

1) если $\bar{\chi}_0 \geq 0$ и $\bar{\chi}_1 > 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно выполнения условий вида (25), и при выполнении этих условий общее решение задачи $K_{2,M}$ задается формулой (26), причем оно линейно зависит $\bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2 - r$ от произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы ($0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_0 + \bar{\chi}_1 + 2\}$);

2) если $\bar{\chi}_0 > 0$ и $\bar{\chi}_1 < 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий вида (27) и (25), и при выполнении этих условий общее решение задачи можно задать формулой (26), причем оно линейно зависит от $\bar{\chi}_0 + 1 - r$ произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы ($0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_0 + 1\}$);

3) если же $\bar{\chi}_0 < 0$ и $\bar{\chi}_1 \geq 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий вида (19) и (25), и при выполнении этих условий общее решение задачи можно задать формулой (26), причем оно линейно зависит от $\bar{\chi}_1 + 1 - r$ произвольных действительных постоянных, где r – ранг определенной матрицы ($0 < r < \min\{4, \bar{\chi}_1 + 1\}$);

4) наконец, если $\bar{\chi}_0 < 0$ и $\bar{\chi}_1 < 0$, то для разрешимости задачи $K_{2,M}$ необходимо и достаточно одновременного выполнения условий (19), (27), (25), и при выполнении указанных условий она будет иметь единственное решение, задаваемое формулой (26).

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Расулов К. М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск, 1998.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.
4. Расулов К. М., Фатулаев Б. Ф. // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: Межвуз. сб. науч. тр. Смоленск, 1999. С. 70.
5. Бицадзе А. В. Основы теории функций комплексного переменного. М., 1984.

Поступила в редакцию 30.03.2000

Зверович Эдмунд Иванович – доктор физико-математических наук.
Фатулаев Буба Фатулаевич – кандидат физико-математических наук (Смоленский государственный педагогический университет).

УДК 517.977

Е. А. РУЖИЦКАЯ

СТАБИЛИЗАЦИЯ В БОЛЬШОМ МАЯТНИКА В ВЕРХНЕМ ПОЛОЖЕНИИ

The stabilization method of nonlinear model of the turned pendulum is described. The results are illustrated by numerical accounts.

1. Постановка задачи. Уравнение движения маятника с учетом действующего на него момента имеет вид:

$$\ddot{x} + \sin x = u. \quad (1)$$

Пусть управление $u(t)$, $t > 0$, ограничено: $|u(t)| < L$, $t > 0$ ($0 < L < \infty$).

Задача стабилизации: при выбранных $0 < L < \infty$, области $G \subset R^2$, $(x = \pi, \dot{x}_0 = 0) \in G$, найти дискретную обратную связь

$$u = u(x, \dot{x}), |u(x, \dot{x})| < L, (x, \dot{x}) \in G, (u(\pi, 0) = 0), \quad (2)$$

при которой решение $x(t) = \pi$, $\dot{x}(t) = 0$, $t > 0$, замкнутой системы

$$\ddot{x} + \sin x = u(x, \dot{x}) \quad (3)$$

асимптотически устойчиво в G . Функцию (2) назовем ограниченной стабилизирующей обратной связью.



С точки зрения приложений важно, чтобы: 1) область притяжения G состояния $(\pi, 0)$ была достаточно большой, 2) переходные процессы в замкнутой системе (5) были в некотором смысле близки к оптимальным. Для линейных систем метод построения ограниченных стабилизирующих обратных связей, обладающих перечисленными свойствами, предложен в [1]. Обобщим его на нелинейную систему (1).

Заменим нелинейную характеристику $\sin x$ системы (1) на периодическую кусочно-линейную функцию $f(x)$: $f(x)=x$ при $|x|<\pi/2$, $f(x)=-\pi-x$ при $-3\pi/2<x<-\pi/2$, $f(x)=\pi-x$ при $\pi/2<x<3\pi/2$. (На множество $|x|>3\pi/2$ функцию $f(x)$ продолжим периодически.)

Систему управления

$$\dot{x} + f(x) = u \quad (4)$$

назовем кусочно-линейной, аппроксимирующей систему (1).

Определим класс дискретных программных управлений с периодом квантования $\nu > 0$: $u(t) = u(m\nu)$, $t \in [m\nu, (m+1)\nu]$, $m = 0, 1, \dots$. Соответствующую дискретному управлению обратную связь будем обозначать через $u_\nu(x, x)$. Траекторию $x(t)$, $t \geq 0$, системы $\dot{x} + \sin x = u_\nu(x, x)$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, замкнутой дискретной обратной связью, определим как решение уравнения $\dot{x} + \sin x = u(t)$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $u(t) = u(k\nu)$, $t \in [k\nu, (k+1)\nu]$, $k = 0, 1, \dots$.

Выбрав параметр $\theta = N\nu$ (N – натуральное число), введем вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления кусочно-линейной системой в классе дискретных управлений

$$B_\theta(z) = \min \int_0^\theta |u(t)| dt, \quad \dot{x} + f(x) = u, \quad x(0) = z_1, \quad \dot{x}(0) = z_2, \quad (5)$$

$$x(\theta) = \pi, \quad \dot{x}(\theta) = 0, \quad |u(t)| < L, \quad t \in T = [0, \theta], \quad z = (z_1, z_2).$$

Обозначим: $u^0(t | z)$, $t \in T$ – оптимальное программное дискретное управление задачи (5), G_θ – множество начальных состояний z , для которых существует оптимальное программное управление.

Функцию $u_\nu^0(z_1, z_2) = u^0(0 | z)$, $z \in G_\theta$, назовем оптимальным стартовым управлением типа обратной связи.

Следуя [2], можно показать, что обратная связь

$$u_\nu(x, x) = u_\nu^0(x, x), \quad (x, \dot{x}) \in G_\theta, \quad (6)$$

является дискретной стабилизирующей ограниченной обратной связью для системы (4).

Пусть S – множество всех состояний, из которых можно за конечное время попасть в $(\pi, 0)$ с помощью управлений, ограниченных по модулю числом L . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число θ , что в ε -окрестности множества G_θ будет содержаться множество S .

Стабилизирующая обратная связь (6) обладает следующим экстремальным свойством. Пусть $x^*(t)$, $t \geq 0$, – траектория (переходный процесс) замкнутой кусочно-линейной системы (4): $\dot{x} + f(x) = u_\nu(x, x)$, $x(0) = x_0^*$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0^*$; $u_\nu^*(t) = u_\nu(x^*(t), \dot{x}^*(t))$, $t \geq 0$, – реализация обратной связи в этом процессе, $u^0(t | x_0^*, \dot{x}_0^*)$, $t \in T$, – оптимальное программное управление в задаче (5) при $z_1 = x_0^*$, $z_2 = \dot{x}_0^*$. Тогда

$$\int_0^\infty |u_\nu^*(t)| dt < \int_0^\theta |u^0(t | x_0^*, \dot{x}_0^*)| dt.$$

Если интерпретировать $|u(t)|$ как секундный расход топлива в момент времени t , то из последнего неравенства следует, что при выбранной об-

ратной связи (6) расход топлива на весь процесс стабилизации не превышает минимального его расхода на успокоение маятника за время θ .

Согласно (6) проблема построения ограниченной обратной связи сведена к реализации оптимальной обратной связи. Опишем алгоритм работы оптимального регулятора, который в каждом процессе стабилизации способен, не зная формулы (6), вычислять текущие сигналы обратной связи в режиме реального времени [3].

2. Стабилизация маятника без вращения. Пусть выбраны значения L, θ, v . Рассмотрим случай, когда оптимальная траектория задачи (5) на фазовой плоскости не совершает вращений и целиком проходит по двум областям: I – $|x| < \pi/2$; II – $\pi/2 < x < 3\pi/2$.

Тогда задача (5) в классе дискретных управлений примет вид:

$$B_{\theta}(z) = C(z, \theta, \theta_1^0) = \min_{u, \theta_1} \int_0^{\theta} |u(t)| dt,$$

$$x^1 + x^1 = u, x^1(0) = z_1, x^1(\theta) = z_2, t \in [0, \theta_1]; x^2 - x^2 + \pi = u, t \in [\theta_1, \theta]; \quad (7)$$

$$x^1(\theta_1) = \pi/2, x^2(\theta) = \pi, x^2(\theta) = 0; |u(t)| < L, \quad t \in T,$$

где $\theta_1^0 = \theta_1^0(x(0), \dot{x}(0))$ – оптимальный момент перехода траектории $x^0(t)$, $t \in T$, из области II в область I.

В задаче (7) все элементы известны, и поэтому для начального состояния $(x(0), \dot{x}(0))$ решим ее адаптивным (прямым или двойственным) методом [4], который, кроме оптимального программного управления $u^0(t|z)$, $t \in T$, доставит оптимальную опору $K_{on}^0(u)$. В соответствии с (7) значение $u^0(0|x(0), \dot{x}(0))$ используем в качестве начального сигнала $u^*(0) = u_v(x(0), \dot{x}(0))$ стабилизирующей обратной связи на промежутке времени $[0, v]$.

Предположим, что стабилизатор проработал на промежутке времени $[0, \tau = M]$ и замкнутая система в текущий момент времени τ оказалась в состоянии $(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$, $|x^*(\tau)| < \pi/2$ ¹. Чтобы вычислить текущее значение $u_v(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$ стабилизирующей обратной связи, стабилизатору нужно решить задачу (7) с $z = (x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$ с учетом того, что в предыдущий момент $\tau - v$, когда система (3) находилась в состоянии $(x^*(\tau - v), \dot{x}^*(\tau - v))$, он уже решил задачу (7) с $z = (x^*(\tau - v), \dot{x}^*(\tau - v))$, построив оптимальную опору $K_{on}^0(\tau - v)$ и вычислив оптимальный момент перехода $\theta^0(\tau - v)$. Задача (7) для соседних моментов τ и $\tau - v$ отличается только начальными условиями $(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$, $(x^*(\tau - v), \dot{x}^*(\tau - v))$, и это отличие тем меньше, чем меньше v . Поэтому наиболее эффективным методом решения задачи (7) с $z = (x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$ является двойственный метод [4] коррекции опоры $K_{on}^0(\tau - v)$, если дополнить его оптимизацией по параметру θ_1 , которую можно осуществить, например, направленным перебором, начиная со значения $\theta^0(\tau - v)$. Построив решение $u^0(t|x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$, $t \in [0, \theta]$, $K_{on}^0(\tau)$ задачи (7), $z_1 = x^*(\tau)$, $z_2 = \dot{x}^*(\tau)$, получим реализацию $u^*(\tau) = u^0(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau)) = u^0(0|x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$ обратной связи на промежутке $[\tau, \tau + v]$. Если время, не-

¹ Если $\pi/2 < x^*(\tau) < 3\pi/2$, то текущее значение обратной связи вычисляется по линейной модели

обходимое для коррекции опоры $K_{\tau}(\tau-v)$, а значит, и для вычисления $u^*(\tau)$, не превышает v , то можно говорить о стабилизации в режиме реального времени.

Пусть оптимальная траектория имеет другую структуру (с колебанием): $|x^0(t)| < \pi/2, t \in [0, \theta_1^0]; -3\pi/2 < x^0(t) < -\pi/2, t \in [\theta_1^0, \theta_2^0]; |x^0(t)| < \pi/2, t \in [\theta_2^0, \theta_3^0]; \pi/2 < x^0(t) < 3\pi/2, t \in [\theta_3^0, \theta]$. В этом случае решаем вспомогательную задачу с параметрами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$:

$$B_{\theta}(z) = C(z, \theta, \theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0) = \min_{u, \theta_1, \theta_2, \theta_3} \int_0^{\theta} u(t) dt, \quad x^1 + x^2 = u, \quad x^1(0) = z,$$

$$x^1(0) = z_2, \quad t \in [0, \theta_1]; \quad x^2 - x^1 - \pi = u, \quad t \in [\theta_1, \theta_2]; \quad \ddot{x}^3 + x^3 = u, \quad t \in [\theta_2, \theta_3];$$

$$x^4 - x^4 + \pi = u, \quad t \in [\theta_3, \theta]; \quad x^1(\theta_1) = -\pi/2, \quad x^2(\theta_2) = -\pi/2,$$

$$x^3(\theta_3) = \pi/2, \quad x^4(\theta) = \pi, \quad x^4(\theta) = 0; \quad |u(t)| < L, \quad t \in T.$$

Описанный алгоритм был реализован на ПЭВМ.

Влияние на поведение системы параметров θ, L и начального состояния $(x(0), x(0))$

θ (v)	Значения L ($x(0), x(0) = (0, 0)$)			$(x(0), x(0))$ ($L=2$)	
	2.0	1.6	1.0	(0, 0.3)	(0, 0.5)
3,0 (0,1)	33,681703, 25,527474	-	-	29,190249, 22,618103	25,813664, 20,138264
4,5 (0,1)	25,120481, 23,709117	-	-	21,963803, 20,681356	19,669251, 18,504479
4,5 (0,15)	16,912986, 15,855740	17,792218, 16,574280	-	14,800041, 13,883464	13,660492, 12,366771
6,0 (0,15)	15,990125, 15,742958	16,701554, 16,414950	-	15,334841, 14,939452	12,485598, 12,301931
8,0 (0,25)	9,372185, 9,034481	9,446560, 9,105315	9,900725, 9,459425	8,230968, 8,214366	7,489769, 7,473167
9,0 (0,25)	9,157983, 9,034246	9,229110, 9,105276	9,618614, 9,459202	8,220438, 8,214324	7,479239, 7,473125
10,5 (0,3)	7,564207, 7,541913	7,628474, 7,598369	7,925533, 7,895419	7,058283, 7,056787	7,314808, 7,143612
12,0 (0,3)	7,546881, 7,541913	7,605072, 7,598365	7,902118, 7,895410	7,057121, 7,056787	6,339867, 6,088755
14,0 (0,4)	5,688424, 5,687778	5,675331, 5,664707	5,758249, 5,742392	5,386032, 5,385993	5,865225, 5,812317
16,0 (0,4)	5,652618, 5,651182	5,666144, 5,664704	5,744532, 5,742389	5,385993, 5,385993	5,819437, 5,812317
18,0 (0,4)	5,651377, 5,651182	5,664902, 5,664707	5,742379, 5,742389	5,261247, 5,181287	5,813280, 5,812317
20,0 (0,5)	4,500931, 4,500333	4,513375, 4,512778	4,551644, 4,551046	4,585215, 4,584630	4,414338, 4,414257
22,5 (0,5)	4,500384, 4,500333	4,512829, 4,512778	4,551046, 4,551046	4,584631, 4,584630	4,414265, 4,414257

Исследовано влияние параметров задачи L, θ и начального состояния на поведение замкнутой системы (3). Результаты расчетов приведены в таблице. В каждом случае был подсчитан расход топлива для перевода системы (3) из начального в заданное состояние равновесия (первая строка таблицы) и расход топлива на стабилизацию системы в этом состоянии (вторая строка таблицы). На рис. 1 приведены характерные переходные процессы в системе (3) для различных значений L, θ и начального состояния $z = (x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0)$ (в таблице номер характерной кривой отмечен индексом, соответствующим оптимальному расходу топлива). На рис. 2. показано влияние начального состояния на поведение системы при фиксированном значении $L = 2$.

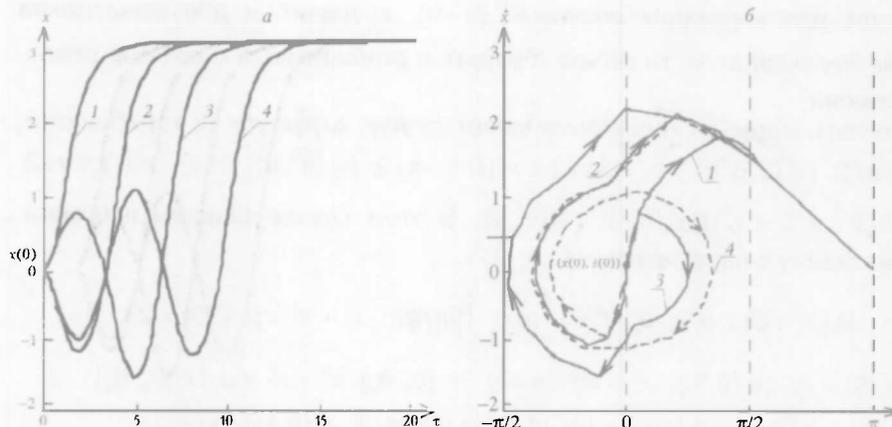


Рис. 1. Переходные процессы в системе при различных значениях L, θ :
а – состояние системы, б – фазовые траектории

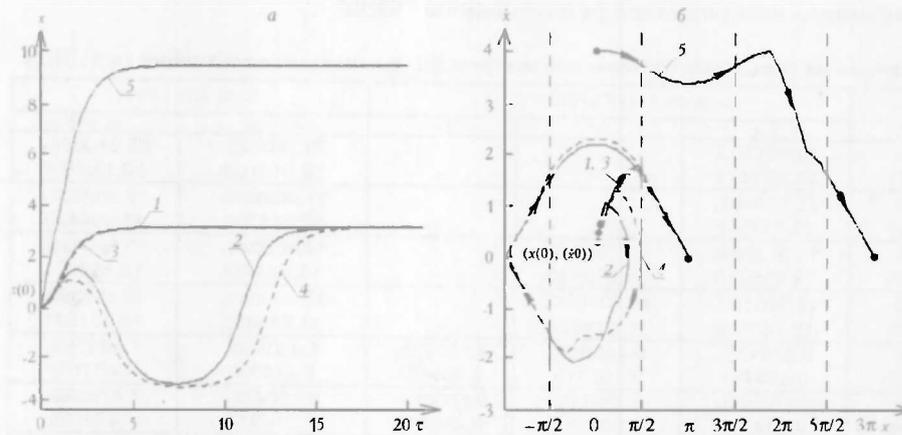


Рис. 2. Влияние начального состояния на поведение системы и стабилизация маятника с вращением: а – состояние системы, б – фазовые траектории

3. Стабилизация маятника с вращением. В качестве начального состояния возьмем $z = (x(0), \dot{x}(0)) = (0, 4)$. Выберем новые значения параметров $L = 5, \theta = 3$. Будем искать оптимальную траекторию $x^0(t), t \in T$, имеющую следующую структуру (с вращением): $|x^0(t)| < \pi/2, t \in [0, \theta_1^0]$; $\pi/2 < x^0(t) < 3\pi/2, t \in [\theta_1^0, \theta_2^0]$; $3\pi/2 < x^0(t) < 5\pi/2, t \in [\theta_2^0, \theta_3^0]$; $5\pi/2 < x^0(t) < 7\pi/2, t \in [\theta_3^0, \theta]$. Поиск такой траектории в классе дискретных управлений сводится к следующей задаче оптимального управления с параметрами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$:

$$B_\theta(z) = C(z, \theta, \theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0) = \min_{u, \theta_1, \theta_2, \theta_3} \int_0^\theta |u(t)| dt, \quad \dot{x}^1 + x^1 = u, \quad x^1(0) = z,$$

$$x^1(0) = z_2, \quad t \in [0, \theta_1]; \quad x^2 - x^2 + \pi = u, \quad t \in [\theta_1, \theta_2];$$

$$x^3 + x^3 + 2\pi = u, \quad t \in [\theta_2, \theta_3]; \quad x^4 - x^4 - 3\pi = u, \quad t \in [\theta_3, \theta]; \quad x^1(\theta_1) = \pi/2,$$

$$x^2(\theta_2) = 3\pi/2, \quad x^3(\theta_3) = 5\pi/2, \quad x^4(\theta) = 3\pi, \quad x^4(\theta) = 0; \quad |u(t)| < L, \quad t \in T.$$

На рис. 2 представлены полученные результаты (кривая 5).

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 67.

2. Габасов Р., Ружицкая Е.А. // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 778.

3. Gabasov R., Kirillova F. M. // 13 th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control. San Francisco, 1996. P. 231.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 12.01.2000.

Ружицкая Елена Адольфовна – кандидат физико-математических наук (Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины).

УДК 519.71

В. А. ОБРАЗЦОВ, А. В. РЯБЦЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ ИНДУКТИВНОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ С ВЫБОРКАМИ КОМБИНАТОРНОЙ ПРИРОДЫ

The modification of recognition algorithm for two kinds of learning information with combinatorial regularity is described. The modification is intended to reduce the number of operations performed by the algorithm and to decrease computational resources.

В теории распознавания образов широко используются различные способы представления информации о предметной области. Будем рассматривать два уровня такого представления: уровень постановки задачи и входной уровень алгоритма распознавания. На входном уровне алгоритма наиболее естественным для задач распознавания является способ описания множеств по прецедентам. Для такого представления разработано большое число алгоритмов, и это позволяет использовать данный способ представления исходной информации в качестве универсального при решении широкого класса задач. На уровне же постановки задачи способ описания множеств обуславливается внешними факторами и/или удобством работы пользователя. Типичным является случай, когда известная информация представлена в виде некоторой совокупности правил. Такие ситуации встречаются в системах принятия решений, построенных с целью обработки различных анкет, стандартизированных документов и некоторых других. Для применения техники распознавания образов информация, представленная с помощью правил, может быть преобразована к так называемому "объектному представлению". Порождаемые при этом объекты могут иметь комбинаторную природу. Применение алгоритмов распознавания в данном случае приводит к значительному росту объема обучающего материала и числа операций при обучении. В настоящей работе ставится цель показать, что в некоторых случаях для конкретного алгоритма индуктивного вывода из семейства $\alpha(a)$ [1] вычислительных сложностей можно избежать.

I. Рассмотрим случай, когда каждый объект представляет собой вектор $x \in B_2^n$. Рангом вектора $x \in B_2^n$ будем называть величину $\text{rank}(x) := \sum_{i=1}^n x_i$.

Обозначим через $\text{Range}(m_1, m_2) := \{x \in B_2^n \mid m_1 < \text{rank}(x) < m_2\}$. Будем считать, что обучающая информация о классах задана в виде набора формул $\{\text{Range}(m_{1t}, m_{2s})\}$

В [1] описано параметрическое семейство алгоритмов $\alpha(a)$. Процедура вычисления параметров алгоритма имеет следующий вид.

Для заданных n и X_i^0 выполняем последовательность шагов:

1. Фиксируем номер признака $j \in \{1, \dots, n\}$ и для каждого $k \in \{1, \dots, l\}$ вычисляем:

$$b_{kj} = \left(\sum_{x^u \in X_i^0} x_i^u \right) \left(|X_i^0| \right)^{-1}.$$

