Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

Математика

УДК 512.542

О пересечении A-допустимых подгрупп, не сопряжённых с данной

Р.В. Бородич

Устанавливаются свойства подгруппы, равной пересечению всех A-допустимых подгрупп, не сопряженных с некоторой фиксированной подгруппой.
Ключевые слова: Группа операторов, подгрупповой функтор.

The properties of a subgroup equal to the intersection of all A-admissible subgroups, not conjugate to some fixed subgroup are established.
Keywords: Group of operators, subgroup functor.

1. Введение. Все рассматриваемые в работе группы конечны. Теория пересечений максимальных подгрупп восходит к работе Фраттини [1]. Теорема Фраттини получила развитие во многих направлениях и, в частности, в работе В.Гашюца [2], где исследовалось пересечение $\Delta(G)$ всех абнормальных максимальных подгрупп группы G. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографию М.В. Селькина [3]). В данной работе рассматриваются свойства подгруппы, близкой к подгруппе $\Delta(G)$.

2. Определения и обозначения. Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [4] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

В дальнейшем для каждой группы G будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Обозначим через $\Phi(G,A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп.

Пусть θ_1 – подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу, тогда $\bar{\theta}_1(G)$ – объединение $\{G\}$ и множества всех подгрупп группы G, которые не сопряжены с некоторой фиксированной подгруппой N группы G, θ – произвольный подгрупповой функтор. Рассмотрим функтор $\bar{\theta}_1 \cap \theta$, выделяющий в каждой группе все θ-подгруппы, не сопряжённые с данной подгруппой, выделяемой функтором θ_1. В настоящей статье рассмотрим действие построенного подгруппового функтора на максимальных A-допустимых подгруппах группы G. Соответствующую обобщенную подгруппу Фраттини обозначим через $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)$. В случае, когда θ выделяет в группе все подгруппы, $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)$ будем обозначать через $\Phi_{\bar{\theta}_1}(G,A)$. Если θ выделяет в группе все абнормальные подгруппы, $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)$ будем обозначать через $\Delta_{\bar{\theta}_1}(G,A)$. В случае, когда группа операторов A единична, то соответствующие подгруппы будем обозначать $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G)$, $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G)$, $\Delta_{\bar{\theta}_1}(G)$ [5].

3. Вспомогательные результаты.

3.1. Лемма [6, с. 179]. *Если подгруппа H пронормальна в G, то подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G.*

3.2 Лемма [7, с. 64]. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$. Если G обладает свойством C_π, то G содержит A-допустимую S_π-подгруппу.*

3.3 Лемма [8, с. 26]. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Если K – A-допустимая подгруппа группы G, то $N_G(K)$ является A-допустимой подгруппой группы G.*

4. Основные результаты.

4.1 Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа $\Phi_\theta(G,A)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $p\in\pi(\Phi_\theta(G,A))$. По лемме 3.2 в $\Phi_\theta(G,A)$ существует A-допустимая p-силовская подгруппа P. По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\Phi_\theta(G,A).$$

По лемме 3.3 подгруппа $N_G(P)$ A-допустима. Если $N_G(P)=G$, то P нормальна в G, а значит, нормальна и в $\Phi_\theta(G,A)$. Пусть $N_G(P)\neq G$, тогда по лемме 3.1 $N_G(P)$ является абнормальной подгруппой. Следовательно, $N_G(P)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой Θ-подгруппе M. Из леммы Фраттини и определения $\Phi_\theta(G,A)$ следует, что $\Phi_\theta(G,A)\subseteq M$, а значит, $M=G$. Получили противоречие с предположением. Итак, любая силовская подгруппа из $\Phi_\theta(G,A)$ нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа $\Phi_\theta(G,A)$ нильпотентна. Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

4.2 Теорема. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в любой группе* G *существует такая нормальная* p*-подгруппа* P*, что* $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)/P\subseteq\Phi_\theta(G/P,A)$.

Доказательство. Пусть P – A-допустимая силовская p-подгруппа подгруппы $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)$, не содержащаяся в максимальной A-допустимой $\theta_1\cap\theta$-подгруппе M. Предположим, что P не нормальна в G. По лемме Фраттини $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)N_G(P)=G$. Так как $N_G(P)$ – абнормальная A-допустимая подгруппа группы G, а θ – абнормально полный m-функтор, то существует максимальная A-допустимая θ-подгруппа группы G, содержащая $N_G(P)$. Обозначим её через K. Тогда $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)K=G$. Так как $|G:M|\neq|G:K|$, то K не сопряжена с M в G. Следовательно, $K\supseteq\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)$. Тогда $K=G$. Противоречие. Остаётся заключить, что P – нормальная p-подгруппа группы G.

Так как M ЫP, то несложно заметить, что

$$\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G,A)/P\subseteq\Phi_\theta(G/P,A).$$

Теорема доказана.

4.2.1 Следствие. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Тогда в любой группе* G *существует такая нормальная* p*-подгруппа* P*, что* $\Phi_{\bar{\theta}_1}(G,A)/P\subseteq\Phi_\theta(G/P,A)$.

4.2.2 Следствие. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$. *Тогда в любой группе* G *существует такая нормальная* p*-подгруппа* P*, что* $\Delta_{\bar{\theta}_1}(G,A)/P\subseteq\Delta_\theta(G/P,A)$.

4.2.3 Следствие. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда в любой группе подгруппа, равная пересечению всех абнормальных максимальных* A*-допустимых подгрупп, не сопряжённых с данной абнормальной максимальной* A*-допустимой подгруппой, метанильпотентна.*

4.2.4 Следствие. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, *тогда в любой группе подгруппа, равная пересечению всех максимальных* A*-допустимых подгрупп, не сопряжённых с данной максимальной* A*-допустимой подгруппой, метанильпотентна.*

4.2.5 Следствие. *Пусть* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в любой группе* G *существует такая нормальная* p*-подгруппа* P*, что* $\Phi_{\bar{\theta}_1\cap\theta}(G)/P\subseteq\Phi_\theta(G/P)$.

4.2.6 Следствие. *В любой группе* G *существует такая нормальная* p*-подгруппа* P*, что* $\Phi_{\bar{\theta}_1}(G)/P\subseteq\Phi_\theta(G/P)$.

4.2.7 Следствие. *В любой группе* G *существует такая нормальная* p*-подгруппа* P*, что* $\Delta_{\bar{\theta}_1}(G)/P\subseteq\Delta_\theta(G/P)$.

4.2.8 Следствие. *В любой группе подгруппа, равная пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп, не сопряжённых с данной абнормальной максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

4.2.9 Следствие. *В любой группе подгруппа, равная пересечению всех максимальных подгрупп, не сопряжённых с данной максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. :Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

5. Бородич, Р.В. О пересечении максимальных подгрупп, не сопряженных с данной максимальной подгруппой / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 189–190.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

7. Поляков, Л.Я. О конечных группах с заданной группой операторов / Л.Я. Поляков // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 63–67.

8. Gorenshtein, D. Finite groups / D. Gorenshtein. – New York : Harper and Row, 1968. – 572 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 29.09.2017