

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Ю. А. ГРИШЕЧКИН, В. Н. КАПШАЙ

**ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ
И СОСТОЯНИЯХ РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА
И ИХ СУПЕРПОЗИЦИЙ**

Практическое руководство

для студентов специальностей

1 – 31 04 01 02 «Физика (производственная деятельность)»,

1 – 31 04 08 «Компьютерная физика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2018

УДК 539.129.3(076)
ББК 22.382я73
Г859

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук А. А. Бабич,
канд. физ.-мат. наук А. Н. Годлевская

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Гришечкин, Ю. А.

Г859 Численные решения задач о связанных состояниях и состояниях рассеяния для потенциалов однобозонного обмена и их суперпозиций : практическое руководство / Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – 38 с. ISBN 978–985–577–393–2

Данное издание посвящено одному из актуальных направлений квантовой теории поля – решению задач о состояниях рассеяния и связанных состояниях релятивистских двухчастичных систем на основе решений уравнений квазипотенциального типа. Приведены методы численного решения релятивистских двухчастичных уравнений с потенциалами однобозонного обмена и суперпозицией таких потенциалов: в случае состояний рассеяния и связанных состояний.

Предназначено для студентов специальностей 1 – 31 04 01 02 «Физика (производственная деятельность)», 1 – 31 04 08 «Компьютерная физика»

УДК 539.129.3(076)
ББК 22.382я73

ISBN 978–985–577–393–2

© Гришечкин Ю. А., Капшай В. Н., 2018
© Учреждение образования «Гомельский
государственный университет
имени Франциска Скорины», 2018

Оглавление

Введение	4
1. Релятивистские двухчастичные уравнения и основные характеристики состояний рассеяния	6
1.1. Парциальные уравнения для s -состояний	6
1.2. Основные характеристики состояний рассеяния	8
2. Решения релятивистских задач для систем двух частиц с независимыми от энергии потенциалами	10
2.1. Методы численного решения интегральных уравнений.	10
2.2. Численные решения двухчастичных уравнений с модельными потенциалами	13
2.3. Решение уравнений в случае слабосвязанных систем для потенциалов кулоновского типа	17
2.4. Форм-факторы упругого рассеяния и константы распада двухчастичных систем	19
2.5. Состояния рассеяния систем двух скалярных частиц в случае потенциалов однобозонного обмена	22
3. Решение релятивистских задач о связанных состояниях систем двух частиц с зависящими от энергии потенциалами	25
3.1. Потенциалы однобозонного обмена, зависящие от энергии системы.	25
3.2. Численные методы решения интегральных уравнений в импульсном представлении.	28
3.3. Решения двухчастичных уравнений в случае зависящих от энергии системы потенциалов однобозонного обмена	29
3.4. Константы распада двухчастичных систем в случае зависящих от энергии потенциалов однобозонного обмена	32
Заключение	36
Перечень условных обозначений	37
Литература	38

Введение

Релятивистские двухчастичные уравнения квантовой теории поля (КТП) нашли широкое применение при описании релятивистских составных систем. Одним из основных типов таких уравнений являются т. н. квазипотенциальные (трёхмерные ковариантные) уравнения. Эти уравнения были использованы при описании, как процессов рассеяния, так и связанных состояний составных систем. Особенно широкое применение эти уравнения нашли при исследовании систем двух частиц. На основе решения квазипотенциальных уравнений были получены физические характеристики двухчастичных систем: энергетические спектры, структурные функции, форм-факторы, магнитные моменты, поляризуемости, фазы рассеяния и т. д.

Уравнения квазипотенциального типа изначально были получены в импульсном представлении (ИП) в интегральной форме [1, 2]. Позже они были сформулированы в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) в разностной и в интегральной форме [3]. Фактически РКП является обобщением обычного координатного представления квантовой механики. Однако, в отличие от квантовой механики, в большинстве случаев квазипотенциальные уравнения не имеют точных решений или же их поиск – весьма трудная задача. В связи с этим требуется нахождение численных или приближённых аналитических решений, а в случае, например, зависимости от энергии входящих в уравнения потенциалов – только численных.

Усилия по разработке методов численного решения интегральных квазипотенциальных уравнений в ИП были предприняты различными авторами и авторскими коллективами. Большой интерес представляют решения в случае потенциалов типа кулоновского и линейного запирающего. Уравнения, содержащие потенциалы типа кулоновского, в ИП являются сингулярными, а уравнения с потенциалами типа линейного – даже гиперсингулярными. Этим обусловлена необходимость разработки довольно сложных методов их решения, в которых используется, например, процедура замены исходных потенциалов, некоторыми их модификациями, после которой удаётся получить решения уравнений стандартными методами. Такие модифицированные потенциалы являются многопараметрическими функциями. При удачном выборе параметров возможно получение функции, хорошо аппроксимирующей исходный потенциал. Отдельно стоит отметить метод решения сингулярных интегральных уравнений, основанный на представлении входящих в уравнения волновых функций (ВФ) в виде кусочно-непрерывной функции (метод Галёркина). Этот метод был

использован для решения квазипотенциальных уравнений, содержащих зависящие от энергии потенциалы однобозонного обмена, применительно к связанному состоянию электрон-позитронной пары (позитрония) и связанному состоянию $\mu^+\mu^-$ -пары (парадимюония) [4]. Наличие зависимости потенциала от энергии приводит к необходимости решения задач на собственные значения для интегральных уравнений с нелинейным вхождением спектрального параметра, это создает дополнительные трудности – требуется привлечение специальных методов решения. Например, авторы работы [4] использовали метод итераций.

Развитие численных методов решения квазипотенциальных уравнений с такими сингулярными и гиперсингулярными потенциалами шло параллельно с развитием численных методов решения аналогичных им уравнений релятивистской и нерелятивистской квантовой механики.

Получение численных решений двухчастичных уравнений в РКП до появления возможности представить их в интегральной форме оставалось очень сложной задачей, так как методы численного решения разностных уравнений разработаны в гораздо меньшей степени, чем интегральных. Возможность сформулировать интегральные уравнения появилась лишь после нахождения явного вида парциальных функций Грина (ФГ). В данном практическом руководстве рассмотрены методы численного решения парциальных интегральных уравнений в РКП как для связанных s -состояний, так и для s -состояний рассеяния.

Целью данного практического руководства является:

- 1) рассмотрение методов численного решения релятивистских двухчастичных уравнений в интегральной форме в ИП и в РКП;
- 2) получение численных решений релятивистских двухчастичных уравнений для s -состояний в случае различных вариантов потенциалов;
- 3) нахождение на основании полученных решений физических характеристик состояний рассеяния и связанных состояний двухчастичных систем: спектров энергии, упругих форм-факторов, ширин распада систем частица–античастица на два фотона, амплитуд рассеяния, длин рассеяния и фазовых сдвигов.

1. Релятивистские двухчастичные уравнения и основные характеристики состояний рассеяния

1.1. Парциальные уравнения для s -состояний

Релятивистские уравнения для сферически-симметричных ВФ $\Psi_{(j)}(\chi_q, r)$ состояний рассеяния двух частиц одинаковой массы m в РКП имеют вид

$$\Psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (1.1)$$

где индекс j соответствует одному из четырёх вариантов уравнений квазипотенциального типа [1–3]:

$j = 1$ – уравнение Логунова – Тавхелидзе;

$j = 2$ – уравнение Кадышевского;

$j = 3$ – модифицированное уравнение Логунова – Тавхелидзе;

$j = 4$ – модифицированное уравнение Кадышевского;

$\chi_q \geq 0$ – быстрота, связанная с энергией двухчастичной системы $2E_q$ соотношением $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$;

r – модуль радиус-вектора в РКП;

$G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ – функция Грина j -го уравнения;

$V(r)$ – потенциал взаимодействия частиц.

Функции Грина в РКП имеют следующую форму:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \quad (1.2)$$

где

$$G_{(j)}(\chi_q, r) = \frac{-i \operatorname{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{K_q^{(1)} \operatorname{sh}(\pi mr/2)}, \quad (1.3)$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \operatorname{ch} \chi_q)^{-1}}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i \operatorname{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{K_q^{(2)} \operatorname{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i \operatorname{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{K_q^{(3)} \operatorname{ch}(\pi mr/2)}, \quad G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i \operatorname{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{K_q^{(4)} \operatorname{sh}(\pi mr)}.$$

В выражениях (1.3) мы использовали обозначения:

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m \operatorname{sh} 2\chi_q; \quad K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m \operatorname{sh} \chi_q.$$

Для связанных состояний уравнения (1.1) преобразуются к однородной форме, а быстрота в них выбирается мнимой $\chi_q = iw_q$, где $0 < w_q \leq \pi/2$:

$$\Psi_{(j)}(iw_q, r) = \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(iw_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(iw_q, r'). \quad (1.4)$$

При таком выборе быстроты энергия связанного состояния $2E_q$ может быть представлена как $2E_q = 2m \cos w_q$, при этом $2E_q < 2m$. В случае связанных состояний мы рассмотрим также решение уравнений в ИП, которые приведём в следующем виде:

$$\Psi_{(j)}(iw_q, \chi) = \frac{-2}{\pi m} G_{(j)}(iw_q, \chi) \int_0^{\infty} d\chi' V(\chi, \chi') \Psi_{(j)}(iw_q, \chi'), \quad \chi \geq 0. \quad (1.5)$$

Величины $\Psi_{(j)}(iw_q, \chi)$, $G_{(j)}(iw_q, \chi)$, $V(\chi, \chi')$ связаны с соответствующими величинами в РКП интегральными выражениями

$$\Psi_{(j)}(iw_q, r) = \int_0^{\infty} d\chi \sin(\chi mr) \Psi_{(j)}(iw_q, \chi); \quad (1.6)$$

$$G_{(j)}(iw_q, r, r') = \frac{-2}{\pi m} \int_0^{\infty} d\chi \sin(\chi mr) G_{(j)}(iw_q, \chi) \sin(\chi mr');$$

$$V(\chi, \chi') = \int_0^{\infty} dr \sin(\chi mr) V(r) \sin(\chi' mr).$$

Функции Грина релятивистских двухчастичных уравнений для связанных состояний в ИП представим в форме [1–3]:

$$G_{(1)}(iw_q, \chi) = \frac{1}{\text{ch}^2 \chi - \cos^2 w_q}; \quad G_{(2)}(iw_q, \chi) = \frac{1}{2 \text{ch} \chi (\text{ch} \chi - \cos w_q)}; \quad (1.7)$$

$$G_{(3)}(iw_q, \chi) = \frac{\text{ch} \chi}{\text{ch}^2 \chi - \cos^2 w_q}; \quad G_{(4)}(iw_q, \chi) = \frac{1}{2(\cosh \chi - \cos w_q)}.$$

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики ФГ (1.2) при $r \rightarrow \infty$

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \frac{-2}{K_q^{(j)}} \exp(i\chi_q mr) \sin(\chi_q mr'). \quad (1.8)$$

В пункте 1.2 выражения (1.8) будут использованы при определении парциальных амплитуд рассеяния, фазовых сдвигов, S -матриц и других величин, характеризующих состояния рассеяния.

1.2. Основные характеристики состояний рассеяния

Используя уравнения (1.1), с учётом (1.8) запишем асимптотики волновых функций при $r \rightarrow \infty$

$$\Psi_{(j)}(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \sin(\chi_q mr) + q f_{(j)}(\chi_q) \exp(i\chi_q mr),$$

где $f_{(j)}(\chi_q)$ – обозначение для амплитуды рассеяния, которая введена по аналогии с квантовой механикой, как коэффициент при рассеянной волне $\exp(i\chi_q mr)$, разделенный на импульс $q = m \operatorname{sh} \chi_q$:

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{-2}{qK_q^{(j)}} \int_0^{\infty} dr' \sin(\chi_q mr') V(r') \Psi_{(j)}(\chi_q, r'). \quad (1.9)$$

Амплитуда рассеяния связана с парциальным сечением рассеяния $\sigma_{0(j)}(\chi_q)$ и унитарной S -матрицей $S_{(j)}(\chi_q)$ выражениями

$$\sigma_{0(j)}(\chi_q) = 4\pi |f_{(j)}(\chi_q)|^2; \quad S_{(j)}(\chi_q) = 1 + 2iq f_{(j)}(\chi_q). \quad (1.10)$$

Унитарность S -матрицы отражается в представлении $S_{(j)}(\chi_q) = \exp(2i\phi_{(j)}(\chi_q))$, где $\phi_{(j)}(\chi_q)$ – парциальный фазовый сдвиг.

Определим по аналогии с квантовой механикой длину рассеяния как $a_{(j)} = -f_{(j)}(0)$ [5]. Из формул (1.9) нетрудно получить выражение для длины рассеяния через волновую функцию в РКП

$$a_{(j)} = \int_0^{\infty} dr' r' V(r') \tilde{\Psi}_{(j)}(r'), \quad (1.11)$$

где введено обозначение $\tilde{\Psi}_{(j)}(r) = \lim_{\chi_q \rightarrow 0} q^{-1} \Psi_{(j)}(\chi_q, r)$. Найдём уравнения для функций $\tilde{\Psi}_{(j)}(r)$. Разделим уравнения (1.1) на q и рассмотрим их предел при $\chi_q \rightarrow 0$, в котором получим

$$\tilde{\Psi}_{(j)}(r) = r + \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(0, r, r') V(r') \tilde{\Psi}_{(j)}(r'). \quad (1.12)$$

Входящие в уравнения (1.12) ФГ при нулевой быстроте имеют вид

$$G_{(j)}(0, r, r') = G_{(j)}(0, r - r') - G_{(j)}(0, r + r'), \quad (1.13)$$

где

$$G_{(1)}(0, r) = \frac{1}{2} r \operatorname{cth} \frac{\pi mr}{2}, \quad G_{(2)}(0, r) = \frac{1}{4m \operatorname{ch}(\pi mr/2)} + \frac{1}{2} r \operatorname{cth}(\pi mr),$$

$$G_{(3)}(0, r) = \frac{1}{2} r \operatorname{th} \frac{\pi m r}{2}, \quad G_{(4)}(0, r) = \frac{1}{2} r \operatorname{cth}(\pi m r).$$

Асимптотики уравнений (1.12) при $r \rightarrow \infty$, с учётом (1.13) представим как

$$\tilde{\Psi}_{(j)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong r - a_{(j)}. \quad (1.14)$$

Формулу (1.14) намного удобнее использовать для нахождения длины рассеяния, чем выражение (1.11), т. к. она не содержит интеграл.

Нетрудно убедиться, что нерелятивистский предел (предел при $m \rightarrow \infty$, $\chi_q \rightarrow 0$) всех рассмотренных в этой теме уравнений и формул даёт соответствующие уравнения и выражения квантовой механики [5].

Выводы

В этой теме обсуждаются релятивистские двухчастичные уравнения для волновых функций состояний рассеяния и связанных состояний в РКП и в импульсном представлении в сферически-симметричном случае. Приведены ФГ четырёх вариантов релятивистских двухчастичных уравнений квазипотенциального типа. Получены выражения для физических величин, характеризующих процессы рассеяния: амплитуды и сечения рассеяния, фазового сдвига, S -матрицы и длины рассеяния.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит отличие двухчастичных уравнений для состояний рассеяния от уравнений для связанных состояний?
2. Используя интегральное преобразование (1.6) для функций Грина и выражения (1.7), получите формулы (1.2).
3. Получите асимптотические выражения (1.8) функций Грина (1.2).
4. Используя асимптотическое выражение (1.8) функций Грина, получите формулу для амплитуды рассеяния (1.9).
5. Проведите вывод формулы для длины рассеяния (1.11).

2. Решения релятивистских задач для систем двух частиц с независимыми от энергии потенциалами

2.1. Методы численного решения интегральных уравнений

Как было сказано во введении, точные решения релятивистских двухчастичных уравнений возможны лишь в некоторых случаях. Поэтому необходимо численное решение таких уравнений. Данная тема посвящена рассмотрению численного решения двухчастичных интегральных уравнений для состояний рассеяния (1.1) и для связанных состояний (1.4), (1.5) в случае независимых от энергии системы потенциалов. В разделе 2.1 приведены методы решения релятивистских двухчастичных уравнений в РКП и в ИП. Раздел 2.2 посвящён демонстрации эффективности предложенных методов: осуществляется решение двухчастичных уравнений для связанных s -состояний в РКП и в ИП с некоторыми модельными потенциалами. В разделе 2.3 рассмотрена модификация предложенного в разделе 2.1 метода решения уравнений в РКП применительно к слабосвязанным системам с потенциалами типа Кулона, найдены решения для некоторых потенциалов такого типа. Проведено сравнение рассчитанных спектров энергии с экспериментально измеренным значением для ортопозитрония. В разделе 2.4 вычислены ширины распада на основании найденных в разделе 2.3 решений и проведено их сравнение с экспериментальным значением для парапозитрония. В разделе 2.5 получены численные решения уравнений для s -состояний рассеяния (1.1) в случае одного из вариантов потенциалов однобозонного обмена. На основании найденных решений вычислены амплитуды рассеяния, фазовые сдвиги и длины рассеяния.

Рассмотрим решение двухчастичных интегральных уравнений в РКП. Для упрощения процедуры поиска решения вынесем в уравнениях (1.1), (1.4) константу связи λ из потенциала ($V(r) \Rightarrow -\lambda V(r)$) и получим:

$$\Psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) - \lambda \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (2.1)$$

$$\Psi_{(j)}(iw_q, r) = -\lambda \int_0^{\infty} dr' G(iw_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(iw_q, r'). \quad (2.2)$$

Решение уравнений (2.1), (2.2) будем искать методом составных квадратур Гаусса. Изложим идею этого метода. Заменяя верхний бесконечный предел в уравнениях некоторой достаточно большой величиной R ,

выбранной с учётом требования к точности получаемых результатов, и представляя в них интегралы в виде сумм N интегралов, получим

$$\Psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) - \lambda \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (2.3)$$

$$\Psi_{(j)}(iw_q, r) = -\lambda \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} dr' G_{(j)}(iw_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(iw_q, r'), \quad (2.4)$$

где $r_k = r_{k-1} + h_k$,
 $r_0 = 0$,
 $r_N = R$,
 h_k – шаг.

В уравнениях (2.3), (2.4) каждый интервал интегрирования $r \in [r_{k-1}; r_k]$ приведём к интервалу $x \in [-1; 1]$ посредством замены переменной $r \equiv u_k(x) = h_k x/2 + (r_{k-1} + r_k)/2$ и к полученным интегралам применим квадратурную формулу Гаусса с M узлами [6, 7]

$$\int_{-1}^1 dx F(x) \cong \sum_{i=1}^M C_i F(x_i). \quad (2.5)$$

Нами выбрано $M = 5$ – это максимальное значение, для которого узлы x_i и веса C_i формулы Гаусса могут быть вычислены точно [7]

$$\begin{aligned} -x_1 = x_5 &= \sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}}; & -x_2 = x_4 &= \sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}}; & x_3 &= 0, \\ C_1 = C_5 &= \frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}; & C_2 = C_4 &= \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}; & C_3 &= \frac{128}{225}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В результате преобразуем уравнения (2.3) и (2.4) к виду

$$\Psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) - \lambda \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M \frac{h_k}{2} C_i G_{(j)}(\chi_q, r, u_k(x_i)) V(u_k(x_i)) \Psi_{(j)}(\chi_q, u_k(x_i)), \quad (2.7)$$

$$\Psi_{(j)}(iw_q, r) = -\lambda \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M \frac{h_k}{2} C_i G_{(j)}(iw_q, r, u_k(x_i)) V(u_k(x_i)) \Psi_{(j)}(iw_q, u_k(x_i)). \quad (2.8)$$

Взяв формулы (2.7), (2.8) в точках $r_{s1} = u_s(x_l) = h_s x_l/2 + (r_{s-1} + r_s)/2$, получим системы линейных алгебраических уравнений, которые в случае неоднородных уравнений имеют следующий вид:

$$\sum_{\beta=1}^{N \cdot M} [\delta_{\alpha\beta} + \lambda K_{\alpha\beta}^{(j)}] \Psi_{\beta}^{(j)} = b_{\alpha}; \quad K_{\alpha\beta}^{(j)} = A_{\beta} G_{\alpha\beta}^{(j)}; \quad G_{\alpha\beta}^{(j)} = G_{(j)}(\chi_q, u_s(x_l), u_k(x_i)); \quad (2.9)$$

$$A_{\beta} = h_k C_i V(u_k(x_i))/2; \quad b_{\alpha} = \sin(\chi_q m u_s(x_l)); \quad \Psi_{\beta}^{(j)} = \Psi_{(j)}(\chi_q, u_k(x_i)).$$

При этом значения индексов α и β определяются по правилам $\alpha = M(s-1)+1$, $\beta = M(k-1)+1$. Системы однородных уравнений после приведения их основных матриц к симметричной форме имеют форму

$$\sum_{\beta=1}^{N \cdot M} K_{\alpha\beta}^{(j)} \varphi_{\beta}^{(j)} = \lambda^{-1} \varphi_{\alpha}^{(j)}; \quad K_{\alpha\beta}^{(j)} = -\sqrt{A_{\alpha}} G_{\alpha\beta}^{(j)} \sqrt{A_{\beta}}; \quad (2.10)$$

$$\varphi_{\alpha}^{(j)} = \sqrt{A_{\alpha}} \psi_{(j)}(i w_q, u_s(x_l)); \quad G_{\alpha\beta}^{(j)} = G_{(j)}(i w_q, u_s(x_l), u_k(x_i)).$$

Применяя к основной матрице системы уравнений (2.10) любой метод решения линейной алгебраической задачи на собственные значения [6], можно определить значения константы связи λ , при которых существуют ненулевые решения для фиксированного значения параметра w_q .

В случае, когда требуется искать собственные значения энергии $2E_q$ (величины w_q) для фиксированного значения константы связи λ возникает необходимость решения нелинейной задачи на собственные значения для систем уравнений (2.10). Для решения такой задачи мы использовали метод итераций. Изложим суть этого метода. Представим системы алгебраических уравнений (2.10) в виде

$$\tilde{K}^{(j)}(w_q) \varphi^{(j)} = \sin(w_q) \varphi^{(j)}; \quad \tilde{K}_{\alpha\beta}^{(j)}(w_q) = -\lambda \sqrt{A_{\alpha}} \tilde{G}_{\alpha\beta}^{(j)} \sqrt{A_{\beta}}; \quad (2.11)$$

$$\varphi_{\alpha}^{(j)} = \sqrt{A_{\alpha}} \tilde{G}_{\alpha\beta}^{(j)} \sqrt{A_{\beta}}; \quad \tilde{G}_{\alpha\beta}^{(j)} = \sin(w_q) G_{(j)}(i w_q, u_s(x_l), u_k(x_i)),$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, M \cdot N$,

$\beta = 1, 2, \dots, M \cdot N$.

Для рассматриваемого состояния выберем некоторое физически разумное начальное приближение величины $w_q^{(0)}$ (энергии $2E_q^{(0)} = 2m \cos w_q^{(0)}$) и вычислим её дальнейшие приближения по формулам

$$\tilde{K}^{(j)}(w_q^{(s)}) \varphi^{(j)} = \sin(w_q^{(s+1)}) \varphi^{(j)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Для нахождения собственных значений матриц $\tilde{K}^{(j)}(w_q^{(s)})$ можно использовать стандартные методы решения линейных алгебраических задач на собственные значения [6]. Процесс (2.12) продолжается до выполнения условия $|w_q^{(s+1)} - w_q^{(s)}| \leq \varepsilon$, где ε – требуемая точность вычисления собственных значений матрицы (мы задаём $\varepsilon = 10^{-12}$).

Контроль точности нахождения собственных значений осуществлялся параллельным решением уравнений в РКП (2.2) и соответствующих им уравнений в ИП (1.5). Для решения уравнений в ИП также был использован вышеизложенный метод составных квадратур Гаусса.

Для независимых от энергии потенциалов условия нормировки ВФ связанных состояний были выбраны в одинаковой для всех j форме

$$\int_0^{\infty} dr \psi_{(j)}^2(iw_q, r) = 1; \quad \int_0^{\infty} d\chi \psi_{(j)}^2(iw_q, \chi) = 1, \quad (2.13)$$

аналогичной нерелятивистскому выражению.

2.2. Численные решения двухчастичных уравнений с модельными потенциалами

Для тестирования и отладки программ, реализующих метод, решения уравнений для связанных состояний (1.4) и (1.5) были найдены в случае модельных потенциалов, широко используемых в квантовой механике

$$V(r) = r^n \exp(-\alpha r). \quad (2.14)$$

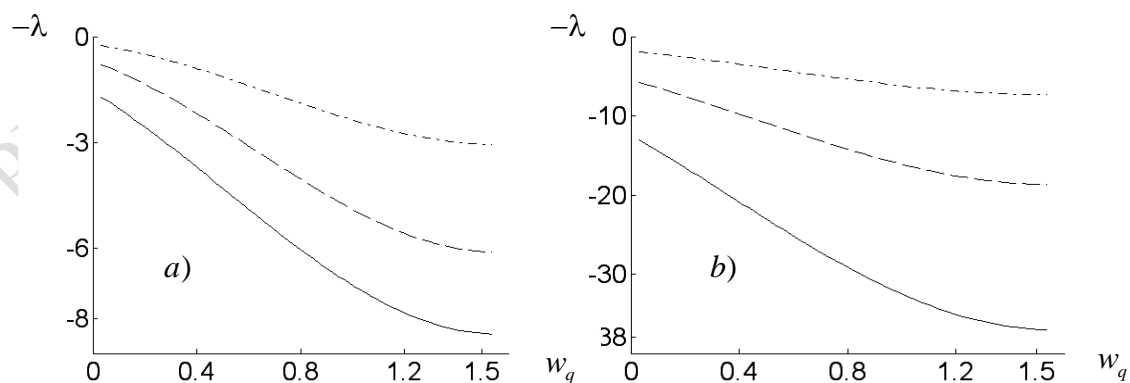
При этом в выражении (2.14) под r мы подразумеваем координату в РКП. В ИП этот потенциал имеет следующий вид:

$$V(\chi, \chi') = V(\chi - \chi') - V(\chi + \chi'), \quad (2.15)$$

$$V(\chi) = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) (\alpha^2 + m^2 \chi^2)^{-\frac{n+1}{2}} \cos((n+1) \arctg(m\chi/\alpha)),$$

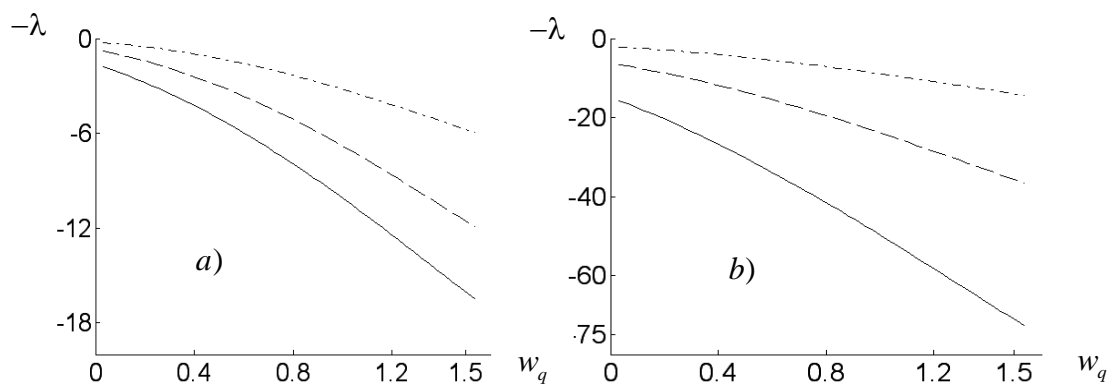
где $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

На рисунках 2.1–2.4 приведены результаты численных расчётов для спектров энергии связанных состояний в случае потенциала (2.14) при $n=0, 1, 2$, $\alpha=1$. При этом на всех этих рисунках $n=0$ соответствует сплошная линия, $n=1$ – штриховая линия, $n=2$ – штрихпунктирная линия. На рисунках видно, что с ростом n значение величины λ увеличивается для каждого фиксированного значения параметра w_q .



а – основные состояния; б – первые возбуждённые состояния

Рисунок 2.1 – Условия квантования энергии связанных состояний для $j=1$

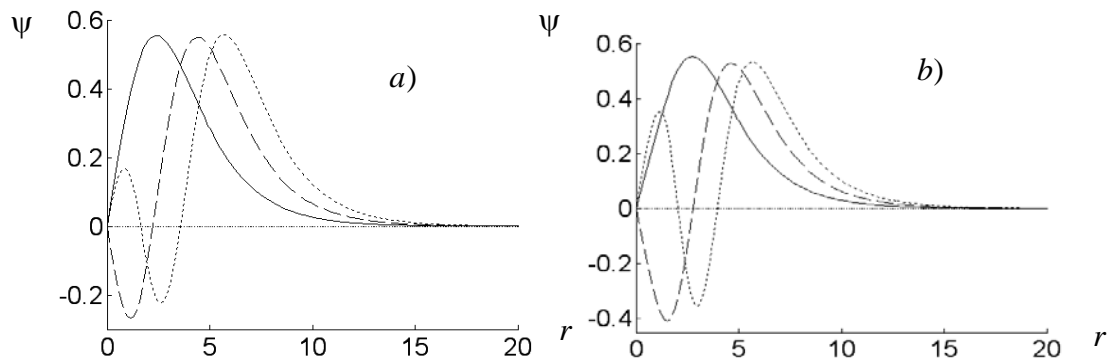


а – основные состояния; б – первые возбуждённые состояния

Рисунок 2.2 – Условия квантования энергии связанных состояний для $j = 2$

Результаты численных расчётов при $\alpha = 1$, $w_q = 0,5$ для волновых функций в РКП как функций переменной r приведены на рисунке 2.3: основное состояние – сплошная линия; первое возбуждённое состояние – штриховая линия; второе возбуждённое состояние – пунктирная линия.

На рисунке видно, что число нулей ВФ при $r \neq 0$ равно порядковому номеру возбуждённого состояния; в основном состоянии нулей нет.



а – для $j = 1$, $n = 1$; б – для $j = 3$, $n = 2$

Рисунок 2.3 – Графики волновых функций

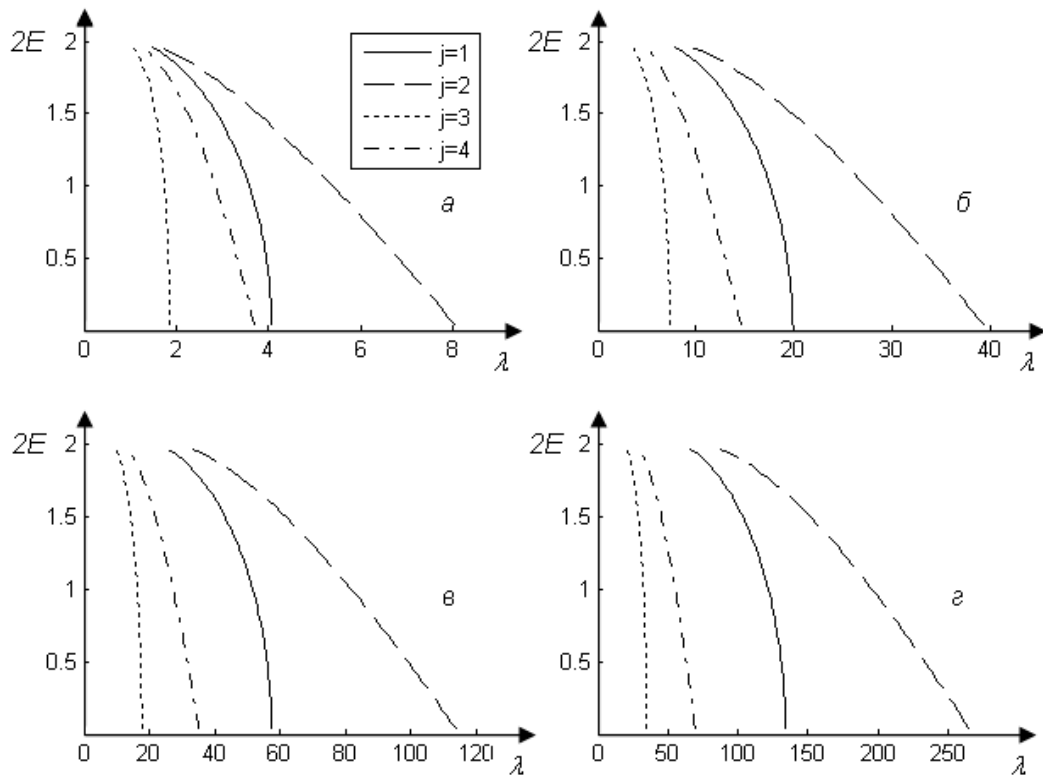
Рассмотрим теперь решение уравнений для связанных состояний в случае потенциала однобозонного обмена [3], имеющего в РКП и в импульсном представлении следующий вид:

$$V(r) = \frac{\text{ch}[(\pi - \alpha)mr]}{r \text{sh}(\pi mr)}; \quad V(\chi, \chi') = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\text{ch}(\chi + \chi') - \cos \alpha}{\text{ch}(\chi - \chi') - \cos \alpha} \right), \quad (2.16)$$

где параметр α связан с массой μ обменного скалярного бозона соотношением $\cos \alpha = 1 - \mu^2 / 2m^2$.

Потенциал (2.16) был получен в рамках подхода, основанного на использовании квазипотенциального уравнения для амплитуды рассеяния, заданной фейнмановскими диаграммами и, как нетрудно убедиться, является релятивистским обобщением квантовомеханического потенциала Юкавы $\exp(-\mu r)/r$. Основным отличием релятивистского потенциала (2.16) от нерелятивистского является более сильная сингулярность первого при $r=0$ (r^{-2} для потенциала (2.16) и r^{-1} для потенциала Юкавы). На рисунке 2.4 приведены графики зависимости собственных значений энергии от величины константы связи для потенциала (2.16).

В случае рассмотренных потенциалов (2.14) и (2.16) для всех j собственные значения константы связи λ , найденные при решении уравнений в РКП и в ИП, совпадают: для основного состояния с точностью до 10^{-9} ; для первого возбуждённого состояния – с точностью до 10^{-8} ; для второго возбуждённого состояния – с точностью до 10^{-7} .



а – основные состояния, б – первые возбуждённые состояния,
в – вторые возбуждённые состояния, г – третьи возбуждённые состояния

Рисунок 2.4 – Собственные значения энергии
для потенциала однобозонного обмена (2.16)

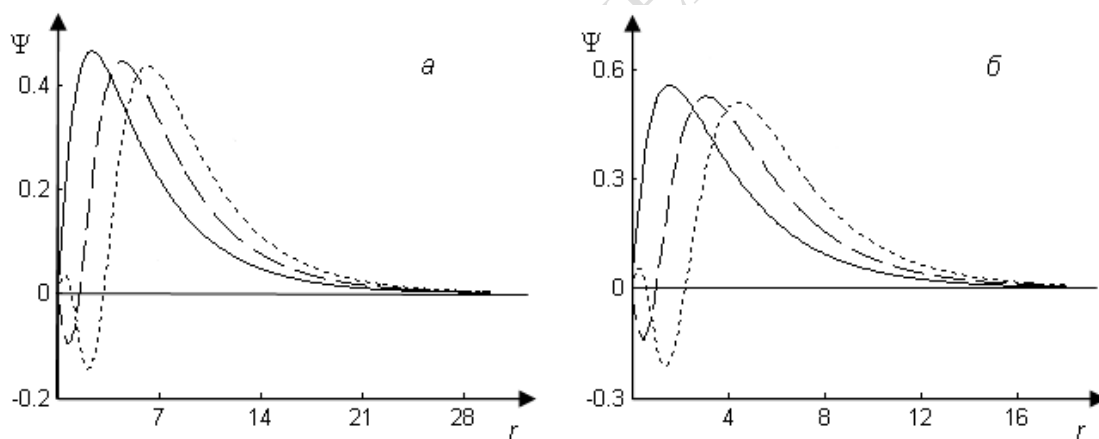
Для сравнения эффективности применения метода составных квадратур Гаусса при решении уравнений в РКП и в ИП в таблице 2.1 приведены собственные значения константы связи λ для потенциала однобозонного

обмена (2.16), найденные при разных значениях N и $m=1$, $\mu=0,5$, $2E=1,95$, $R=30$. Из таблицы 2.1 видно, что для достижения приемлемой точности решения уравнений в ИП необходимо большее число N , чем при решении уравнений в РКП, то есть для решения интегральных уравнений в РКП обсуждаемый метод более эффективен.

Таблица 2.1 – Собственные значения λ в случае уравнения Кадышевского

Потенциал (2.16)	N	Номер состояния			
		1	2	3	4
Решение в РКП	60	1,6790109911	9,8990581382	33,9274572665	89,4232608290
	120	1,6790109915	9,8990581443	33,9274573118	89,4232610669
Решение в ИП	60	1,6790231659	9,8992341171	33,9288543736	89,4303153465
	120	1,6790113620	9,8990631390	33,9274892891	89,4234063976

На рисунке 2.5 приведены ВФ в РКП: сплошные линии соответствуют основным состояниям, штриховые линии – первым возбуждённым состояниям, пунктирные линии – вторым возбуждённым состояниям.



а – уравнение Логунова – Тавхелидзе;

б – модифицированное уравнение Логунова – Тавхелидзе

Рисунок 2.5 – Волновые функции для потенциала однобозонного обмена (2.16)

На рисунке 2.5 видно, что ВФ основных состояний не имеют нулей при $r \neq 0$, ВФ первых возбуждённых состояний имеют один ноль, а ВФ вторых возбуждённых состояний – два нуля. Расчёты для следующих состояний показывают, что, как и в случае потенциала (2.14), для всех рассматриваемых здесь уравнений количество нулей ВФ при $r \neq 0$ равно порядковому номеру возбуждённого состояния. Аналогичным свойством обладают и волновые функции в ИП. В нерелятивистской теории такое же

свойство волновых функций связанных систем доказывается в виде теоремы. В релятивистской теории такое доказательство нам неизвестно.

2.3. Решение уравнений в случае слабосвязанных систем для потенциалов кулоновского типа

Рассмотрим теперь решение уравнений (1.4) с потенциалом (2.16) в РКП при $\mu=0$ и малых значениях w_q (слабосвязанные системы). Эта простая теоретическая модель может быть использована, например, для описания электромагнитного взаимодействия между частицами в приближении обмена «скалярным фотоном». При нулевой массе обменного бозона потенциал (2.16) в РКП при больших r ведёт себя как r^{-1} . Кроме того, при $w_q \rightarrow 0$ функции Грина в РКП (1.2) становятся медленно убывающими при увеличении r (или r'). Всё это означает, что для решения интегральных уравнений с требуемой точностью необходимо увеличивать числа R и N , то есть эффективность метода составных квадратур Гаусса снижается. Поэтому при решении задач в случае медленно убывающих с ростом r' потенциалов, таких как (2.16) при $\mu=0$, или потенциала Кулона – требуется модификация рассмотренного метода. С этой целью была использована замена переменной $w_q r = x$. После такой замены ядра уравнений при $x \rightarrow \infty$ убывают достаточно быстро и можно эффективно применять для решения метод составных квадратур Гаусса с небольшим количеством узлов. Метод был опробован для решения модифицированного уравнения Логанова – Тавхелидзе в случае потенциала

$$\lambda V(r) = \lambda r^{-1} \text{th}(\pi m r / 2), \quad (2.17)$$

допускающего точные решения и имеющего при больших r одинаковую с (2.16) при $\mu=0$ асимптотику λr^{-1} . Выражение (2.17) – это потенциал Кулона в РКП, условие квантования энергии для которого имеет вид

$$2E_n = m\sqrt{4 - \lambda^2/n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

При численном решении уравнения константа связи λ была выбрана равной постоянной тонкой структуры: $\lambda = 7,2973 \times 10^{-3}$, что, как нетрудно заключить, анализируя формулу (2.18), соответствует энергии, близкой к $2m$ ($w_q \cong 0,0036$). Результаты численного решения приведены в таблице 2.2.

Сравнивая результаты точного и численного решения уравнений (1.4) с потенциалом (2.17), нетрудно видеть, что с использованием предложенной замены переменной можно эффективно решать интегральные уравнения методом составных квадратур Гаусса.

Таблица 2.2 – Собственные значения $2E/m - 2$ для потенциала (2.17)

Номер состояния n	Точное значение $(2E/m - 2) \times 10^5$	Приближённое значение $(2E/m - 2) \cdot 10^5$			
		$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$
1	-1,331288	-1,331751	-1,331375	-1,331300	-1,331288
2	-0,332821	-0,333048	-0,332860	-0,332823	-0,332817
3	-0,147920	-0,148001	-0,147876	-0,147850	-0,147846
4	-0,083205	-0,082741	-0,082644	-0,082625	-0,082622

В ИП потенциал (2.16) для $\mu = 0$ становится сингулярным при $\chi = \chi'$, что существенно усложняет задачу и для её решения требуется использовать специальные, довольно громоздкие, методы.

В целях проверки адекватности рассматриваемых моделей проведём сравнение полученных результатов с экспериментально измеренной разностью энергий первого возбуждённого и основного состояния ортопозитрония, которой соответствует частота 1233607216,4(3,2) МГц. Отметим, что спин ортопозитрония равен единице, а спин парапозитрония – нулю, то есть скалярная модель, рассматриваемая в работе приемлема в большей мере для описания парапозитрония. Однако из опыта известна частота перехода для ортопозитрония, поэтому мы проводим сравнение с экспериментально измеренной величиной именно для него. В таблице 2.3 приведены значения частоты перехода между уровнями энергии первого возбуждённого состояния и основного состояния, определёнными при решении уравнений (1.4) с потенциалами (2.16), (2.17) и потенциалом r^{-1} .

Таблица 2.3 – Частота перехода, МГц

Уравнение	N	Тип потенциала		
		$r^{-1} \text{th}(\pi mr/2)$	$r^{-1} \text{cth}(\pi mr)$	r^{-1}
		Частота перехода, МГц		
Логунова – Тавхелидзе	400	1233673256	1233695644	1233688627
	800	1233673569	1233695415	1233688064
Кадышевского	400	1233651095	1233673463	1233666466
	800	1233651664	1233673511	1233666259
Логунова – Тавхелидзе модифицированное	400	1233708292	1233730674	1233723659
	800	1233701226	1233723067	1233715718
Кадышевского модифицированное	400	1233682565	1233704950	1233697934
	800	1233679188	1233701031	1233693681

Частота перехода из первого возбуждённого состояния в основное, полученная в результате решения уравнения Шрёдингера с потенциалом Кулона, равна 1233690736 МГц. Частота перехода, рассчитанная на основании условия квантования энергии (2.18), равна 1233695868 МГц. Сравнение приведенных результатов показывает, что наименьшее отличие от экспериментально измеренного значения имеет результат, полученный при решении уравнения Кадышевского с потенциалом (2.17).

2.4. Форм-факторы упругого рассеяния и константы распада двухчастичных систем

В качестве примера использования найденных в настоящей теме решений рассмотрим вычисление форм-факторов упругого рассеяния и констант распада двухчастичной связанной системы на два фотона.

В работе [8] форм-фактор упругого рассеяния фотона на двухчастичной системе был определён как матричный элемент локального оператора тока между двумя связанными s -состояниями двух скалярных частиц через ВФ, удовлетворяющие квазипотенциальному уравнению. Гамильтониан взаимодействия в этом случае имеет следующий вид:

$$H(x) = -e\varphi_1^+(x)\varphi_1(x)A(x) - e\varphi_2^+(x)\varphi_2(x)A(x), \quad (2.19)$$

где $\varphi_{1,2}(x)$, $A(x)$ – скалярные поля;

e – величина, связанная с константой связи как $e = \sqrt{4\pi\lambda}$.

Выражение для упругого форм-фактора $F_{(j)}(\chi_q)$ в случае рассеяния скалярного фотона имеет вид [9]

$$F_{(j)}(\chi_q) = \frac{8\pi e}{m\chi_q \operatorname{sh} \chi_q} \int_0^\infty dr \sin(\chi_q mr) |\psi_{(j)}(iw_q, r)|^2, \quad (2.20)$$

где χ_q – быстрота, связанная с квадратом 4-импульса двухчастичной системы до и после рассеяния $p = (p_0, \mathbf{p})$ и $p' = (p'_0, \mathbf{p}')$ соотношением $(p' - p)^2 = (p'_0 - p_0)^2 - (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 = 2p^2(\operatorname{ch} \chi_q - 1)$.

Результаты численных расчетов для упругих форм-факторов (2.20) при $m=1$, $\mu=0,5$, $2E=1,95$ приведены на рисунке 2.6. Сплошные линии соответствуют основным состояниям, штриховые линии – первым возбуждённым состояниям, пунктирные линии – вторым возбуждённым состояниям. На рисунках 2.6 и 2.7 видно, что форм-факторы для основного состояния нулей не имеют, для второго состояния имеют один ноль и для третьего состояния имеют два нуля. Численные расчеты показывают, что для следующих состояний наблюдается то же самое и

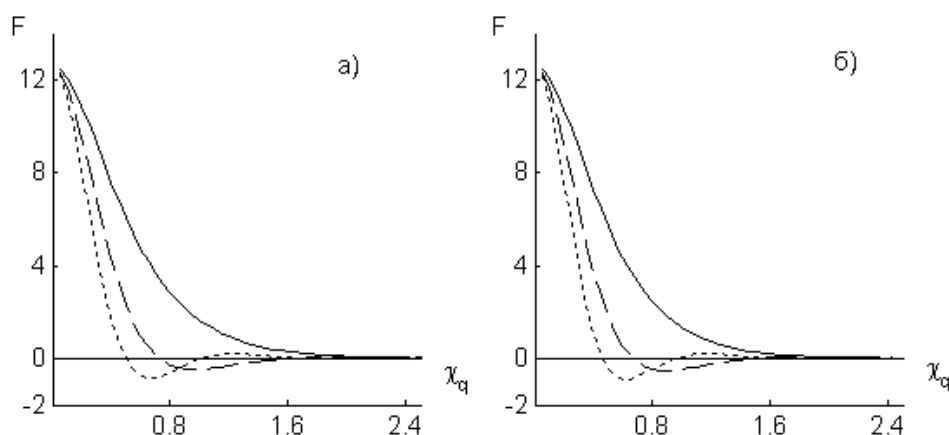
число нулей форм-факторов равно «номеру возбуждённого состояния» для всех рассматриваемых здесь j , то есть количество нулей упругих форм-факторов и волновых функций одинаково.

Выражение для константы распада системы двух скалярных частиц на два фотона было получено в работе [9] исходя из амплитуды процесса этого распада, и оно имеет следующий вид:

$$f_{(j)}(2E) = -\frac{4\sqrt{2\pi\lambda S}}{2E} \int_0^\infty d\chi \chi \Psi_{(j)}(w, \chi) = -\frac{4\pi\sqrt{2\pi\lambda S}}{2E} \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{(j)}(w, r) \Big|_{r=0}, \quad (2.21)$$

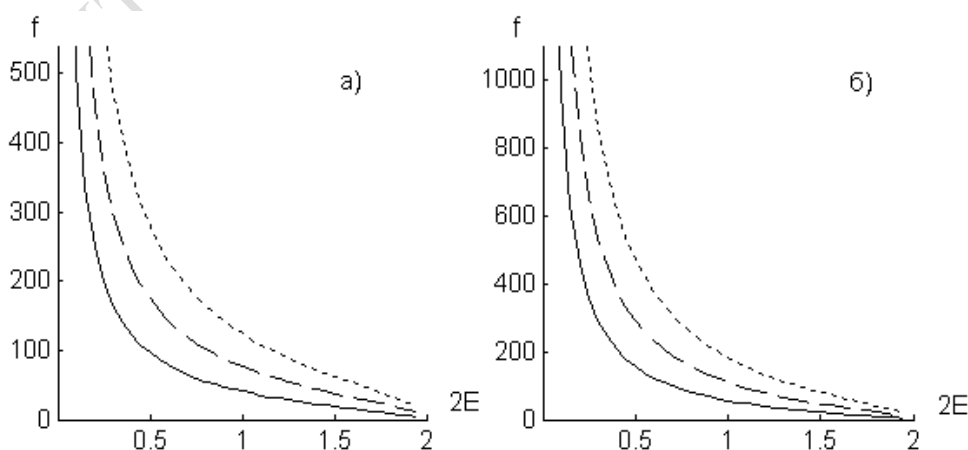
где S – величина, зависящая от типа частиц системы (в случае скалярных частиц $S = 1/2$).

На рисунке 2.7 приведены результаты численных расчетов для выражений (2.21) при $\mu = 0,5$. Тип линий на рисунке 2.7 соответствует номеру состояния, также как и на рисунке 2.6.



а – уравнение Логунова – Тавхелидзе; б – уравнение Кадышевского

Рисунок 2.6 – Форм-факторы упругого рассеяния



а – уравнение Логунова –Тавхелидзе; б – уравнение Кадышевского

Рисунок 2.7 – Константы распада

Вероятность распада (ширина распада) двухчастичной системы на два фотона пропорциональна квадрату модуля константы распада этого процесса. В работе [10] было получено выражение для ширины распада системы двух частиц на два фотона, содержащее производную волновой функции в РКП и имеющее следующий вид:

$$\Gamma_{(j)} = 4\pi\lambda^2/m^2 \left| \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{(j)}(iw, r) \right|_{r=0}^2. \quad (2.22)$$

Рассмотрим распад парапозитрония: связанной системы, состоящей из электрона и позитрона с нулевым спином на два фотона. Подставив в (2.22) точную нерелятивистскую волновую функцию основного состояния для потенциала Кулона [11] при $\lambda = 7,2973 \times 10^{-3}$, получим значение ширины распада $\Gamma = 8032,5 \text{ мкс}^{-1}$. Подставив точное выражение для волновой функции, полученной в случае релятивистского потенциала (2.17), в выражение (2.22), получим $\Gamma = 7995,18 \text{ мкс}^{-1}$. В таблице 2.4 приведены значения ширины распада для основного состояния, найденные на основании численного решения двухчастичных релятивистских уравнений (1.4) в случае потенциалов (2.16) при $\mu = 0$, (2.17) и потенциала вида r^{-1} .

Таблица 2.4 – Ширина распада парапозитрония, мкс^{-1}

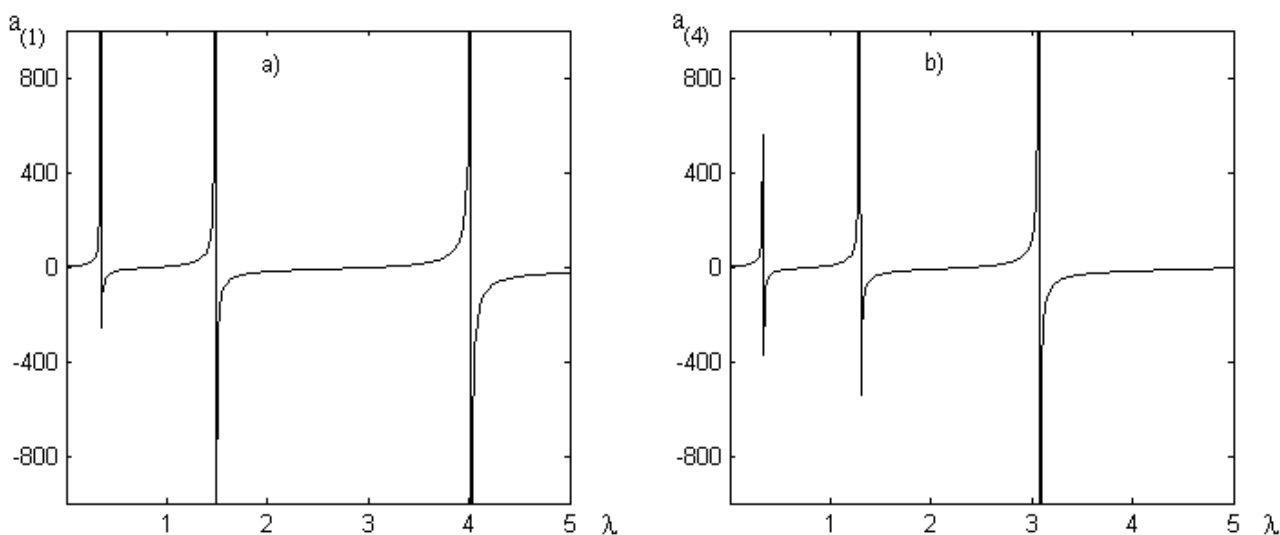
Уравнение	N	Тип потенциала		
		$r^{-1} \text{th}(\pi mr/2)$	$r^{-1} \text{coth}(\pi mr)$	r^{-1}
		Ширина распада, мкс^{-1}		
Логунова –Тавхелидзе	800	7938,39	7994,44	7956,08
	1600	7938,47	7995,03	7956,45
Кадышевского	800	7918,82	7966,15	7933,91
	1600	7918,91	7966,61	7934,23
Логунова –Тавхелидзе модифицированное	800	7995,24	8123,69	8031,52
	1600	7995,03	8127,06	8032,98
Кадышевского модифицированное	800	7966,67	8058,66	7993,61
	1600	7966,60	8060,62	7994,52

Экспериментально установленное значение ширины распада для парапозитрония равно $7990,9(17) \text{ мкс}^{-1}$. Сравнивая его с приведенными в таблице значениями, нетрудно увидеть, что наилучшее совпадение с экспериментально измеренным результатом даёт величина, вычисленная на основании решения модифицированного уравнения Логунова –Тавхелидзе с потенциалом $r^{-1} \text{th}(\pi mr/2)$.

2.5. Состояния рассеяния систем двух скалярных частиц в случае потенциалов однобозонного обмена

Рассмотрим теперь решение двухчастичных уравнений для состояний рассеяния (1.1) с потенциалом однобозонного обмена (2.16). Полученные численные значения ВФ используем для нахождения амплитуд рассеяния, длин рассеяния и фазовых сдвигов по формулам (1.9)–(1.11).

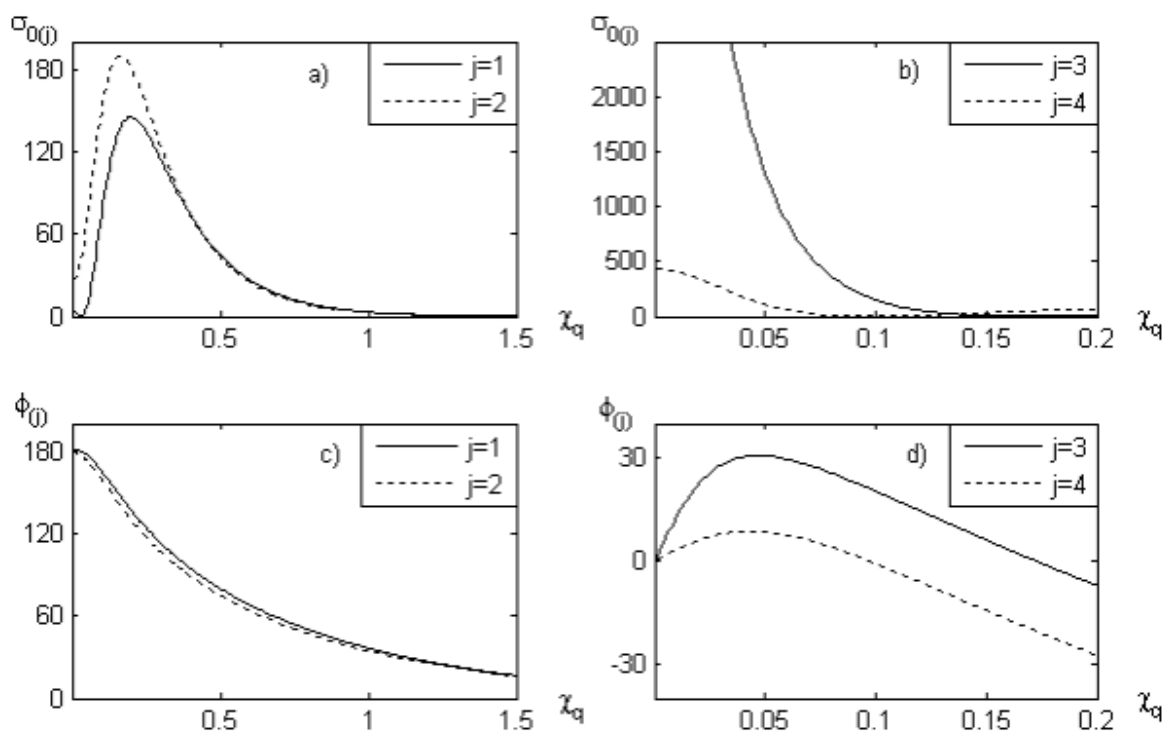
На рисунке 2.8 проиллюстрированы результаты вычисления длин рассеяния для уравнения Логунова – Тавхелидзе и модифицированного уравнения Кадышевского с потенциалом (2.16) при $m=1$, $\mu=0,2$. На рисунке 2.8 видно, что при некоторых значениях константах связи величины длин рассеяния резко возрастают. Аналогичное поведение зависимости длины рассеяния от константы связи хорошо известно и в нерелятивистской теории. Например, такое же свойство характерно для длины рассеяния в случае потенциальной ямы [12]. Мы не приводим рисунки для зависимостей длин рассеяния от величины константы связи в случае других релятивистских двухчастичных уравнений с потенциалом (2.16), так как они имеют похожий вид.



а – уравнение Логунова –Тавхелидзе;
б – модифицированное уравнение Кадышевского

Рисунок 2.8 – Зависимость длин рассеяния от константы связи

На рисунке 2.9 приведены результаты вычисления парциальных сечений рассеяния и фазовых сдвигов как функций быстроты для потенциала (2.16) при $m=1$, $\mu=0,2$, $\lambda=1$. Как видно на рисунке, сечения рассеяния и фазовые сдвиги имеют гладкое поведение.



a, b – сечения рассеяния; c, d – фазовые сдвиги

Рисунок 2.9 – Зависимость парциальных сечений рассеяния и соответствующих фазовых сдвигов от быстроты

В результате численных расчётов показано, что все амплитуды рассеяния, полученные в рамках рассматриваемых в этом разделе моделей взаимодействия, удовлетворяют условию унитарности $\text{Im} f_{(j)}(\chi_q) = q |f_{(j)}(\chi_q)|^2$, которое для суперпозиции двух δ -потенциалов в РКП было доказано точно.

Выводы

В данной теме рассмотрены методы численного решения релятивистских двухчастичных интегральных уравнений в РКП и в ИП. В целях демонстрации эффективности методов решения, реализующих вычисления, найдены решения двухчастичных уравнений для связанных состояний в случае модельного потенциала квантовой механики и в случае простейшего варианта потенциала однобозонного обмена – в предположении, что масса обменного бозона не равна нулю. В случае слабосвязанных систем и нулевой массы обменного бозона произведена модификация рассмотренного метода решения двухчастичных уравнений в РКП. Этим методом были получены решения уравнений с потенциалом безмассового бозона обмена, суперпозицией потенциалов однобозонного обмена и потенциалом вида r^{-1} в случае связанных состояний. На основании полученных решений (ВФ и энергий связанных состояний) вычислены

упругие форм-факторы и константы распада. Проведено сравнение найденных численно спектров энергии и констант распада (ширин распада) с экспериментальными данными для позитрония.

Найдены численные решения релятивистских уравнений КТП, описывающих s -состояния рассеяния системы двух скалярных частиц с одним из вариантов потенциала однобозонного обмена в РКП. На основании полученных решений вычислены амплитуды рассеяния, фазовые сдвиги и длины рассеяния. Показано, что все численные значения амплитуд рассеяния, найденные в случае рассматриваемой модели взаимодействия, удовлетворяют условию унитарности.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит основная идея метода квадратур для нахождения численных решений интегральных уравнений?
2. Какие виды квадратур вы знаете? В чём состоит основная идея метода составных квадратур Гаусса?
3. Получите выражения (2.7), (2.8).
4. В чём заключается метод итераций применительно к решению нелинейной задачи на собственные значения?
5. Используя интегральное преобразование для квазипотенциала (1.6), получите выражение для потенциала в ИП (2.15) при $n = 0, 1, 2$.
6. Какие особенности поведения имеют волновые функции в зависимости от номера состояния?
7. Из первой части формулы для константы распада (2.21) получите вторую часть, используя интегральное преобразование для волновой функции.

3. Решение релятивистских задач о связанных состояниях систем двух частиц с зависящими от энергии потенциалами

3.1. Потенциалы однобозонного обмена, зависящие от энергии системы

Выражения для релятивистских потенциалов взаимодействия двух частиц посредством обмена одним бозоном были получены в рамках различных вариантов квазипотенциального подхода в КТП. Одно из основных свойств таких потенциалов – это их зависимость от полной энергии системы. Это свойство потенциалов обусловлено эффектом запаздывания. Следствием такой зависимости является нелинейность задачи на собственные значения энергии системы для двухчастичных уравнений в ИП, в которые эти потенциалы входят, и, следовательно, необходимость применения для её решения специальных методов.

В настоящем разделе получены численные решения уравнений КТП, описывающих связанные s -состояния системы двух частиц одинаковой массы в случае различных вариантов потенциалов однобозонного обмена, зависящих от энергии. Масса обменного бозона равна нулю. На основании найденных решений затем рассчитаны константы распада связанной системы частицы и античастицы на два фотона.

Рассмотрим решение уравнений Логунова – Тавхелидзе ($j=1$) и Кадышевского ($j=2$) в импульсном представлении (1.5). Выполнив в этих уравнениях замену переменных и переобозначение функций

$$p = m \operatorname{sh} \chi, \quad k = m \operatorname{sh} \chi', \quad \psi(2E, p) = \psi(iw_q, \chi), \quad V(2E, p, k) = V(\chi, \chi'),$$

представим их в форме

$$E_p^2 \psi(2E, p) + \frac{2\lambda m^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(2E, p, k) \psi(2E, k) = E^2 \psi(2E, p), \quad E_p = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (3.1)$$

$$2E_p \psi(2E, p) + \frac{2\lambda m^2}{\pi E_p} \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(2E, p, k) \psi(2E, k) = 2E \psi(2E, p), \quad E_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (3.2)$$

где (3.1) – уравнение Логунова – Тавхелидзе,

(3.2) – уравнение Кадышевского.

Решение модифицированных вариантов уравнений (1.5) не проведено, так как в этом случае асимптотическое поведение ВФ при $k \rightarrow \infty$ не обеспечивает сходимости интегралов.

В случае потенциалов, зависящих от энергии, условие нормировки релятивистских ВФ связанных состояний имеет довольно сложный вид. В частности, для s -состояний оно представляется следующим образом:

$$\int_0^{\infty} dp \frac{m}{E_p} \psi^2(2E, p) - \frac{2\lambda m^3}{\pi E} \int_0^{\infty} \frac{dp}{E_p} \psi(2E, p) \int_0^{\infty} \frac{dk}{E_k} \psi(2E, k) \frac{\partial}{\partial(2E)} V(2E, p, k) = 1 \quad (3.3)$$

(для ВФ, удовлетворяющей уравнению Логунова – Тавхелидзе (3.1));

$$\frac{m}{E} \int_0^{\infty} dp \psi^2(2E, p) - \frac{2\lambda m^3}{\pi E} \int_0^{\infty} \frac{dp}{E_p} \psi(2E, p) \int_0^{\infty} \frac{dk}{E_k} \psi(2E, k) \frac{\partial}{\partial(2E)} V(2E, p, k) = 1 \quad (3.4)$$

(для ВФ, удовлетворяющей уравнению Кадышевского (3.2)).

Рассмотрим решение уравнений (3.1), (3.2) с несколькими вариантами зависящих от энергии потенциалов однобозонного обмена для систем двух скалярных частиц и систем двух частиц спина $1/2$.

Одним из первых потенциалов, полученных в рамках квазипотенциального подхода, описывающих взаимодействие двух скалярных частиц, является выражение [2]

$$V(2E, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|(E_p + E_k + |\mathbf{p} - \mathbf{k}| - 2E)}. \quad (3.5)$$

Отметим, что этот потенциал был получен на основе диаграммной техники гамильтоновой формулировки КТП. В результате частичного разложения потенциала (3.5) по полиномам Лежандра $P_l(\mathbf{p}\mathbf{k}/pk)$ в случае s -волн получено следующее выражение:

$$V(2E, p, k) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_p + E_k + |p - k| - 2E}{E_p + E_k + p + k - 2E} \right). \quad (3.6)$$

В работе [12] на основе вычисления запаздывающей (retarded) и причинной (causal) ФГ системы двух скалярных частиц были найдены потенциалы однобозонного обмена

$$\begin{aligned} V_{ret}(2E, p, k) = & \frac{1}{2} \left[A(2E, p, k) \ln \left(\frac{E_p + E_k + |p - k| - 2E}{E_p + E_k + p + k - 2E} \right) + \right. \\ & \left. + B(2E, p, k) \ln \left(\frac{E_p + E_k + |p - k|}{E_p + E_k + p + k} \right) + \right. \\ & \left. + C(2E, p, k) \left(\frac{1}{E_p + E_k + |p - k|} - \frac{1}{E_p + E_k + p + k} \right) \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$A(2E, p, k) = \frac{E_p E_k}{E^2}, \quad B(2E, p, k) = 2 - \frac{2E}{E_p + E_k} - A(2E, p, k),$$

$$C(2E, p, k) = \frac{2(E_p - E)(E_k - E)}{E}$$

и

$$V_c(2E, p, k) = \frac{1}{4E_p E_k} \left[(E_p + E)(E_k + E)V_{ret}(2E, p, k) + (E_p - E)(E_k - E)V_{ret}(-2E, p, k) \right] \quad (3.8)$$

Потенциалы взаимодействия двух фермионов посредством обмена фотоном в случае различных значений полного спина и полного орбитального момента системы были получены в работе [13], как коэффициенты разложения общего выражения для трёхмерного потенциала взаимодействия двух фермионов по шаровым спинорам. В случае, когда спин системы равен нулю, потенциал имеет вид

$$V(2E, p, k) = \frac{1}{2m^2} (2E_p E_k - m^2) \ln \left(\frac{E_p + E_k + |p - k| - 2E}{E_p + E_k + p + k - 2E} \right). \quad (3.9)$$

Если же полный спин равен единице, потенциал имеет форму

$$V(2E, p, k) = \frac{1}{6m^2} \left[F_1(2E, p, k) \ln \left(\frac{E_p + E_k + |p - k| - 2E}{E_p + E_k + p + k - 2E} \right) + F_2(2E, p, k) \ln \left(\frac{E_p E_k + m^2 - pk}{E_p E_k + m^2 + pk} \right) + F_3(2E, p, k) \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2E_p E_k + 2m^2 - p^2 - k^2}}{|p - k|} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2E_p E_k + 2m^2 - p^2 - k^2}}{p + k} \right) \right) \right], \quad (3.10)$$

где

$$F_1(2E, p, k) = 4 \frac{2p^2 k^2 - (E_p E_k + m^2)(p^2 + k^2 - (E_p + E_k - 2E)^2)}{p^2 + k^2 - (E_p + E_k - 2E)^2 - 2(E_p E_k + m^2)} + 2E_p E_k + m^2,$$

$$F_2(2E, p, k) = 4 \frac{p^2 k^2 - (E_p E_k + m^2)^2}{2(E_p E_k + m^2) - (p^2 + k^2 - (E_p + E_k - 2E)^2)},$$

$$F_3(2E, p, k) = F_2(2E, p, k) \frac{2(E_p + E_k - 2E)}{\sqrt{2E_p E_k + 2m^2 - p^2 - k^2}}.$$

Квазипотенциал для псевдоскалярного связанного состояния фермиона и антифермиона был найден авторами работы [14] и в случае, когда обменный бозон является скалярным, он имеет вид

$$V(2E, p, k) = \left[\frac{b(2E, p, k)}{8m^2} + \frac{E_p E_k}{2m^2} \right] \ln \left(\frac{E_p + E_k + |p - k| - 2E}{E_p + E_k + p + k - 2E} \right) + \frac{a(2E, p, k)}{8m^2}, \quad (3.11)$$

где

$$a(2E, p, k) = (2E - E_p - E_k)(|p - k| - (p + k)) - 2pk,$$

$$b(2E, p, k) = 4m^2 + (2E)^2 - 4E(E_p + E_k).$$

Нетрудно видеть, что нерелятивистский предел (при $m \rightarrow \infty$) выражений (3.6)–(3.11) приводит к потенциалу Кулона.

3.2. Численные методы решения интегральных уравнений в импульсном представлении

Простой анализ асимптотик ВФ и потенциалов (3.6) – (3.11) при $k \rightarrow \infty$ и фиксированных p показывает, что интегралы в уравнениях (3.1), (3.2) сходятся, а значит, их решение возможно.

Для нахождения численных решений интегральных уравнений был использован метод квадратур. При этом бесконечный предел в интеграле был заменен достаточно большой величиной R , которая выбиралась с учётом требования к точности получаемых результатов. Второй способ, который был использован для замены полубесконечного интервала интегрирования конечным, – замена переменной $k/m = Cx/(1-x)$. При этом интервал интегрирования по переменной x был равен $[0; 1)$. Выбор параметра $C > 0$ влияет на скорость сходимости получаемых решений к точным при увеличении числа узлов квадратурной формулы. После замены интеграла суммой по квадратурной формуле интегральные уравнения были приведены к однородным системам линейных алгебраических уравнений, имеющим вид

$$K_1(2E)\psi = E^2\psi; \quad K_2(2E)\psi = 2E\psi, \quad (3.12)$$

где $K_{1,2}(2E)$ – матрицы, составленные на основе интегральных сумм уравнений (3.1), (3.2),

Ψ – векторы, составленные из значений ВФ в узловых точках квадратурной формулы.

Для решения нелинейных задач на собственные значения энергии $2E$ для систем уравнений (3.12) был использован метод итераций. Этот метод применялся во второй теме при решении двухчастичных уравнений в РКП. Рассмотрим теперь этот метод применительно к решению двухчастичных уравнений в ИП. Выберем физически разумное начальное приближение энергии $2E^{(0)}$ для рассматриваемого квантового состояния системы n и вычислим следующие приближения по формулам:

$$K_1(2E^{(s)})\Psi^{(s+1)} = (E^{(s+1)})^2 \Psi^{(s+1)}; \quad K_2(2E^{(s)})\Psi^{(s+1)} = 2E^{(s+1)}\Psi^{(s+1)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

При этом для нахождения собственных значений матриц $K_{1,2}(2E)$ могут быть использованы стандартные методы решения линейных спектральных задач [6]. Процесс вычисления (3.13) продолжается, пока не будет выполнено условие $|2E^{(s+1)} - 2E^{(s)}| < \varepsilon$, где ε – заданная точность нахождения собственных значений матриц (мы выбрали $\varepsilon = 10^{-12}$).

При решении интегральных уравнений возникла проблема медленной сходимости численных решений к точным при увеличении числа шагов квадратурной формулы. Это естественно, поскольку в потенциалах (3.6) – (3.11) содержится модуль от разности переменных, то есть производная от ядра уравнения по p (или по k) имеет разрыв. Поэтому для решения были использованы квадратуры прямоугольников на двух сетках с числом узлов N , $2N$, и к полученным на этих сетках значениям энергии $2E_N$, $2E_{2N}$ и нормированным по формулам (3.3) и (3.4) ВФ ψ_N , ψ_{2N} , была применена уточняющая процедура Ричардсона [6, 7]:

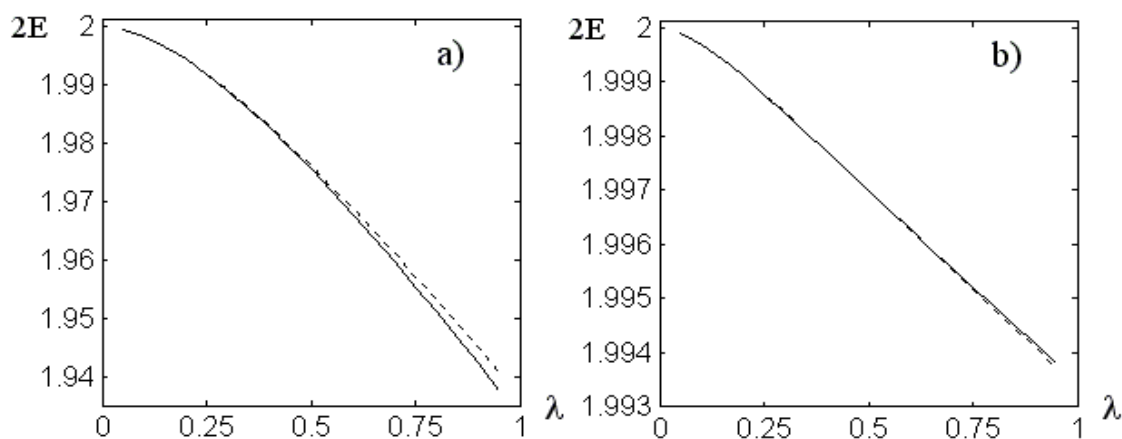
$$\psi = 4/3\psi_{2N} - 1/3\psi_N; \quad 2E = (4/3)2E_{2N} - (1/3)2E_N, \quad (3.14)$$

чем было обеспечено получение более точных значений $2E$ и ψ .

3.3. Решения двухчастичных уравнений в случае зависящих от энергии системы потенциалов однобозонного обмена

На рисунках 3.1 и 3.2 приведены зависимости собственных значений энергии системы в случае потенциала (3.6) для основных и первых возбуждённых состояний и ВФ, рассчитанные при $\lambda = 0,01$, $m = 1$ (для основного и первых двух возбуждённых состояний). На рисунке 3.2

видно, что, как и случае потенциалов, рассмотренных во второй теме, при $p \neq 0$ у ВФ основного состояния нулей нет, у ВФ первого возбуждённого состояния – один ноль, а у ВФ второго возбуждённого состояния – два нуля.



а – основные состояния, б – первые возбуждённые состояния;
сплошная линия – для уравнения Логунова – Тавхелидзе,
пунктирная линия – для уравнения Кадышевского

Рисунок 3.1 – Энергия связанных состояний

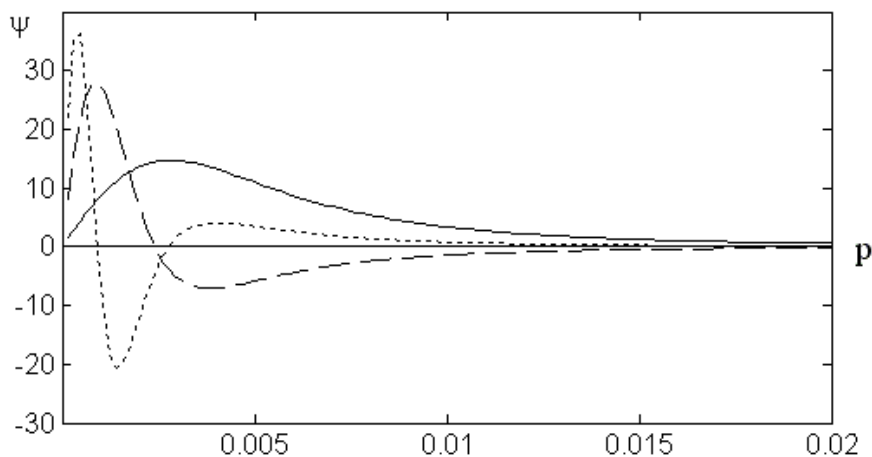


Рисунок 3.2 – ВФ для уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом (3.6)

Рассмотрим теперь решения уравнений (3.1), (3.2) с потенциалами (3.6) – (3.11) полученные при значении константы связи, равной постоянной тонкой структуры: $\lambda = 7,2973 \times 10^{-3}$. На рисунке 3.3 приведены волновые функции, найденные при решении уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом (3.8) для $C = 0,005$ и $N = 1000$. Номер кривой равен номеру состояния системы n . Графики зависимостей волновых функций от переменной p/m для уравнения Кадышевского и для других потенциалов имеют похожий вид, поэтому мы их не приводим.

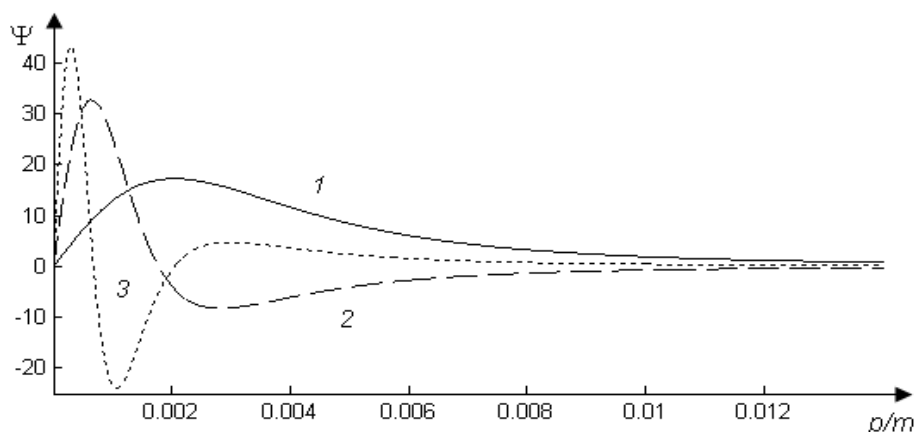


Рисунок 3.3 – ВФ для уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом (3.8)

Результаты вычисления энергии связи $2E/m - 2$ для первых четырёх состояний, представленные в безразмерной форме и умноженные на 10^5 , приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Энергия связи $(2E/m - 2) \cdot 10^5$

Потенциал	n	Уравнение					
		Логунова – Тавхелидзе			Кадышевского		
		$N = 800$	$N = 1600$	$N = 3200$	$N = 800$	$N = 1600$	$N = 3200$
(3.6)	1	-1,266335	-1,266331	-1,266331	-1,266304	-1,266300	-1,266300
	2	-0,300382	-0,300378	-0,300377	-0,300378	-0,300374	-0,300374
	3	-0,124172	-0,124168	-0,124168	-0,124171	-0,124167	-0,124167
	4	-0,064006	-0,064003	-0,064003	-0,064006	-0,064003	-0,064002
(3.7)	1	-1,266458	-1,266454	-1,266453	-1,266427	-1,266423	-1,266422
	2	-0,300401	-0,300397	-0,300397	-0,300398	-0,300394	-0,300393
	3	-0,124178	-0,124174	-0,124173	-0,124177	-0,124173	-0,124173
	4	-0,064009	-0,064005	-0,064005	-0,064009	-0,064005	-0,064005
(3.9)	1	-1,266519	-1,266515	-1,266515	-1,266488	-1,266484	-1,266484
	2	-0,300406	-0,300402	-0,300402	-0,300403	-0,300399	-0,300398
	3	-0,124178	-0,124174	-0,124174	-0,124177	-0,124173	-0,124173
	4	-0,064008	-0,064005	-0,064004	-0,064008	-0,064004	-0,064004
(3.11)	1	-1,266363	-1,266361	-1,266361	-1,266332	-1,266331	-1,266330
	2	-0,300382	-0,300381	-0,300381	-0,300378	-0,300377	-0,300377
	3	-0,124169	-0,124168	-0,124168	-0,124168	-0,124168	-0,124168
	4	-0,064003	-0,064003	-0,064003	-0,064003	-0,064003	-0,064003
		$N=400$	$N=800$	$N=1600$	$N=400$	$N=800$	$N=1600$
(3.8)	1	-1,266441	-1,266396	-1,266392	-1,266410	-1,266365	-1,266361
	2	-0,300434	-0,300391	-0,300387	-0,300430	-0,300388	-0,300384
	3	-0,124214	-0,124175	-0,124171	-0,124214	-0,124174	-0,124170
	4	-0,064045	-0,064008	-0,064004	-0,064045	-0,064007	-0,064004
(3.10)	1	-1,266482	-1,266437	-1,266432	-1,266451	-1,266406	-1,266402
	2	-0,300439	-0,300397	-0,300393	-0,300436	-0,300394	-0,300389
	3	-0,124215	-0,124176	-0,124172	-0,124215	-0,124175	-0,124171
	4	-0,064045	-0,064008	-0,064004	-0,064045	-0,064008	-0,064004

В столбцах таблицы 3.1 даны значения энергии, соответствующие каждому значению N , полученные экстраполяцией Ричардсона (3.14) результатов, найденных при N и $2N$ для потенциалов (3.6)–(3.10), параметр выбран равным $C = 0,01$, для потенциала (3.11) $C = 0,005$. Отметим, что при решении для достижения наилучшей точности мы выбирали малые значения параметра C (порядка 0,01). Это обусловлено тем, что, как видно на рисунке 3.2, волновые функции наиболее быстро изменяются при малых значениях p/m ($p/m \leq 0,005$).

На основании полученных значений энергии рассчитаны частоты перехода двухчастичных систем из первого возбуждённого состояния в основное. В таблице 3.2 приведены эти частоты.

Таблица 3.2 – Частота перехода, МГц

Потенциал	Уравнение			
	Логунова – Тавхелидзе		Кадышевского	
	$N = 1600$	$N = 3200$	$N = 1600$	$N = 3200$
(3.6)	1193521990	1193521987	1193488134	1193488121
(3.7)	1193649720	1193649714	1193615764	1193615758
(3.9)	1193719570	1193719559	1193685433	1193685431
(3.11)	1193555894	1193555835	1193521981	1193521930
	$N = 800$	$N = 1600$	$N = 800$	$N = 1600$
(3.8)	1193585705	1193585495	1193551800	1193551589
(3.10)	1193629089	1193628884	1193595151	1193594932

Сравнивая приведенные в таблице 3.2 частоты, рассчитанные на основе решений двухчастичных уравнений с потенциалами (3.6)–(3.11), с экспериментально измеренной величиной частоты перехода для ортопозитрония 1233607216,4 (3,2) МГц, отметим их удовлетворительное соответствие. Так как суммарный спин ортопозитрония равен единице, то предпочтительно сравнивать экспериментальное значение частоты перехода с результатами, полученными при решении уравнений с потенциалом (3.10), а не с другими потенциалами. Более подробно мы обсудим эти результаты после исследования ширины распада.

3.4. Константы распада двухчастичных систем в случае зависящих от энергии потенциалов однобозонного обмена

Для демонстрации возможного применения полученных численных решений приведём результаты вычисления констант распада системы

частица-античастица на два фотона, произведённого по формуле (2.21), которую мы представим в виде [9]:

$$f(\lambda) = \frac{-4\sqrt{2\pi\lambda}S}{2E} \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} \ln\left(\frac{p + E_p}{m}\right) \psi(2E, p). \quad (3.15)$$

Результаты численных расчетов по формуле (3.15) в случае уравнения Кадышевского с потенциалом (3.6) (для системы скалярных частиц $S = 1/2$) приведены на рисунке 3.4: сплошная линия – основное состояние; штриховая линия – первое возбуждённое состояние; пунктирная линия – второе возбуждённое состояние.

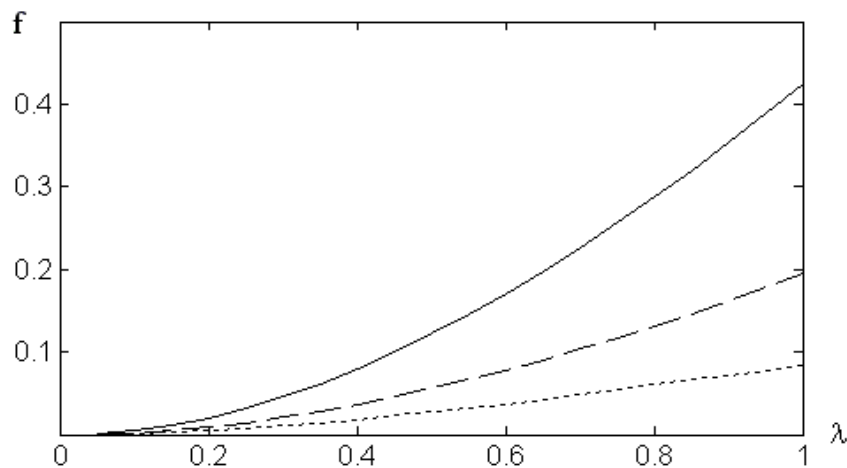


Рисунок 3.4 – Константа распада, полученная на основании решений уравнения Кадышевского с потенциалом (3.6)

Используем полученные численные ВФ для нахождения ещё одной величины, экспериментальное значение которой известно – ширины распада (вероятности распада) парапозитрония на два фотона. Выражение для ширины распада связанного состояния системы фермион-антифермион на два фотона в рамках квазипотенциального подхода было получено в работе [10] исходя из амплитуды этого процесса, и оно имеет следующий вид:

$$\Gamma = \frac{8m\lambda^2}{\pi} \left| \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} \ln\left(\frac{E_p + p}{m}\right) \psi(2E, p) \right|^2. \quad (3.16)$$

Вычисления ширин распада корректнее проводить для потенциала, описывающего состояние псевдоскалярной фермион-антифермионной системы (3.11), чем для других потенциалов. Тем не менее мы находим эти величины для всех рассматриваемых в этой теме потенциалов, кроме (3.10). Полученные нами значения ширины распада приведены в таблице 3.3. При нахождении интегралов в (3.16) были использованы те же квадратуры, что и при решении уравнений (3.1), (3.2). Для потенциалов

(3.6)–(3.8) вычисления были проведены при $C = 0,005$, для потенциала (3.9) – при $C = 0,015$, а для потенциала (3.11) – при $C = 0,01$.

Сравнивая полученные при вычислении значения ширины распада с экспериментально измеренным её значением $\Gamma = 7990,9(1,7)$, мкс⁻¹, можно сделать вывод об удовлетворительном описании паразитрония в рамках уравнений квазипотенциального типа с потенциалами однобозонного обмена (3.6)–(3.9) и (3.11).

Таблица 3.3 – Ширина распада паразитрония Γ , мкс⁻¹

Потенциал	Уравнение			
	Логунова – Тавхелидзе		Кадышевского	
	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = 1000$	$N = 2000$
(3.6)	7117,719	7117,730	7103,877	7103,883
(3.7)	7148,564	7148,592	7131,901	7131,915
(3.8)	7130,939	7130,953	7116,073	7116,081
(3.9)	7196,282	7196,448	7172,333	7172,449
(3.11)	7136,326	7136,399	7120,028	7120,077

Отметим, что значения частоты перехода и ширины распада, полученные на основании решений двухчастичных уравнений в РКП с потенциалами (2.16), (2.17) и r^{-1} , в большей мере соответствуют результатам эксперимента, чем значения этих величин, найденные при решении уравнений (3.1), (3.2) с энергозависимыми потенциалами (3.6)–(3.11). Так, например, при решении уравнения Кадышевского в РКП с потенциалом $-r^{-1} \text{th}(\pi mr/2)$, допускающим точное решение одного из вариантов двухчастичного уравнения, для частоты перехода из первого возбуждённого состояния ортопозитрония в основное было получено значение 1233651664 МГц, а для ширины распада паразитрония – $\Gamma = 7918,91$ мкс⁻¹. Это является дополнительным аргументом в пользу изучения феноменологических потенциалов, особенно тех, уравнения с которыми являются точно решаемыми.

Выводы

Таким образом, в теме 3 найдены численные решения уравнений Логунова – Тавхелидзе и уравнения Кадышевского для связанных s -состояний в случае различных вариантов потенциалов однобозонного обмена, описывающих взаимодействие двух скалярных частиц и двух частиц спина 1/2 (системы двух фермионов и системы фермион-антифермион). Масса обменного бозона была принята равной нулю.

На основании полученных решений (волновых функций и энергий связанных состояний) рассчитаны значения частоты перехода системы из первого возбуждённого состояния в основное и значения константы распада (ширины распада) двухчастичной связанной системы на два фотона. При сравнении вычисленных значений указанных величин с экспериментально измеренными величинами для позитрония продемонстрировано их удовлетворительное соответствие.

Вопросы для самоконтроля

1. Каким физическим эффектом обусловлена зависимость релятивистских потенциалов от энергии составной системы?
2. Получите формулу (3.6) как коэффициент разложения трёхмерного квазипотенциала (3.5) по полиномам Лежандра $P_l(\cos\theta)$ при $l = 0$.
3. Используя дополнительную литературу [6], получите формулу для экстраполяции Ричардсона (3.14).
4. Докажите эквивалентность формул для константы распада (3.15) и (2.21).
5. В чём состоит отличие парапозитрония от ортопозитрония?

Заключение

Подводя итоги исследования, проведенного в данном практическом руководстве, отметим его основные результаты:

– предложены методы численного решения релятивистских двухчастичных интегральных уравнений;

– найдены численные решения для связанных и s -состояний рассеяния в релятивистском конфигурационном представлении в случае: потенциала однобозонного обмена, суперпозиции двух потенциалов однобозонного обмена и потенциала вида r^{-1} . Найдены численные решения четырёх двухчастичных парциальных уравнений квазипотенциального типа с потенциалом однобозонного обмена в релятивистском конфигурационном представлении для s -состояний рассеяния. На основании полученных решений вычислены амплитуды рассеяния, длины рассеяния и фазовые сдвиги. Проведен анализ полученных результатов;

– получены численные решения уравнения Логанова – Тавхелидзе и уравнения Кадышевского для волновых функций в импульсном представлении в случае различных вариантов зависящих от энергии системы потенциалов однобозонного обмена, описывающих взаимодействие двух скалярных частиц, двух фермионов и системы фермион-антифермион. На основании полученных решений вычислены константы и ширины распада системы частица-античастица на два фотона.

Перечень условных обозначений

КТП – квантовая теория поля

ИП – импульсное представление

РКП – релятивистское конфигурационное представление

ВФ – волновая функция

ФГ – функция Грина

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Литература

1. Logunov, A. A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A. A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento*. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
2. Kadyshevsky, V. G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V. G. Kadyshevsky // *Nucl. Phys.* – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.
3. Кадышевский, В. Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // *ЭЧАЯ*. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
4. Solov'eva, T. M. Iteration method of solving the integral equation with nonlinear dependence on spectral parameter / T. M. Solov'eva, E. P. Zhidkov // *Comp. Phys. Comm.* – 2000. – Vol. 126. – P. 168–177.
5. Тейлор, Дж. Теория рассеяния: квантовая теория нерелятивистских столкновений / Дж. Тейлор. – Москва : Мир, 1975. – 568 с.
6. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
7. Вычисления на квазиравномерных сетках / Н. Н. Калиткин [и др.]. – М. : Физматлит, 2005. – 224 с.
8. Скачков, Н. Б. Описание форм-фактора релятивистской двухчастичной системы в ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля / Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов // *ТМФ*. – 1980. – Т. 43, № 3. – С. 330–342.
9. Savrin, V. I. Relativistic potential with QCD large Q^2 behaviour and the decay form factors of mesons / V. I. Savrin, N. B. Skachkov // *Lettere Al Nuovo Cimento*. – 1980. – Vol. 29, № 11. – P. 363–369.
10. О распаде связанного состояния $\mu^+\mu^-$ -пары в e^+e^- -далитц-пару и γ -квант / Г. А. Козлов [и др.] // *ТМФ*. – 1984. – Т. 60, № 1. – С. 24–36.
11. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва : ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.
12. Капшай, В. Н. О зависимости квазипотенциала от полной энергии двухчастичной системы / В. Н. Капшай, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков // *ТМФ*. – 1986. – Т. 69, № 3. – С. 400–410.
13. Релятивистские парциальные интегральные уравнения для волновой функции системы двух фермионов / В.В. Двоеглазов [и др.] // *ЯФ*. – 1991. – Т. 54, № 3. – С. 658–668.
14. Kapshai, V. N. Boson exchange quasipotentials for a pseudoscalar fermion-antifermion bound state / V. N. Kapshai, G.Yu Tyumenkov // *Russ. Phys. Journal*. – 1991. – Vol. 34, № 7. – P. 587–589.

Производственно-практическое издание

**Гришечкин Юрий Алексеевич,
Капшай Валерий Николаевич**

**ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ
И СОСТОЯНИЯХ РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА
И ИХ СУПЕРПОЗИЦИЙ**

Практическое руководство

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 14.02.2018. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,33.

Уч.-изд. л. 2,54. Тираж 50 экз. Заказ 82.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.

