

СМЕЩЕННЫЕ ПОЛЯ БЕССЕЛЯ С РАЗЛИЧНЫМИ
АЗИМУТАЛЬНЫМИ ЗАВИСИМОСТЯМИ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SHIFTED BESSEL FIELDS WITH VARIOUS AZIMUTHAL DEPENDENCES

S.S. Girdel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены новые решения уравнения Гельмгольца, описывающие бездифракционные непараксиальные смещенные волновые поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями. Они характеризуются пятью свободными параметрами. Выполнено графическое моделирование таких пучков. Проанализированы зависимости картин интенсивности полей Бесселя от свободных параметров.

Ключевые слова: пучки, пучки Бесселя, азимутальная зависимость, смещенные поля, поля Бесселя.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Смещенные поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 14–18. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_14

Abstract. The new solutions of the Helmholtz equation describing nondiffracting nonparaxial shifted Bessel wave fields with various azimuthal dependences are offered. They are characterised by five free parameters. Pictorial modelling of such beams is fulfilled. The dependences of the patterns of intensity of Bessel fields on the free parameters are analysed.

Keywords: beams, Bessel beams, azimuthal dependence, shifted fields, Bessel fields.

For citation: Girdel, S.S. Shifted Bessel fields with various azimuthal dependences / S.S. Girdel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 14–18. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_14 (in Russian)

Введение

Волновые поля Бесселя известны уже давно и в своё время из-за бездифракционности произвели фурор в научном мире. Немного истории. В 1978 году Дарнин (Durnin) получил волновые поля Бесселя и впервые показал [1], что идеальные поля Бесселя являются бездифракционными. Проведенный им эксперимент подтвердил эти выводы. Затем начались бурные исследования волновых полей Бесселя и их модификаций. Правда, потом выяснилось, что решения уравнения Гельмгольца через функции Бесселя для физиков были описаны, по крайней мере, еще в 1941 году Стреттоном [2]. В настоящее время известны и другие типы волновых полей, обладающие свойствами бездифракционности, однако пучки Бесселя по-прежнему продолжают вызывать большой интерес во всём мире [3]–[17].

Для монохроматического излучения ($E \sim \exp(-i\omega t)$) волновые поля описываются уравнением Гельмгольца, которое, в частности, имеет классическое решение [17], [18]

$$E_n(x, y, z) = A \exp\left(iz\sqrt{k^2 - k_\perp^2}\right) \cdot f(n, \varphi) J_n(k_\perp \rho). \quad (0.1)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\sin(\varphi) = y/\rho$; $\cos(\varphi) = x/\rho$ – стандартные полярные координаты. Фазовый

множитель $f(n, \varphi)$ обычно берут в виде $f(n, \varphi) = \exp(in\varphi)$, где φ – азимутальный угол, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n \in Z$.

Для дальнейшего целесообразно перейти к безразмерным координатам и параметрам соотношениями

$$X = x/w_0; Y = y/w_0;$$

$$Z = z/w_0; K = kw_0; K_\perp = k_\perp w_0.$$

Тогда $\cos(\varphi) = X/R$ и волновые поля Бесселя в безразмерных координатах описываются выражением

$$E_n(R, Z) = A \exp\left(iZ\sqrt{K^2 - K_\perp^2}\right) \cdot f(n, \varphi) J_n(K_\perp R). \quad (0.2)$$

1 Смещенные волновые поля Бесселя с различными фазовыми множителями

Последнее выражение можно обобщить, если ввести комплексные сдвиги для поперечных координат X и Y соотношениями $X_s = X - iX_0$, $Y_s = Y - iY_0$. Такой формализм недавно предложили Ковалев и Котляр [4], [10], [11]. Практически авторы применяли вещественный сдвиг по X и чисто мнимый сдвиг по Y , чтобы упростить получающиеся выражения. Такие моды авторы назвали асимметричными модами Бесселя.

Их можно также называть децентрированными. Недавно [16] обсуждались более общие смещенные пучки Бесселя, когда поперечные координаты становились комплексными за счет параметров смещения и которые могут быть в общем случае комплексными.

Хотя параметры смещения X_0 и Y_0 в общем случае могут быть комплексными, их мнимые части приводят просто к смещению начала координат и не приводят к каким-либо физическим следствиям. Поэтому в дальнейшем будем полагать X_0 и Y_0 вещественными.

Плаченков [5] волновые пучки такого типа называет смещенными (shifted). Мы, в дальнейшем, обсуждаемые пучки Бесселя также будем называть смещенными. В работах [16], [5] обсуждались смещенные поля Бесселя с произвольными комплексными смещениями поперечных координат. Индекс s у таких поперечных координат означает, что координата смещенная (shifted).

Комплексную амплитуду смещенных волновых полей Бесселя в безразмерных координатах теперь можно записать, как

$$E_n(R_s, Z) = A \exp\left(iZ\sqrt{K^2 - K_\perp^2}\right) \cdot f(\varphi_s, n) J_n(K_\perp R_s). \quad (1.1)$$

Бездифракционные непараксиальные смещенные моды Бесселя (1.1) [4], [16] зависят от трех переменных (X, Y, Z) и пяти параметров $(K, K_\perp, X_0, Y_0, n)$. Здесь $R_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2}$ и поперечные координаты (R_s, φ_s) – уже комплексные, поэтому функция Бесселя и фазовый множитель являются комплекснозначными функциями. Согласно справочнику Абрамовиц [19], цилиндрические функции 1 рода функции Бесселя $J_n(z)$ – аналитические функции от z во всей комплексной области, разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Все функции $J_n(z)$ многозначны и имеют $z = 0$ точкой ветвления.

Фазовый множитель $f(\varphi_s, n) = \exp(in\varphi_s)$ для смещенных полей Бесселя (1.1) можно представить явно через комплексную фазу φ_s в различных формах:

$$\begin{aligned} f_{s1}(\varphi_{s1}, n) &= \exp(in \arccos(X_s / R_s)); \\ f_{s2}(\varphi_{s2}, n) &= \exp(in \arcsin(Y_s / R_s)); \\ f_{s3}(\varphi_{s3}, n) &= \exp(in \arctg(Y_s / R_s)); \\ f_{s4}(\varphi_{s4}, n) &= \exp(in \arctg(Y_s, X_s)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Кроме того, фазовый множитель $f(\varphi_s, n)$ можно также представить в различных неявных формах:

$$f_{s5}(\varphi_{s5}, n) = \left(\frac{X_s + iY_s}{R_s}\right)^n;$$

$$\begin{aligned} f_{s6}(\varphi_{s6}, n) &= \left(\frac{X_s - iY_s}{R_s}\right)^{-n}; \\ f_{s7}(\varphi_{s7}, n) &= \left(\frac{X_s + iY_s}{X_s - iY_s}\right)^{n/2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В итоге для фазового множителя $f(\varphi_s, n)$ смещенных полей Бесселя (1.1) мы можем взять семь различных выражений. Компьютерное моделирование с помощью системы компьютерной математики Mathematica показало, что первые два выражения $f_{s1}(\varphi_{s1}, n)$ и $f_{s2}(\varphi_{s2}, n)$ приводят к разрывам интенсивности полей Бесселя. Известно, что, с математической точки зрения, в общем случае, согласно [20], у функции Бесселя 1 рода аргумент z и порядок (или индекс) n могут быть произвольными комплексными числами. Однако мы ищем физически приемлемые решения, чтобы поверхности интенсивности волновых полей Бесселя были без разрывов и изломов, т. е. физически реализуемые поля. Поэтому $f_{s1}(\varphi_{s1}, n)$ и $f_{s2}(\varphi_{s2}, n)$ непосредственно нельзя использовать. Оставшиеся пять выражений $f_{s3}(\varphi_{s3}, n) - f_{s7}(\varphi_{s7}, n)$ дают одинаковые поверхности интенсивности, без разрывов и изломов, т. е. физически реализуемые. Заметим, что в литературе в качестве фазового множителя для волновых полей до сих пор использовался [4], [10], [11] только фазовый множитель $f_{s5}(\varphi_{s5}, n)$.

Как известно [19], [20], обратные тригонометрические функции арктангенс, арккосинус, арксинус и логарифм являются многозначными функциями комплексных аргументов. Поэтому при численных расчетах они могут приводить к различным результатам. Это связано с тем, что системы компьютерной математики (Maple, Mathematica и др.) при расчётах многозначных комплексных функций обычно выбирают их главное значение, поэтому результаты численных расчетов могут различаться.

2 Смещенные поля Бесселя с явными азимутальными зависимостями

Кроме фазового множителя $f(\varphi_s, n)$ можно использовать множители с явными азимутальными зависимостями типа $f(\varphi_s, n) = \cos(n\varphi_s)$ или $f(\varphi_s, n) = \sin(n\varphi_s)$. Множитель $\cos(n\varphi_s)$ лучше применять, чем $\sin(n\varphi_s)$, так как при $n \rightarrow 0$ функция $\sin(n\varphi_s) \rightarrow 0$. С математической точки зрения выражения с различными фазовыми функциями $\exp(in\varphi)$ и $\cos(n\varphi_s)$ совершенно равноправны, одинаково пригодны и удовлетворяют соответствующему уравнению Гельмгольца. Однако в подавляющем большинстве публикаций фазовая функция $f(\varphi, n)$ для волновых полей Бесселя берется в форме $\exp(in\varphi)$. Это,

по-видимому, можно объяснить только упрощением расчетов. Но встречаются для полей Бесселя и альтернативные зависимости $\cos(n\varphi)$: [6], [9], [12]–[14], [18]–[27] и др. Цилиндрические векторные пучки с зависимостью $\cos(n\varphi)$ обсуждались недавно в [7] и [8].

Фазовые множители $f(\varphi_s, -n) = \exp(-in\varphi_s)$ получаются из (1.2), (1.3) заменами $n \rightarrow (-n)$. Так как по формулам Эйлера

$$\cos(n\varphi_s) = (\exp(in\varphi) + \exp(-in\varphi)) / 2,$$

то из $f_{s1} - f_{s4}$ имеем четыре различных корректных выражения для фазового множителя $\cos(n\varphi_s)$. Кроме этого, как показывает компьютерное моделирование интенсивности поля, еще для корректных представлений множителя $\cos(n\varphi_s)$ можно применять взаимозаменяемые выражения $f_{s5} - f_{s7}$. Итого – $4 + 6 = 10$ представлений явного фазового множителя $\cos(n\varphi_s)$. Среди них выделяется множитель

$$\cos(n\varphi_s) = \cos(n \arccos(X_s / R_s)) = T_n(X_s / R_s),$$

где $T_n(X_s / R_s)$ – полином Чебышева 1 рода.

Все эти 10 выражений для явной азимутальной зависимости $f(\varphi_s, n) = \cos(n\varphi_s)$ в (1.1) эквивалентны, как показывает компьютерное моделирование с помощью системы Mathematica. Они дают одинаковые поверхности интенсивности $|E_n|^2$. Кроме того, для смещенных полей Бесселя можно использовать также модули вещественной $|\operatorname{Re}(E_n)|^2$ и мнимой $|\operatorname{Im}(E_n)|^2$ частей комплексной амплитуды E_n , используя множители (1.2) и (1.3).

Аналогично выводим, используя формулы Эйлера, еще 10 представлений явного фазового множителя $\sin(n\varphi_s)$.

Проведено графическое моделирование интенсивности в поперечных сечениях смещенных волновых полей Бесселя в зависимости от нескольких свободных параметров в 3D формате. Использовались безразмерные параметры и координаты. Множитель $\exp(iZ\sqrt{K^2 - K_\perp^2})$ не влияет на характер распределения интенсивности поля в поперечном сечении пучка, поэтому его можно опустить.

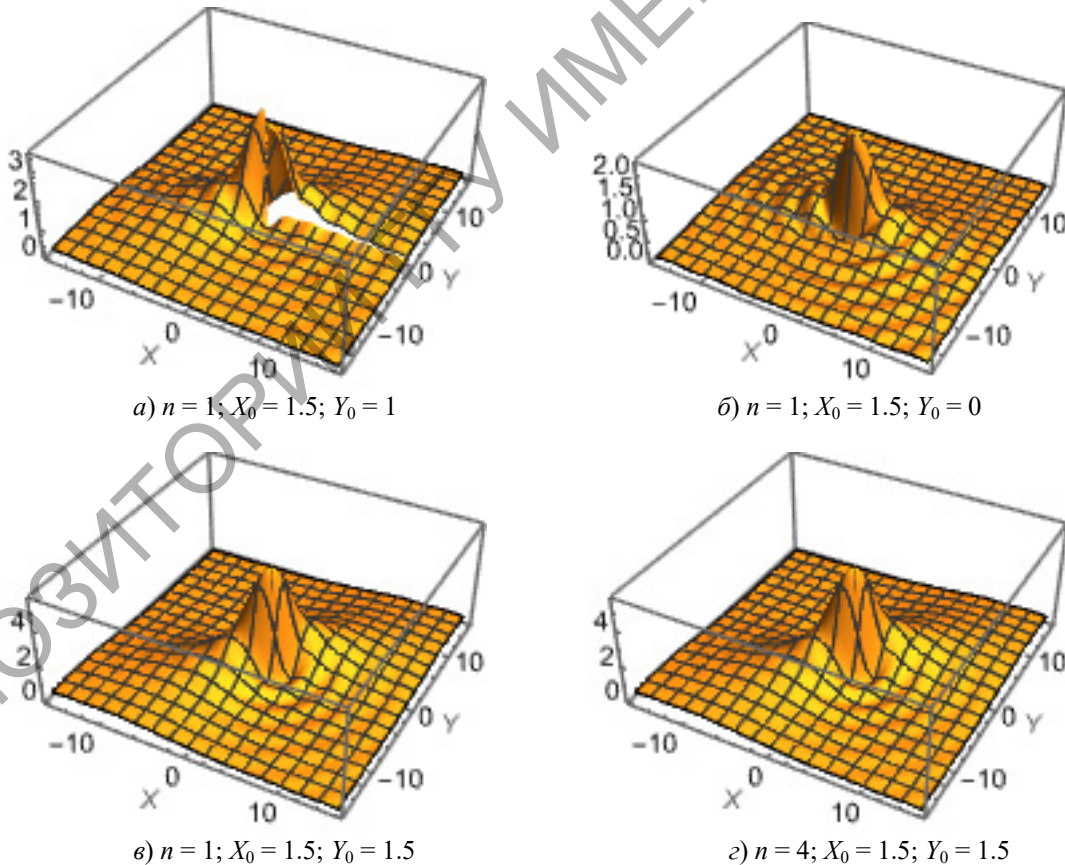


Рисунок 2.1 – 3D графики интенсивности смещенных полей Бесселя:

а) с азимутальной зависимостью $f_{s1}(\varphi_{s1}, n) = \exp(in \arccos(X_s / R_s))$;

б) – з) с азимутальной зависимостью $f_{s5}(\varphi_{s5}, n) = ((X_s + iY_s) / R_s)^n$.

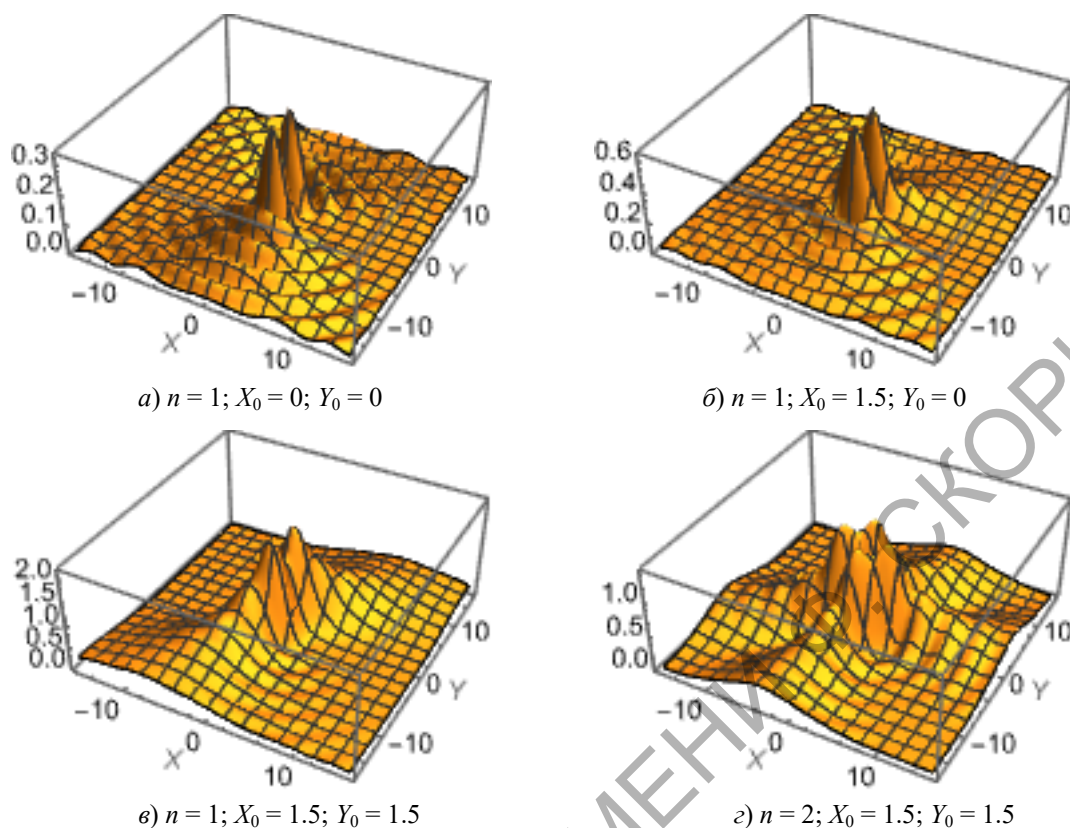


Рисунок 2.2 – 3D графики интенсивности смещенных полей Бесселя с явной азимутальной зависимостью $\cos(n\varphi_s) = \cos(n \arccos(X_s / R_s)) = T_n(X_s / R_s)$.

В качестве примеров на рисунках 2.1 и 2.2 изображены 3D графики интенсивности смещенных полей Бесселя в поперечном сечении. Полагая во всех случаях $A = 1$. Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения рисунков 2.1 и 2.2 пропорциональна ординате пространственной фигуры.

Анализируя результаты графического моделирования интенсивности в поперечных сечениях смещенных волновых полей Бесселя можно сделать следующие выводы.

При увеличении X_0 (Y_0) центральный максимум постепенно возрастает и смещается соответственно вдоль оси X (Y) – рисунки 2.1, б) и 2.1, в). Если параметры $X_0 = Y_0 \neq 0$ и возрастают, то приблизительно картина интенсивности поворачивается вокруг оси Z на $\pi/4$.

Если волновые поля Бесселя несмещенные, т. е. $X_0 = Y_0 = 0$, то n – порядок оси симметрии поля Z . Увеличение порядка n приводит к постепенному смещению пиков интенсивности, возрастанию амплитуды максимума и постепенному подавлению интенсивности остальных колец – рисунок 2.1, з).

С увеличением Z картина интенсивности постепенно расплывается, что естественно. Из рисунков 2.1 и 2.2 видно, что комплексное

смещение поперечных координат приводит к нарушению цилиндрической симметрии волновых полей Бесселя и возникновению асимметрии интенсивности.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (1.2)–(1.3). В частных случаях наши выражения эквивалентны выражениям для аВ-мод, обсуждаемых в работах [4], [10], [1].

Заключение

Задача перехода от стандартных полей Бесселя к смещенным полям Бесселя с явными азимутальными зависимостями является нетривиальной. Показательно, что авторы работ [4], [10], [11] избегают явного введения комплексных полярных переменных φ и ρ и оставляют лишь комплексифицированные декартовы координаты x и y .

В данной работе вводятся новые типы пучков – смещенные непараксиальные волновые поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями. Такие моды характеризуются пятью свободными параметрами: дискретным вещественным индексом (n) и четырьмя комплексными непрерывными параметрами (K, K_{\perp}, X_0, Y_0) . Введенные здесь моды в частном случае редуцируются к аВ-модам Котляра и Ковалева [4], [10], [11].

Большая часть выражений для фазового множителя приводит к эквивалентным картинам интенсивности. Однако некоторые (f_{s1} и f_{s2}) приводят к разрывам поверхности интенсивности, что физически недопустимо и поэтому их применять нельзя.

Проведенное графическое моделирование интенсивности смещенных непараксиальных волновых полей Бесселя с различными азимутальными зависимостями показало значительную асимметрию таких мод, которая возрастает при увеличении комплексного смещения поперечных координат.

Для неявной азимутальной зависимости типа $\exp(in\varphi_s)$ можно применять любой из фазовых множителей (1.3).

Для явной азимутальной зависимости предпочтительнее пользоваться фазовым множителем в форме $\cos(n\varphi_s) = T_n(X_s/R_s)$ или даже вещественными либо мнимыми частями полной комплексной амплитуды электрического поля волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Durnin, J.* Diffraction – free beams / J. Durnin, J.Jr. Miceli // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 58, iss. 15. – P. 1492–1501.
2. *Stretton, J.A.* *Electromagnetic Theory* / McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1941. – 631 p.
3. *Киселев, А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // *Оптика и спектроскопия.* – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
4. *Ковалев, А.А.* Асимметричные моды Бесселя первого и второго типа и их суперпозиции / *Компьютерная оптика.* – 2016. – Т. 39, № 1. – С. 5–10.
5. *Плаченков, А.Б.* Смещенные параксиальные пучки Бесселя – Гаусса. I. / А.Б. Плаченков // *Опт. и спектр.* – 2019. – Т. 126, вып.3. – С. 311–318.
6. *Chavez-Cerda, S.* Nondiffracting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves / S. Chavez-Cerda, G.S. McDonald, G.H.C. New // *Opt. Commun.* – 1996. – Vol. 123. – P. 225–233.
7. *Effect of a spiral phase on a vector optical field with hybrid polarization states* / Rui-Pin Chen [et al.] // *J. Opt.* – 2015. – Vol. 17. – P. 065605.
8. *Fu, S.* Bessel beams with spatial oscillating polarization / S. Fu, S. Zhang, C. Gao // *Sci. Per.* – 2016. – Vol. 6, № 1. – P. 30765.
9. *Horak, R.* Nondiffracting stationary electromagnetic field / R. Horak, Z. Bouchal, J. Bajzer // *Opt. Commun.* – 1997. – Vol. 133. – P. 315–327.
10. *Kotlyar, V.V.* Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters.* – 2014. – Vol. 39, № 8. – P. 2395–2398.
11. *Kotlyar, V.V.* Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Computer Optics.* – 2014. – Vol. 38 (1). – P. 4–10.
12. *Mitri, F.G.* Acoustics of finite asymmetric exotic beams: Examples of Airy and fractional Bessel beams / F.G. Mitri // *Journal of Applied Physics.* – 2017. – Vol. 122. – P. 224903.
13. *Mitri, F.G.* Vector wave analysis of an electromagnetic high-order Bessel vortex beam of fractional type / F.G. Mitri // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 606–608.
14. *Mitri, F.G.* Three-dimensional vectorial analysis of an electromagnetic non-diffracting high-order Bessel trigonometric beam / F.G. Mitri // *Wave Motion.* – 2012. – Vol. 49. – P. 561–568.
15. *Tao, S.H.* Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiacong Yuan // *Applied Optics.* – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.
16. *Гиргель, С.С.* Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 1 (30). – С. 13–16.
17. *Абрамочкин, Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Воловников // Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
18. *Маркузе, Д.* Оптические волноводы / Д. Маркузе. – Москва: Мир, 1974. – 576 с.
19. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.
20. *NIST Handbook of Mathematical Functions*, 2010. – 498 p.
21. *Мидвинтер, Джон Э.* Волоконные световоды для передачи информации / Джон Э. Мидвинтер. – Москва: Радио и связь, 1983. – 336 с.
22. *Снайдер, А.* Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – Москва: Радио и связь, 1987. – 656 с.
23. *Гончаренко, А.М.* Основы теории оптических волноводов / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. – Минск: Наука и техника, 1983. – 237 с.
24. *Seshadri, S.R.* Scalar modified Bessel-Gauss beams and waves / S.R. Seshadri // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2007. – Vol. 24, № 9. – P. 2837–2842.
25. *Two-dimensional complex source point solutions: application to propagation invariant beams, optical fiber modes, planar waveguides, and plasmonic devices* / Colin J.R. Sheppard [et al.] // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2014. – Vol. 31, № 12. – P. 2674–2679.
26. *Seshadri, S.R.* Electromagnetic Gaussian beam / S.R. Seshadri // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.
27. *Скучик, Е.* Основы акустики. Т. 2. / Е. Скучик. – Москва: Мир, 1976. – 542 с.

Поступила в редакцию 20.01.2022.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор