j \cos \nu_j] - (\varepsilon_3^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) \sin \chi_j \cos \chi_j \sin^2 \theta_j, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{13}^{(j)} = (\varepsilon_2^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) (-\cos \chi_j \sin \nu_j - \sin \chi_j \cos \theta_j \cos \nu_j) \sin \theta_j \cos \nu_j + (\varepsilon_3^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) \sin \chi_j \sin \theta_j \cos \theta_j, \quad (34)$$

$$\varepsilon_{22}^{(j)} = \varepsilon_2^{(j)} + (\varepsilon_1^{(j)} - \varepsilon_2^{(j)}) (\sin \chi_j \cos \nu_j + \cos \chi_j \cos \theta_j \sin \nu_j)^2 + (\varepsilon_3^{(j)} - \varepsilon_2^{(j)}) \cos^2 \chi_j \sin^2 \theta_j, \quad (35)$$

$$\varepsilon_{23}^{(j)} = (\varepsilon_2^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) (-\sin \chi_j \sin \nu_j + \cos \chi_j \cos \theta_j \cos \nu_j) \sin \theta_j \cos \nu_j - (\varepsilon_3^{(j)} - \varepsilon_1^{(j)}) \cos \chi_j \sin \theta_j \cos \theta_j, \quad (36)$$

$$\varepsilon_{33}^{(j)} = \varepsilon_3^{(j)} + (\varepsilon_1^{(j)} - \varepsilon_3^{(j)}) \sin^2 \theta_j \sin^2 \nu_j + (\varepsilon_2^{(j)} - \varepsilon_3^{(j)}) \sin^2 \theta_j \cos^2 \nu_j. \quad (37)$$

Используя явный вид величин $k_{mz}^{(j)}$ ($m=1, \dots, 4$), являющихся (при $k_x = k_{0x}$, $k_y = 0$) корнями уравнения Френеля (10), и формулы (32)—(37), можно легко записать матрицу M_j (исходя из (30)) для любого частного случая. Предельный переход к изотропному случаю ($\varepsilon_1^{(j)} = \varepsilon_2^{(j)} = \varepsilon_3^{(j)}$) приводит к матрице M , элементы которой совпадают с элементами матриц Абелеса

$$M_j = \begin{pmatrix} a, & 0, & 0, & -\frac{g_j}{\varepsilon_j} b \\ 0, & a, & \frac{1}{g_j} b, & 0 \\ 0, & g_j b, & a, & 0 \\ \frac{\varepsilon_j}{g_j} b, & 0, & 0, & a \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где

$$a = \frac{1}{2} [\exp(-i\delta_j) + \exp(i\delta_j)], \quad b = \frac{1}{2} [\exp(-i\delta_j) - \exp(i\delta_j)], \quad \delta_j = \alpha_0 g_j d_j, \\ g_j = \sqrt{\varepsilon_j - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi_0}.$$

Как и в изотропном случае, вследствие непрерывности столбца $Q(z)$ на границе раздела однородных сред полная матрица для многослойной анизотропной отражающей системы представляет собой произведение матриц однородных слоев, образующих эту систему. Полная матрица связывает значение столбца Q на верхней границе подложки ($z=0$) со значением этого столбца на нижней границе прозрачной среды ($z=z_0$), из которой происходит падение света

$$Q(0) = M_{\text{полн.}} \cdot Q(z_0), \quad (39)$$

$$M_{\text{полн.}} = M_1(0, z_1) M_2(z_1, z_2) \dots M_N(z_{N-1}, z_0). \quad (40)$$

Для дальнейшего полную матрицу удобно представить в виде

$$M_{\text{полн.}} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad (41)$$

где h_i ($i=1, \dots, 4$) — i -тый столбец полной матрицы

$$h_i = \begin{pmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ m_{3i} \\ m_{4i} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Найдем выражения для отраженного от слоистой анизотропной системы и для прошедшего в анизотропную подложку электрических полей. Будем исходить из уравнения (39).

В среде (ε_0) общее поле складывается из падающей (E_0) и отраженной (E_1) волн

$$E = E_0 + E_1 = [(A_{0p} + A_{0s}) \exp(ik_{0z} \cdot z) + (A_{1p} + A_{1s}) \exp(-ik_{0z} \cdot z)] \times \exp(i\omega t - ik_{0x} \cdot x), \quad (43)$$

$$k_{0z} = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi_0 > 0.$$

Используя (43), распишем столбец $Q(z_0)$

$$Q(z_0) = \exp(i\omega t - ik_{0x}x) \begin{pmatrix} A_{0p} \cos \varphi_0 \exp(ik_{0z}d) - A_{1p} \cos \varphi_0 \exp(-ik_{0z}d) \\ A_{0s} \exp(ik_{0z}d) + A_{1s} \exp(-ik_{0z}d) \\ i\beta_0 k_{0z} (A_{0s} \exp(ik_{0z}d) - A_{1s} \exp(-ik_{0z}d)) \\ i\beta_{01} k_{0z} (A_{0p} \exp(ik_{0z}d) + A_{1p} \exp(-ik_{0z}d)) \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где $\beta_0 = -i/\alpha_0$, $\beta_{01} = i/\alpha_0 \cos \varphi_0$, $d \equiv z_0$.

В подложке (ε_{ik}) общее поле складывается из полей двух плоских волн с волновыми векторами k_2 и k_3

$$E = E_2 + E_3 = [A_2 \exp(-ik_{2z}z) + A_3 \exp(-ik_{3z}z)] \exp(i\omega t - ik_{0x}x). \quad (45)$$

Векторы k_2 и k_3 (их z -составляющие) находятся из уравнения Френеля (см. (10), в котором $\varepsilon_{ik}^{(j)}$ заменено на ε'_{ik}) при $k_x = k_{0x}$ и $k_y = 0$, причем выбираются те два решения (из четырех) этого уравнения, которые дают правильное направление распространения плоских волн в подложке. Электрическое поле каждой из плоских волн удовлетворяет системе уравнений [5]

$$\sum_{k=1}^3 (\alpha_0^2 \varepsilon'_{ik} - \delta_{ik} k_{2,3}^2 + k_{2,3} i k_{2,3}) E_{2,3k} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (46)$$

Определитель этой системы равен нулю (это дает уравнение Френеля), что обеспечивает существование нетривиального решения. Выбирая в качестве линейно независимых два первых уравнения системы (46), находим из них соотношения

$$E_{2(3)x} = \frac{1}{W_{2(3)}} f_{2(3)x} E_{2(3)z}, \quad E_{2(3)y} = \frac{1}{W_{2(3)}} f_{2(3)y} E_{2(3)z}, \quad (47)$$

$$f_{2(3)x} = \varepsilon'_{12} \varepsilon'_{23} - \left(\varepsilon'_{13} + \frac{k_{0x} k_{2(3)z}}{\alpha_0^2} \right) \left(\varepsilon'_{22} - \frac{k_{2(3)z}^2}{\alpha_0^2} \right), \quad (48)$$

$$f_{2(3)y} = \varepsilon'_{12} \left(\varepsilon'_{13} + \frac{k_{0x} k_{2(3)z}}{\alpha_0^2} \right) - \varepsilon'_{23} \left(\varepsilon'_{11} - \frac{k_{2(3)z}^2}{\alpha_0^2} \right), \quad (49)$$

$$W_{2(3)} = \left(\varepsilon'_{11} - \frac{k_{2(3)z}^2}{\alpha_0^2} \right) \left(\varepsilon'_{22} - \frac{k_{2(3)z}^2}{\alpha_0^2} \right) - \varepsilon_{12}^2. \quad (50)$$

Используя выражения (45), (47), (48) и (49), распишем столбец $Q(0)$

$$Q(0) = \exp(i\omega t - ik_{0x}x) \begin{pmatrix} \frac{1}{W_2} f_{2x} A_{2z} + \frac{1}{W_3} f_{3x} A_{3z} \\ \frac{1}{W_2} f_{2y} A_{2z} + \frac{1}{W_3} f_{3y} A_{3z} \\ -\frac{i}{W_2} \beta_0 k_{2z} f_{2y} A_{2z} - \frac{i}{W_3} \beta_0 k_{3z} f_{3y} A_{3z} \\ \frac{1}{W_2} b_2 A_{2z} + \frac{1}{W_3} b_3 A_{3z} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

$$b_{2(3)} = \beta'_1 f_{2(3)x} + \beta'_2 f_{2(3)y} - i\beta'_3 k_{2(3)z} f_{2(3)x}, \quad (52)$$

$$\beta'_1 = \frac{\alpha_0 k_{0x} \varepsilon'_{13}}{\alpha_0^2 \varepsilon'_{33} - k_{0x}^2}, \quad \beta'_2 = \frac{\alpha_0 k_{0x} \varepsilon'_{23}}{\alpha_0^2 \varepsilon'_{33} - k_{0x}^2}, \quad \beta'_3 = \frac{i\alpha_0 \varepsilon'_{33}}{\alpha_0^2 \varepsilon'_{33} - k_{0x}^2}. \quad (53)$$

Уравнение (39) после подстановки в него выражений (44) и (51) сводится к системе из четырех линейных уравнений с неизвестными амплитудами A_{1p} , A_{1s} , A_{2z} , A_{3z} . Решая эту систему, находим

$$A_{1p} = \frac{1}{W} \exp(2ik_{0z}d) (W_{pp}A_{0p} + W_{ps}A_{0s}), \quad (54)$$

$$A_{1s} = \frac{1}{W} \exp(2ik_{0z}d) (W_{sp}A_{0p} + W_{ss}A_{0s}), \quad (55)$$

$$A_{2(3)z} = \frac{1}{W} \exp(ik_{0z}d) (W_{2(3)p}A_{0p} + W_{2(3)s}A_{0s}), \quad (56)$$

где W , W_{pp} , W_{ps} , W_{sp} , W_{ss} , $W_{2(3)p}$, $W_{2(3)s}$ — определители четвертого порядка

$$W_{pp} = \|F_2; F_3; H_{14}^{(+)}; H_{23}^{(-)}\|, \quad W_{ps} = 2i\beta_0 k_{0z} \|F_2; F_3; h_2; h_3\|, \quad (57)$$

$$W_{sp} = 2i\beta_{01} k_{0z} \cos \varphi_0 \|F_2; F_3; h_1; h_4\|, \quad W_{ss} = \|F_2; F_3; H_{14}^{(-)}; H_{23}^{(+)}\|, \quad (58)$$

$$W = \|F_2; F_3; H_{14}^{(-)}; H_{23}^{(-)}\|, \quad W_{2(3)s} = \pm 2i\beta_0 k_{0z} \|W_{2(3)} F_{3(2)}; H_{14}^{(-)}; h_2; h_3\|, \quad (59)$$

$$W_{2(3)p} = \pm 2i\beta_{01} k_{0z} \cos \varphi_0 \|W_{2(3)} F_{3(2)}; h_1; h_4; H_{23}^{(-)}\|. \quad (60)$$

Здесь h_i ($i=1, \dots, 4$) — i -тый столбец полной матрицы (см. (41), (42)), $H_{14}^{(\pm)}$, $H_{23}^{(\pm)}$, F_2 , F_3 — столбцы следующего вида:

$$\begin{aligned} H_{14}^{(\pm)} &= h_1 \cos \varphi_0 \pm i\beta_{01} k_{0z} h_4, \\ H_{23}^{(\pm)} &= \pm h_2 \pm i\beta_0 k_{0z} h_3, \end{aligned} \quad F_{2(3)} = \begin{pmatrix} f_{2(3)x} \\ f_{2(3)y} \\ -i\beta_0 k_{2(3)z} f_{2(3)y} \\ b_{2(3)} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Верхний знак в выражениях для $W_{2(3)s}$ и $W_{2(3)p}$ относится к W_{2s} и W_{2p} , нижний — к W_{3s} и W_{3p} .

Что касается выражений для x и y -составляющих электрического поля в прошедших в подложку плоских волнах, то они легко находятся из (47) с использованием выражений (56).

Развитый здесь матричный метод для анизотропных слоистых сред позволяет решить ряд задач, имеющих отношение к эллипсометрии анизотропных сред.

Литература

- [1] F. Abelés. Ann. de Phys., 5, 596, 706, 1950.
- [2] S. Teitler, B. W. Henvis. J. Opt. Soc. Am., 60, 830, 1970.
- [3] D. W. Berge man. J. Opt. Soc. Am., 62, 502, 1972.
- [4] И. М. Минков. Опт. и спектр., 37, 309, 1974.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.

Поступило в Редакцию 30 декабря 1974 г.