Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

УДК 514.765.12

Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли

Н.П. Можей

Представлена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих инвариантную аффинную связность только нулевой кривизны; рассматривается случай разрешимой группы преобразований. Локальная классификация таких однородных пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны также сами аффинные связности вместе с их тензорами кручения. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Результаты работы могут быть использованы в дифференциальной геометрии, теории дифференциальных уравнений, топологии, в теории представлений и теоретической физике.
Ключевые слова: аффинная связность, группа преобразований, однородное пространство, тензор кривизны.

A local classification of three-dimensional homogeneous spaces allowing invariant affine connections of zero curvature only is considered. The case of the solvable group of transformations is studied. The local classification of the homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. The affine connections together with their torsion tensors are described. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The results of the work can be used in differential geometry, theory of differential equations, topology, in the representation theory and theoretical physics.
Keywords: affine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor.

Введение. Необходимость сравнивать геометрические величины в разных точках пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике. «Дифференциальная геометрия многомерных пространств различных “связностей” является одним из интереснейших разделов современной математики. Очень велико ее значение и в современной физике и механике» [1]. Вопрос о существовании связности нулевой кривизны является одной из нерешенных проблем, такие связности позволяют дать геометрическую интерпретацию некоторым понятиям математики и физики, например, понятие связности, определяющей представление нулевой кривизны, играет важную роль в теории солитонов. Анализируя разрешимость дифференциального уравнения, определяющего однородную геометрическую структуру, также приходят к исследованию связности. Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А. П. Нордена, П. К. Рашевского, М. Куриты, А. П. Широкова, Э. Б. Винберга [2], Ш. Кобаяси, К. Номидзу [3] и др. Трехмерные однородные пространства, допускающие аффинные связности без кручения, изучались, например, в [4], где приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе изучаются однородные пространства разрешимых групп Ли, внимание сосредоточено на пространствах, допускающих аффинную связность только нулевой кривизны.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G\subset\bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ является *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{g}}$.

Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, т. е. $\Lambda([x,y]) = [\Lambda(x), \Lambda(y)]$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Тензоры кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Классификация однородных пространств, допускающих аффинную связность только нулевой кривизны. Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, ..., e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \bar{\mathfrak{g}})$. Пусть $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, ..., e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.k$, для нумерации пар – $d.k.m$, здесь d – размерность подалгебры, k – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathrm{P})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$; нумерация соответствует приведенной в [5]. Тривиальная пара типа $d.k$ обозначается $d.k.1$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Теорема. *Все трехмерные однородные пространства, допускающие аффинную связность только нулевой кривизны, такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *разрешима, локально имеют вид* $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$ *или* 1.2.2, 1.2.3, 1.4.2, 1.7.3, 2.2.2, 2.4.2, 2.8.5, 2.9.2 (μ≠0,–1,–1/2), 2.15.2, 2.16.3, 2.19.5, 3.8.7, 3.13.3 (μ≠0), 3.13.5, 3.14.3, 3.19.17, 3.20.25 (μ≠0), 3.20.26 (λ≠1/4), 4.8.9, 4.11.5, *где*

1.2.2, μ=λ+1, λ<–1	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(\lambda+1)u_3$
u_1	$-u_1$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_3$	0	0
u_3	$-(\lambda+1)u_3$	0	0	0

,

1.2.3, μ=1–λ,0<λ≤1/2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(1-\lambda)u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	0	0	u_1
u_3	$(\lambda-1)u_3$	0	$-u_1$	0

,

1.4.2, μ=2λ	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	λu_1-u_2	$u_1+\lambda u_2$	$2\lambda u_3$
u_1	$-\lambda u_1+u_2$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	0	0

, λ>0,

1.7.3, λ=2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$2u_2$	u_1+u_3
u_1	$-u_1$	0	0	u_2
u_2	$-2u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.2.2, λ=μ=1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	0
e_2	0	0	u_1	0	u_3
u_1	$-u_1$	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	u_1
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_1$	0

,

2.4.2, λ=0,μ=2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	$2u_3$
e_2	0	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	$-u_1$	u_2	0	u_3	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2u_3$	0	0	0	0

,

2.9.2, λ=μ+1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	$(\mu+1)u_2$	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

2.8.5, λ=1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.15.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_2+u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_2-u_3$	$-u_2$	0	0

,

2.16.3. λ=1/2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	$(1/2)u_2$	$u_2+(1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-(1/2)u_2$	0	0	u_1
u_3	$-u_1$	$-u_2-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0

,

2.19.5. λ=1/2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	u_1+u_2	$e_1+(1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-u_1-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-e_1-(1/2)u_3$	0	0	0

,

3.8.7, λ=1, μ=–1	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

3.13.3, λ=1–μ, 0≤μ<2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1-\mu)u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$(\mu-1)u_2$	0	0	0	0	u_1
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

,

3.13.5, λ=1+μ, –2<μ<0	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1+\mu)u_2$	μu_3
e_2	$-e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

3.14.3, μ=2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-3e_2$	$-e_3$	u_1	$-u_2$	$2u_3$
e_2	$3e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	u_1
u_3	$-2u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

,

3.19.17, λ=1/2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-2e_2$	$-e_3$	0	$2u_2$	u_3
e_2	$2e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	0	0
u_2	$-2u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

,

3.20.25, λ=2μ, μ≤0	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$2\mu u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-2\mu u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

,

3.20.26, λ>0, μ=2λ	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$(1-2\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$2\lambda u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$(2\lambda-1)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

,

4.8.9, λ=–1, μ=1	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	e_4	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	0	u_1
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_2$	0	0

,

4.11.5, λ=0, μ=1/2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	$-(1/2)e_4$	0	u_2	$(1/2)u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	e_4
e_4	$-e_4$	$(1/2)e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	$-(1/2)u_3$	$-e_4$	$-u_1$	0	0	0

.

Здесь предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат P, алгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметров, не сопряжены друг другу.

Доказательство. Сначала для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3, P)$ найдены трехмерные изотропно-точные пары, далее из них выделены пары с разрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$, допускающие связность только нулевой кривизны. Базис подалгебры, по умолчанию, выбираем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Рассмотрим, например, случай, когда подалгебра $\mathfrak{g}$ имеет вид 1.2, т. е.

$$\mathfrak{g}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu x\end{pmatrix}\right| x\in\mathbb{R},\ \lambda\le\mu\le 1,\ \lambda\mu>0\right\},$$

тогда $[e_1,u_1]=u_1, [e_1,u_2]=\lambda u_2, [e_1,u_3]=\mu u_3$. Положим $[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=b_1e_1+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3$, $[u_2,u_3]=c_1e_1+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3$. Проверив тождество Якоби, получим, что если $\mu+\lambda\ne 1$ и $\mu-\lambda\ne 1$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, если $\mu-\lambda=1$, то при $\alpha_3=0$ пара тривиальна, а при $\alpha_3\ne 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 1.2.2 установит отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1, \pi(u_1)=u_1, \pi(u_2)=\alpha_3u_2, \pi(u_3)=u_3$. Если $\mu+\lambda=1$, то при $\gamma_1=0$ пара тривиальна, а при $\gamma_1\ne 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.2.3 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=\gamma_1u_2$, $\pi(u_3)=u_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1=0$, $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2=1$ и $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_3=1$, тривиальная пара не эквивалентна любой из пар 1.2.2 или 1.2.3. Рассмотрим гомоморфизмы $f_i:\bar{\mathfrak{g}}_i\to\mathfrak{gl}(3,\mathrm{R})\,(i=2,3)$, где $f_i(x)$ – матрица отображения $ad|_{D\bar{\mathfrak{g}}_i}x$ в базисе $\{u_1,u_2,u_3\}$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку подалгебры $f_2(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $f_3(\bar{\mathfrak{g}}_3)$ не сопряжены, пары 1.2.2 и 1.2.3 не эквивалентны.

В случае 1.4 вектора $[e_1,u_i], 1\le i\le 3$, имеют вид $[e_1,u_1]=\lambda u_1-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1+\lambda u_2$, $[e_1,u_3]=\mu u_3$. Положим $[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_2]=b_1e_1+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3$, $[u_2,u_3]=c_1e_1+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3$. Проверив тождество Якоби, получаем, что при $\mu\ne 2\lambda$ $\alpha_3=0$ и пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна; при $\mu=2\lambda$: если $\alpha_3\ne 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.4.2 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\mathfrak{g}$, $\pi(e_1)=e_1, \pi(u_1)=u_1, \pi(u_2)=u_2, \pi(u_3)=\alpha_3u_3$, а если $\alpha_3=0$, то пара тривиальна. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\ne\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, полученные пары не эквивалентны друг другу.

В случае 1.7 (λ=2) $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=2u_2$, $[e_1,u_3]=u_1+u_3$. Поскольку $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathrm{R}e_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\subset\mathrm{R}u_1\oplus\mathrm{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})=\mathrm{R}u_2$, тогда $[u_1,u_2]=[u_2,u_3]=0$, $[u_1,u_3]=\beta_2u_2$. При $\beta_2=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ тривиальна, при $\beta_2\ne 0$ эквивалентность $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 1.7.3 устанавливает $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\mathfrak{g}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=\beta_2u_2$, $\pi(u_3)=u_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\ne\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_3$, полученные пары не эквивалентны.

В случае 2.2 заметим, что $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{g})=\mathrm{R}e_1\oplus\mathrm{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,1)}(\mathfrak{g})=\mathrm{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,0)}(\mathfrak{g})=\mathrm{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,\mu)}(\mathfrak{g})=\mathrm{R}u_3$ и $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda+1,1)}(\mathfrak{g})$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1,\mu+1)}(\mathfrak{g})$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,\mu)}(\mathfrak{g})$. Если $\lambda\ne 1$ или $\mu\ne 1$, то $[u_1,u_2]=[u_1,u_3]=[u_2,u_3]=0$, пара тривиальна; если λ=μ=1, то $[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]=0$, $[u_2,u_3]=\gamma_1u_1$, при $\gamma_1=0$ пара тривиальна, при $\gamma_1\ne 0$ пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 2.2.2 эквивалентны посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=(1/\gamma_1)u_2$, $\pi(u_3)=u_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\ne\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, пары не эквивалентны.

В случае 2.4 через $\mathfrak{h}$ обозначим нильпотентную подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную e_1. При $\lambda=\mu=0$ имеем $[e_1,e_2]=0$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_2,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_2$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=pe_1+qe_2$, $[e_2,u_3]=re_1+se_2$, Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathrm{R}e_1\oplus\mathrm{R}e_2\oplus\mathrm{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathrm{R}u_1\oplus\mathrm{R}u_2$ и $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$ $\Rightarrow$ $[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]=\beta_1u_1+\beta_2u_2$, $[u_2,u_3]=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2$. В силу тождества Якоби пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре при помощи $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_1\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=1,2$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=u_2$, $\pi(u_3)=u_3+\beta_1e_1-\beta_2e_2$. Пусть $\lambda\ne 0$ или $\mu\ne 0$, тогда $[e_1,e_2]=0$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_2,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_2$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=\mu u_3$, $[e_2,u_3]=\lambda u_3$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\supset\mathrm{R}e_1\oplus\mathrm{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\supset\mathrm{R}u_1\oplus\mathrm{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(\mu)}(\mathfrak{h})\supset\mathrm{R}u_3$ и $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1+\mu)}(\mathfrak{h})$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1+\mu)}(\mathfrak{h})$ $\Rightarrow$ $[u_1,u_2]=\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=b_1e_1+b_2e_2+\beta_1u_1+\beta_2u_2$, $[u_2,u_3]=c_1e_1+c_2e_2+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2$. В силу тождества Якоби $[u_1,u_2]=\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=0$, $[u_2,u_3]=0$, $\alpha_3(\lambda^2+(\mu-2)^2)=0$. При $\alpha_3=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, при $\alpha_3\neq 0$ $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 2.4.2 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=u_2$, $\pi(u_3)=\alpha_3u_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, полученные пары не эквивалентны.

В случае 2.8 при $\lambda=1$ имеем: $\mathfrak{h}$ – нильпотентная подалгебра, порожденная e_2, тогда $[e_1,e_2]=e_1$, $[e_1,u_1]=pe_1$, $[e_1,u_2]=qe_2$, $[e_1,u_3]=u_1$, $[e_2,u_1]=0$, $[e_2,u_2]=u_2$, $[e_2,u_3]=u_3$. Имеем $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_2\oplus\mathbb{R}u_3$ и $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_1,u_2]=\alpha_2u_2+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_1,u_3]=\gamma_2u_2+\gamma_3u_3$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})\Rightarrow[u_2,u_3]=0$. Использовав тождество Якоби, получим, что $[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]=\gamma_2u_2+pu_3$. При $p=0$ имеем: если $\gamma_2=0$, то пара тривиальна, если $\gamma_2\neq 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 2.8.5 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_5\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=1,2$, $\pi(u_1)=u_1$, $\pi(u_2)=\gamma_2u_2$, $\pi(u_3)=u_3$. При $p\neq 0$ $\bar{\mathfrak{g}}$ не является разрешимой и пара не входит в рассматриваемый в работе класс. Поскольку $\dim Z(\bar{\mathfrak{g}}_1)\neq\dim Z(\bar{\mathfrak{g}}_5)$, пары не эквивалентны.

В случае 2.15 в силу тождества Якоби $[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]=\beta_2u_2$, $[u_2,u_3]=0$, при $\beta_2=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, при $\beta_2\neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 2.15.2 посредством $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_2$, $\pi(e_1)=(1/\beta_2)e_1$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_1)=(1/\beta_2)u_1$, $\pi(u_2)=u_2$, $\pi(u_3)=u_3$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, пары не эквивалентны.

В случае 4.8 ($\lambda=-1$, $\mu=1$) нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2, $[e_3,u_3]=u_1+pe_4$, $[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]=\gamma_2u_2$, $[u_2,u_3]=0$. Из тождества Якоби следует, что пара эквивалентна 4.8.9 при $\gamma_2+p\neq 0$ посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_9\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=p+\gamma_2u_1+pe_4$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_2)=u_2$, $\pi(e_3)=p+\gamma_2e_3$, $\pi(u_3)=u_3$, $\pi(e_4)=e_4$. Если $p+\gamma_2=0$, то пара эквивалентна тривиальной паре при помощи $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_1\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=p+\gamma_2u_1+pe_4$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_2)=u_2$, $\pi(e_3)=e_3$, $\pi(u_3)=u_3$, $\pi(e_4)=e_4$.

В случае 4.11 ($\lambda=0$, $\mu=1/2$) $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1,e_2, тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-1/2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1/2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_3$. В силу тождества Якоби $[e_3,u_3]=pe_4$, $[u_1,u_2]=[u_1,u_3]=[u_2,u_3]=0$. При $p=0$ пара тривиальна, при $p\neq 0$ пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 4.11.5 эквивалентны посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_5\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,4}$, $\pi(u_j)=pu_j$, $j=\overline{1,3}$. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_5$, пары не эквивалентны друг другу.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Аффинная связность называется *тривиальной*, если $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$. У всех вышеперечисленных пар (в некотором базисе) аффинная связность тривиальна с нулевой кривизной и кручением, за исключением выписаных далее.

Если тензор кручения нулевой, то аффинная связность имеет вид:

Пара	Аффинная связность
4.11.5, 3.19.17, 3.20.25 $\mu\neq 0$	$\Lambda(u_1)=0,\ \Lambda(u_2)=0,\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda\neq 1/3, 1/4$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.19.5	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, r_{1,3}\in\mathbb{R}$

Если тензор кручения может быть ненулевым, то аффинная связность и сам тензор кручения имеют вид:

Пара	Аффинная связность
3.13.3 $\mu \neq 0$, 3.14.3	$\Lambda(u_1)=0,\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 $\lambda \neq 1/2$ ($\mu \neq 0,1,-1,-1/2$), 2.15.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.2.2, 1.2.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&r_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.16.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-q_{1,3}&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda = 1/3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&r_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.4.2, 1.4.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\p_{3,1}&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-p_{3,2}&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.2 $\mu = 1$, 1.7.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-p_{2,3}&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.2 $\lambda = 1/2$ ($\mu \neq 0,1,-1,-1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\-p_{2,3}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\q_{3,1}&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.14.3, 3.13.3 $\mu \neq 0$, 2.16.3	$T(u_1,u_2)=T(u_1,u_3)=0,$ $T(u_2,u_3)=\left(2q_{1,3}-1,0,0\right)$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 $\mu \neq 0,-1,-1/2$, 2.15.2, 1.7.3	$(0,0,0),\left(0,2p_{2,3}-1,0\right),(0,0,0)$
3.20.26 $\lambda = 1/3$	$(0,0,0),(0,0,0),\left(q_{1,3}-r_{1,2},0,0\right)$
2.2.2, 1.2.3	$(0,0,0),(0,0,0),\left(q_{1,3}-r_{1,2}-1,0,0\right)$
2.4.2, 1.4.2	$\left(0,0,2p_{3,2}-1\right),(0,0,0),(0,0,0)$
1.2.2	$\left(0,0,p_{3,2}-q_{3,1}-1\right),(0,0,0),(0,0,0)$

Заключение. Таким образом, приведена в явном виде классификация трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих связность только нулевой кривизны. Описаны также сами инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве и найдены тензоры кручения указанных связностей. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. В работе использован алгебраический подход к проблеме исследования однородных пространств с аффинными связностями, а также соединение различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Литература

1. Веблен, О. Основания дифференциальной геометрии / О. Веблен, Дж. Уайтхед. – М., 1949. – 230 с.
2. Винберг, Э.Б. Инвариантные линейные связности на однородном пространстве / Э.Б. Вин-берг // Труды московского мат. общества. – 1960. – Т. 9. – С. 191–210.
3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т. – 416 с.
4. Mozhey, N.P. Torsion free affine connections on three-dimensional homogeneous spaces / N.P. Mozhey // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2017. – Vol 14. – P. 280–295.
5. Можей, Н.П. Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н.П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 29.09.2017