УДК 535.2+548.0

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ИСТОЧНИКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ КРИСТАЛЛА

К. А. Барсуков и *В. А. Гвоздев*

Рассмотрена задача об излучении источника, движущегося под произвольным углом к оси прозрачного одноосного кристалла. Исследуются выражения для потерь на излучение точечного осциллятора и заряженной частицы. Показано, что в области частот, где параллельная оси кристалла компонента тензора диэлектрической проницаемости отрицательна, спектральное распределение энергии излучения существенно зависит от параметра, ограничивающего применимость макроскопической электродинамики.

Излучение возбужденного атомарного пучка в преломляющих анизотропных средах обладает многими интересными особенностями. К ним можно отнести аномальный и обращенный эффекты Допплера, возможность получения инверсно заселенного пучка и т. п. [1–4, 6–8]. Обычно все эти явления исследуются при движении источников излучения по оси кристалла. Ниже на сравнительно простой модели точечного осциллятора рассматривается излучение при движении источника под произвольным углом к оптической оси одноосного кристалла.

Пусть точечный осциллятор с единственной собственной частотой ω_0 и имеющий только электрический момент $\mathbf{p}_0 \cos \omega_0 t$ движется прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ под произвольным углом к оптической оси кристалла. Неподвижную систему координат выберем так, чтобы оптическая ось совпадала с осью z, а траектория движения осциллятора лежала бы в плоскости xoz. Для простоты будем считать также, что вектор скорости совпадает по направлению с электрическим моментом осциллятора. При сделанных предположениях плотность тока может быть записана в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{p}_0 \frac{d}{dt} [\cos \omega_0 t \delta (x - v \sin \alpha t) \delta (y) \delta (z - v \cos \alpha t)], \tag{1}$$

где α — угол между траекторией и осью z. Разложение по плоским волнам полей излучения позволяет получить из уравнений Максвелла для компонент напряженности электрического поля следующие выражения:

$$E_j = \frac{1}{4\pi^2 v} \int d\omega \int k_0^2 T_{ji}^{-1} p_{0i} \delta (k_z \cos \alpha + k_x \sin \alpha - \varkappa)\, e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} d\mathbf{k}, \tag{2}$$

где $k_0 = \omega/c$, $i, j = x, y, z$, $\varkappa = (\omega \pm \omega_0)/v$, k_i — проекции волнового вектора на координатные оси, ε_1 и ε_2 — диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости кристалла, а тензор T_{ij} имеет вид

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} k^2 - k_x^2 - k_0^2\varepsilon_1 & -k_x k_y & -k_x k_z \\ -k_x k_y & k^2 - k_y^2 - k_0^2 \varepsilon_1 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - k_z^2 - k_0^2 \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Потери на излучение будем считать по тормозящей силе, действующей на осциллятор со стороны излученного поля. С помощью (2) и (3), учитывая (1), энергетические потери на единице длины пути определятся выражением

$$\frac{dW}{dr} = \mathrm{Re}\,\frac{ip_0^2}{4\pi^2 v^2}\int \omega d\omega \int \frac{F(\omega,\ k)\,\delta(k_z\cos\alpha + k_x\sin\alpha - \varkappa)\,d\mathbf{k}}{(k^2 - k_0^2\varepsilon_1)(\varepsilon_1 k_x^2 + \varepsilon_1 k_y^2 + \varepsilon_2 k_z^2 - k_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2)}, \tag{4}$$

$$F(\omega,\ \mathbf{k}) = (k_k^2 + k_z^2 - k_0^2\varepsilon_1)\,[k_0^2(\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha) - \varkappa^2] - k_y^2(k_0^2\varepsilon_1 - \varkappa^2).$$

Из вида δ-функции следует, что вклад в излучение дают допплеровские частоты, определяемые хорошо известной формулой

$$\frac{\omega \pm \omega_0}{v} = k_0\cos(\widehat{\mathbf{k},\ \mathbf{v}}). \tag{5}$$

Производя интегрирование в (4) по волновым векторам с учетом свойств δ-функции и действительности энергии излучения, для $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ получим

$$\frac{dW}{dr} = \frac{p_0^2}{4v^4}\Bigg[\beta\int\frac{\omega^2}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\omega\beta\sqrt{\varepsilon_1} - |\omega \pm \omega_0|\right)d\omega + \\ + \int\left(\frac{\beta\,|\omega\pm\omega_0|\,\omega}{\sqrt{\varepsilon_1}} - \frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha)}}\right)\omega d\omega\Bigg], \tag{6}$$

где $\beta = v/c$. Области интегрирования первого и второго интегралов определяются соответственно неравенствами

$$\frac{|\omega\pm\omega_0|}{\beta\sqrt{\varepsilon_1}} < \omega < \frac{|\omega\pm\omega_0|}{\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha},\quad \frac{|\omega\pm\omega_0|}{\beta\sqrt{\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha}} < \omega < \frac{|\omega\pm\omega_0|}{\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha}. \tag{7}$$

В области частот

$$\omega > \frac{|\omega\pm\omega_0|}{\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha} \tag{8}$$

выражение для потерь на излучение имеет вид

$$\frac{dW}{dr} = \frac{p_0^2}{4v^4}\left[(1-\cos\alpha)\,\beta^2\int\omega^3 d\omega + \int\left(\omega^2\beta^2\cos\alpha - \frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\sin^2\alpha)}}\right)\omega d\omega\right]. \tag{9}$$

Знак ($\pm$) в (6) и (9) означает фактически, что имеется сумма двух слагаемых, одно из которых берется с ($-\omega_0$), а другое с ($+\omega_0$) (нормальная и аномальная части допплеровского спектра). Области интегрирования выбираются аналогично: для слагаемых с ($-\omega_0$) в (7) и (8) берется нижний знак, для слагаемых с ($+\omega_0$) — верхний.

Формулы (6) и (9) являются обобщением выражений для потерь на излучение при движении источника вдоль оси кристалла и при $\alpha=0$ получаем известное выражение для потерь на допплеровское излучение [1]. При замене $p_0 = 2ve/\omega$ и $\omega_0 = 0$ получаем из (6) и (9) выражение для потерь на черенковское излучение заряженной частицы, которое согласуется с результатами работы [5]. При $\alpha \neq 0$ в излучении появляются обыкновенные волны с показателем преломления $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$, которые не возбуждаются при движении источника вдоль оси. Это объясняется наличием составляющей электрического вектора по скорости источника. Потери на излучение обыкновенных волн представлены в (6) и (9) первыми слагаемыми.

В случае движения заряженной частицы спектр излучения обыкновенных волн определяется условием

$$\cos(\widehat{\mathbf{k},\ \mathbf{v}}) = \frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_1}}. \tag{10}$$

Угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ в нашей системе координат равен

$$\cos(\widehat{\mathbf{k},\ \mathbf{v}}) = \cos\alpha\cos\Theta + \cos\varphi\sin\alpha\sin\Theta,$$

где Θ и φ — полярный и азимутальный углы, определяющие направление волнового вектора. Перепишем (10) в виде

$$\cos\Theta + \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha \sin\Theta = \frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha}.$$

Из этой формулы видно, что $\cos\varphi < 0$ только при $\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha > 1$, т. е. когда условие возникновения черенковского излучения выполняется для проекции скорости движения заряда на оптическую ось. Энергетические потери на излучение обыкновенных волн различны для частот в областях $\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha > 1$ и $\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha < 1$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{e^2}{v^2}\beta\int\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}(\beta\sqrt{\varepsilon_1} - 1)\,\omega d\omega \quad \text{при} \quad 1 < \beta\sqrt{\varepsilon_1} < \frac{1}{\cos\alpha}, \tag{11}$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{e^2}{v^2}(1-\cos\alpha)\beta^2\int\omega d\omega \quad \text{при} \quad \beta\sqrt{\varepsilon_1} > \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{12}$$

Отсюда видно, что направление волнового вектора вдоль оптической оси является критическим (в том смысле, что меняется выражение для энергии излучения). Это объясняется тем, что электрический вектор обыкновенных волн всегда лежит в плоскости xoy и при $\Theta=0$ фронт волны параллелен направлению тока. В этом случае скорость распространения волны совпадает со скоростью изменения j_x в направлении распространения. Следует иметь в виду также то, что неравенство $\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha > 1$ выполняется для углов α, не слишком близких к $\pi/2$ и для больших показателей преломления. Заметим, что частотное распределение энергии излучения в этом случае получается таким же, как для изотропного случая с точностью до постоянного множителя $(1-\cos\alpha)$.

Для представления об угловом распределении энергии, теряемой на излучение обыкновенных волн, приведем выражение для потока излученной энергии

$$\frac{dW}{dr} = \frac{e^2\sin^2\alpha}{2\pi c^2}\int(\beta^2\varepsilon_1 - 1)\,\omega d\omega\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi' d\varphi'}{\beta^2\varepsilon_1 - (\sqrt{\beta^2\varepsilon_1 - 1}\cos\varphi'\sin\alpha - \cos\alpha)^2}, \tag{13}$$

где $\varphi' = \operatorname{ar\,ctg}\dfrac{y}{x\cos\alpha - z\sin\alpha}$. Интегрирование по φ' дает либо (11), либо (12), в зависимости от величины выражения $\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha$.

Условие возникновения черенковского излучения для необыкновенных волн с показателем преломления $n_2 = \left(\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\sin^2\Theta + \varepsilon_2\cos^2\Theta}\right)^{1/2}$ определяется неравенством [5]

$$\beta\sqrt{\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha} > 1.$$

Направление распространения вдоль оптической оси для необыкновенных волн также является критическим — выражения для энергии излучения различны внутри и вне конуса $(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{v}}) = \alpha$.

Аналогично получается выражение для потерь в случае, когда $\varepsilon_2 < 0$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{p_0^2}{4v^4}\left[\beta\int\frac{\omega^2}{\sqrt{\varepsilon_1}}(\omega\beta\sqrt{\varepsilon_1} - |\omega \pm \omega_0|)\,d\omega + \right.$$

$$\left. + \int\left(\frac{(\omega \pm \omega_0)^2}{\sqrt{\varepsilon_1}(\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha)} - \beta^2\omega^2\cos^2\alpha\right)\omega d\omega\right], \tag{14}$$

где области интегрирования определяются соответственно неравенствами

$$\omega\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha < |\omega \pm \omega_0| < \omega\beta\sqrt{\varepsilon_1}, \quad \omega\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha < |\omega \pm \omega_0|. \tag{15}$$

В других областях

$$|\omega \pm \omega_0| < \omega\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha, \quad \omega\beta\sqrt{\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha} < |\omega \pm \omega_0| < \omega\beta\sqrt{\varepsilon_1}\cos\alpha \tag{16}$$

получаем

$$\frac{dW}{dr}=\frac{p_0^2}{4v^4}\Big[(1-\cos\alpha)\,\beta^2\int\omega^3 d\omega+$$

$$+\int\left(\frac{(\omega\pm\omega_0)^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\,(\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\sin^2\alpha)}-\frac{\beta\omega\,|\,\omega\pm\omega_0\,|}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)\omega d\omega\Big]. \qquad (17)$$

Выражения (14) и (17) справедливы при условии

$$\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\sin^2\alpha>0, \qquad (18)$$

которое означает, что траектория движения не должна выходить за пределы конуса с углом $\alpha_0=\operatorname{arctg}|\varepsilon_1/\varepsilon_2|$. Смысл неравенств (15) и (16) оказывается следующим. Показатель преломления необыкновенной волны будет действительным внутри конуса с углом $\Theta_0=\operatorname{arctg}|\varepsilon_1/\varepsilon_2|$ и (15), (16) определяют те направления волновых векторов, которые лежат внутри этого конуса, а направления соответствующих групповых скоростей внутри конуса с углом $\alpha_0=\operatorname{arctg}|\varepsilon_1/\varepsilon_2|$.

Перейдем к вычислению потерь в случае

$$\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\sin^2\alpha<0, \qquad (19)$$

когда траектория движения источника лежит вне конуса с углом $\alpha_0=$ $=\operatorname{arctg}|\varepsilon_1/\varepsilon_2|$. Потери на излучение обыкновенных волн будут такими же, как и в случае (18), и определяются первыми слагаемыми в (14) и (17). Потери на излучение необыкновенных волн можно записать в виде

$$\frac{dW}{dr}=\frac{p_0^2}{4\pi v^2}\int\frac{k_0\omega}{\varepsilon_1}\,d\omega\int\frac{(\varkappa n'-\varepsilon_1 k_0\cos\alpha)^2\,dn'}{(n'^2-\varepsilon_1)\sqrt{A(n')}}, \qquad (20)$$

$$A(n')=\frac{k_0^2}{\varepsilon_1}\Delta^2 n'^2+2n'k_0\varkappa\cos\alpha+(k_0^2\varepsilon_2\sin^2\alpha-\varkappa^2),$$

где $n'=n_2\cos\Theta$, $\Delta^2=-\varepsilon_1\cos^2\alpha-\varepsilon_2\sin^2\alpha>0$. Интегрирование по n' в (20) следует проводить, вообще говоря, в областях

$$-\infty<n'<n_1',\quad n_2'<n'<+\infty,$$

где n_1' и n_2' — корни квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе подынтегрального выражения под корнем. Легко видеть, что выражение (20) логарифмически расходится на бесконечности. Расходимость возникла из-за обращения показателя преломления в бесконечность при $\varepsilon_1\sin^2\Theta+$ $+\varepsilon_2\cos^2\Theta=0$. Очевидно, что при интегрировании нельзя подходить слишком близко к углам, определяемым этим условием, так как большие показатели преломления соответствуют малым значениям длин волн, для которых макроскопическая электродинамика оказывается непригодной. Ограничиваясь некоторым предельным значением $n'=n_m'$, получим из (20) спектральное распределение энергии излучения необыкновенных волн

$$\frac{dW}{dr}=\frac{p_0^2}{2\pi v^2}\int\frac{\varkappa^2\omega}{\sqrt{\varepsilon_1}\Delta}\ln\frac{\frac{\Delta^2}{\varepsilon_1}k_0 n_m'+|\varkappa|\cos\alpha+\sqrt{A(n_m')}}{\sin\alpha\sqrt{-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(k_0^2\Delta^2+\varkappa^2)}}\,d\omega, \qquad (21)$$

причем область интегрирования определяется неравенством (19).

Литература

[1] К. А. Барсуков. ЖЭТФ, *36*, 1485, 1959.
[2] К. А. Барсуков. ЖТФ, *32*, 161, 1962.
[3] Б. М. Болотовский. Усп. физ. наук, *62*, 201, 1957.
[4] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук, *69*, 537, 1959.
[5] А. Б. Куканов. Опт. и спектр., *19*, 121, 1963.
[6] А. Г. Ситенко, А. А. Коломенский. ЖЭТФ, *30*, 511, 1956.
[7] И. М. Франк. Изв. АН СССР, сер. физ., *6*, 3, 1942.
[8] И. М. Франк. ЖЭТФ, *36*, 823, 1959.

Поступило в Редакцию 15 сентября 1975 г.