Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

УДК 512.542

О классе групп с экстремальными P-субнормальными подгруппами

В.И. Мурашко

Исследуется класс групп, все экстремальные подгруппы которых **P**-субнормальны. Установлено, что данный класс групп является наследственной насыщенной формацией, совпадающей с классом групп, все экстремальные подгруппы которых сверхразрешимы.
Ключевые слова: конечная группа, **P**-субнормальная подгруппа, экстремальная группа, сверхразрешимая группа, наследственная насыщенная формация.

The class of groups whose extremal subgroups are **P**-subnormal is investigated. It is established that this class of groups is a hereditary saturated formation that coincides with the class of groups, all of whose extremal subgroups are supersoluble.
Keywords: finite group, **P**-subnormal subgroup, extremal group, supersoluble group, hereditary saturated formation.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Во всей работе через G мы обозначаем некоторую группу, через $\mathbf{X}$ – класс групп, через p – простое число. Напомним [1], что H называется **P**-*субнормальной* подгруппой G, если $H = G$ или существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для любого $i = 1,\ldots, n$. Обозначается H **P**-sn G.

Теорему Хупперта [2, с. 12] можно переформулировать следующим образом: если все максимальные подгруппы G **P**-субнормальны, то G сверхразрешима. Однако, как было показано в [1], существуют несверхразрешимые группы G, у которых все силовские подгруппы **P**-субнормальны. В связи с этим было введено понятие расширенно сверхразрешимой (кратко, w-сверхразрешимой группы) – группы, у которой все силовские подгруппы **P**-субнормальны. Свойства данных групп изучались в работах [1], [3]. Отметим, что всякая сверхразрешимая группа w-сверхразрешима.

В работе [4] было показано, что существуют не сверхразрешимые и не w-сверхразрешимые группы, у которых все циклические примарные подгруппы **P**-субнормальны. Такие группы называются v-сверхразрешимыми. Отметим, что всякая w-сверхразрешимая группа v-сверхразрешима. Некоторые свойства таких групп изучались автором в [5]. Как было отмечено автором в работе [6], класс $v\mathfrak{U}$ всех v-сверхразрешимых групп появился в работе [7] в связи с изучением псевдомногообразий конечных групп.

Классы всех w-сверхразрешимых и v-сверхразрешимых групп являются наследственными насыщенными формациями, содержащимися в классе всех групп, обладающих силовской башней сверхразрешимого типа [1], [4].

Развитием понятия **P**-субнормальной подгруппы является понятие K-**P**-субнормальной подгруппы, введённое в [8]. Напомним, что подгруппа H называется K-**P**-*субнормальной* подгруппой G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$ такая, что или $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом, или H_{i-1} нормальна в H_i для любого $i = 1,\ldots, n$.

Отметим также, что в работах [8] и [9] изучались классы групп с K-**P**-субнормальными и **P**-субнормальными силовскими π-подгруппами соответственно. Формационные обобщения данных классов рассматривались в [10]–[12].

В работе [13] было введено понятие экстремальных классов групп. Данные классы играют существенную роль при изучении локальных формаций (см., [13], [14]). Напомним, что *экстремальным классом* групп называется насыщенный гомоморф $\mathbf{X}$, удовлетворяющий условию: если $G/K \in \mathbf{X}$ и K – единственная минимальная нормальная подгруппа G, то $G \in \mathbf{X}$. *Минимальным экстремальным классом* называется пересечение всех непустых экстремальных классов групп, а группы из этого класса будем называть *экстремальными*.

Замечание. Очевидно, что класс всех групп экстремален. С другой стороны, всякий непустой экстремальный класс групп содержит 1. Поэтому минимальный экстремальный класс групп не пуст. Нетрудно заметить, что минимальный экстремальный класс групп является экстремальным.

Пример 1. Так как 1 является экстремальной группой, то и всякая простая группа является экстремальной. Так как минимальным экстремальный класс насыщен и содержит все простые абелевы группы, то всякая циклическая примарная группа экстремальна. Нетрудно показать, что всякая симметрическая группа также экстремальна.

Целью данной работы является изучение класса групп, у которых все экстремальные подгруппы **P**-*субнормальны* (K-**P**-*субнормальны*).

Предварительные результаты. Используются стандартные обозначения и терминология которые, если надо, могут быть найдены в [15], [16]. Через **P** обозначается множество простых чисел; F_p – поле из p-элементов, $\mathrm{O}_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G, напомним, что данная подгруппа содержит всякую субнормальную p-подгруппу; $\mathbf{X}(n)$ – класс всех $\mathbf{X}$-групп, экспоненты делящей n; $\mathrm{N}_p\mathbf{X} = \{G \mid G/\mathrm{O}_p(G) \in \mathbf{X}\}$; A, N, S и $\boldsymbol{A}$ – классы абелевых, нильпотентных, разрешимых групп и групп с абелевыми силовскими подгруппами соответственно; G имеет обобщенный нильпотентный коммутант, если $G/\mathrm{F}(G) \in \boldsymbol{A}$. Напомним, что $\mathbf{X}$ называется: наследственным, если из $G \in \mathbf{X}$ и $H \le G$ следует $H \in \mathbf{X}$; гомоморфом, если $G/N \in \mathbf{X}$ для любой $G \in \mathbf{X}$ и её нормальной подгруппы N; формацией, если $\mathbf{X}$ является гомоморфом и из $G/N \in \mathbf{X}$ и $G/M \in \mathbf{X}$ следует $G/N \cap M \in \mathbf{X}$; насыщенным, если из $G/\Phi(G) \in \mathbf{X}$ следует $G \in \mathbf{X}$. По известной теореме Гашюца, Любеседер и Шмида всякая непустая формация $\mathbf{X}$ насыщена тогда и только тогда, когда она локальна. Т. е. существует функция $f : \mathbf{P} \to \{$формации$\}$ такая, что $\mathbf{X} = \{G \mid G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого простого делителя p порядка H/K и любого главного фактора H/K группы $G\}$. Обозначается $\mathbf{X} = LF(f)$.

Лемма 1 [3, лемма 3.1]. *Верны следующие утверждения*:

(1) *Если* H **P**-sn G, *то* HN/N **P**-sn G/N *и* $H \cap N$ **P**-sn N.

(2) *Если* $N \subseteq H$ *и* H/N **P**-sn G/N, *то* H **P**-sn G.

Лемма 2 [8, леммы 3.4 и 3.5]. *Пусть H и K – подгруппы разрешимой группы G. Тогда*

(1) H K-**P**-sn G *тогда и только тогда, когда* H **P**-sn G.

(2) *Если* H **P**-sn G, *то* $H \cap K$ **P**-sn K.

(3) *Если* H **P**-sn G *и* K **P**-sn G, *то* $H \cap K$ **P**-sn G.

Следующая лемма вытекает из доказательства леммы 25.4 [15, с. 239].

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– насыщенный гомоморф и N – нормальная подгруппа группы G. Если H/N является* $\mathbf{X}$*-подгруппой G/N, то в G найдётся* $\mathbf{X}$*-подгруппа M такая, что $MN/N = H/N$.*

Лемма 4. *Пусть* H_i **P**-sn G_i *для* $i = 1, 2$. *Тогда* $H_1 \times H_2$ **P**-sn $G_1 \times G_2$.

Доказательство. Заметим, что $1 \times H_2$ нормальна в $G_1 \times H_2$. Так как

$$H_1 \times H_2/1 \times H_2 \cong H_1 \ \mathbf{P}\text{-sn}\ G_1 \cong G_1 \times H_2/1 \times H_2,$$

то $H_1 \times H_2$ **P**-sn $G_1 \times H_2$ по лемме 1. Заметим, что $G_1 \times 1$ нормальна в $G_1 \times G_2$. Так как

$$G_1 \times H_2/G_1 \times 1 \cong H_2 \ \mathbf{P}\text{-sn}\ G_2 \cong G_1 \times G_2/G_1 \times 1,$$

то $G_1 \times H_2$ **P**-sn $G_1 \times G_2$ по лемме 1. Следовательно, $H_1 \times H_2$ **P**-sn $G_1 \times G_2$. Лемма доказана.

Лемма 5 [16, теорема 10.3B]. *Пусть* $\mathrm{O}_p(G) = 1$ *и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа. Тогда существует точный неприводимый* F_pG*-модуль.*

Идея доказательства следующей леммы взята из [4].

Лемма 6. *Пусть p – наибольший простой делитель $|G|$ и H –* K-**P**-*субнормальная p-подгруппа G. Тогда H субнормальна в G.*

Доказательство. Так как H K-**P**-субнормальна, то существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G$ такая, что или $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом, или H_{i-1} нормальна в H_i для любого $i = 1,\ldots, n$.

Заметим, что H субнормальна в H_0. Допустим, что H субнормальна в H_{i-1} для некоторого $i = 1,\ldots, n$. Докажем, что H субнормальна в H_i. Имеем три случая:

1. H_{i-1} нормальна в H_i. Тогда, очевидно, что H субнормальна в H_i.

2. $|H_i : H_{i-1}| = p$. Заметим, что $H \le \mathrm{O}_p(H_{i-1})$. Пусть P – силовская p-подгруппа H_i, содержащая $\mathrm{O}_p(H_{i-1})$. Тогда $|H_i : N_{H_i}(\mathrm{O}_p(H_{i-1}))|$ делит p. Следовательно, $H_i = PN_{H_i}(\mathrm{O}_p(H_{i-1}))$. Значит, $\mathrm{O}_p(H_{i-1})^{H_i} = \mathrm{O}_p(H_{i-1})^P \le P$. Таким образом, $H \le \mathrm{O}_p(H_{i-1}) \le \mathrm{O}_p(H_i)$. Тогда H субнормальна в $\mathrm{O}_p(H_i)$. Так как $\mathrm{O}_p(H_i)$ нормальна в H_i, то H субнормальна в H_i.

3. $|H_i : H_{i-1}| = q \ne p$. В этом случае H_i действует на множестве левых смежных классов по H_{i-1} с помощью левого умножения. Хорошо известно, что ядром этого действия является

$\mathrm{Core}_{H_i} H_{i-1}$ и $H_i/\mathrm{Core}_{H_i} H_{i-1}$ изоморфна подгруппе симметрической группы степени q. Так как $q < p$, то $O_p(H_{i-1}) \le \mathrm{Core}_{H_i} H_{i-1} \le H_{i-1}$. Следовательно, H субнормальна в H_i.

Итак, H субнормальна в $H_n = G$. Лемма доказана.

Основные результаты. Общее описание экстремальных групп содержит следующая

Теорема A. *Группа G экстремальна тогда и только тогда, когда $C_{G/K}(H/K) \subseteq H/K$ для любого главного фактора H/K группы G такого, что $\Phi(G/K) = K/K$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ – класс групп G таких, что $C_{G/K}(H/K) \subseteq H/K$ для любого главного фактора H/K группы G такого, что $\Phi(G/K) = K/K$. Очевидно, что $\mathbf{X}$ является гомоморфом.

Покажем, что $\mathbf{X}$ насыщен. Предположим, что $G/\Phi(G) \in \mathbf{X}$. Тогда $\Phi(G)N/N \le \Phi(G/N)$. Поэтому, если H/K – главный фактор группы G такой, что $\Phi(G/K) = K/K$, то $\Phi(G) \le K$. Следовательно, H/K – главный фактор группы $G/\Phi(G)$. Значит, $C_{G/K}(H/K) \subseteq H/K$ в силу того, что $G/\Phi(G) \in \mathbf{X}$. То есть $G \in \mathbf{X}$. Итак, класс $\mathbf{X}$ насыщен.

Пусть $G/N \in \mathbf{X}$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа G. Покажем, что $G \in \mathbf{X}$. Если $N \le \Phi(G)$, то $G \in \mathbf{X}$ в силу насыщенности $\mathbf{X}$. Значит, $\Phi(G) = 1$. Тогда $C_G(N) \subseteq N$ по теореме 7.12 [15, с. 79]. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа G, то все главные факторы G, отличные от N, являются также главными факторами G/N. Из $G/N \in \mathbf{X}$ следует, что $G \in \mathbf{X}$. Таким образом, $\mathbf{X}$ – экстремальный класс.

Предположим, что $\mathbf{X}$ не является минимальным экстремальным классом. Тогда выберем не экстремальную $\mathbf{X}$-группу G наименьшего порядка. Если $\Phi(G) \ne 1$, то в силу нашего предположения $G/\Phi(G)$ экстремальна. Следовательно, G экстремальна, противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальна подгруппа G. По определению $\mathbf{X}$, $C_G(N) \subseteq N$. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная подгруппа G. В силу выбора G, G/N экстремальна. Но тогда и G экстремальна, заключительное противоречие. Теорема доказана.

Определение 1. Группу, у которой все экстремальные подгруппы $\mathbf{P}$-субнормальны, будем называть *e-сверхразрешимой.* Через $e\mathfrak{U}$ будем обозначать класс всех e-сверхразрешимых групп.

Теорема B. *Класс групп всех e-сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп, совпадающая с классом групп, у которых все экстремальные подгруппы сверхразрешимы.*

Доказательство. (*a*) *Всякая e-сверхразрешимая группа разрешима.*

Так как всякая циклическая примарная подгруппа является экстремальной, то $e\mathfrak{U} \subseteq v\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{S}$. Значит, всякая $e\mathfrak{U}$-группа разрешима.

(*b*) $e\mathfrak{U}$ *– наследственный класс.*

Пусть H – подгруппа $e\mathfrak{U}$-группы G, а K – экстремальная подгруппа H. Так как K $\mathbf{P}$-sn G и G разрешима, то K $\mathbf{P}$-sn H по лемме 2. Значит, $H \in e\mathfrak{U}$. Итак, $e\mathfrak{U}$ – наследственный класс.

(*c*) $e\mathfrak{U}$ *– гомоморф.*

Предположим, что N – нормальная подгруппа $e\mathfrak{U}$-группы G. По лемме 3 для всякой экстремальной подгруппы H/N группы G/N найдётся экстремальная подгруппа M такая, что $MN/N = H/N$. Так как M $\mathbf{P}$-sn G, то H/N $\mathbf{P}$-sn G/N по лемме 1. Таким образом, все экстремальные подгруппы G/N $\mathbf{P}$-субнормальны. Итак $G/N \in e\mathfrak{U}$. Следовательно, $e\mathfrak{U}$ – гомоморф.

(*d*) *Экстремальная e-сверхразрешимая группа сверхразрешима.*

Предположим, что это утверждение неверно и пусть G – контрпример наименьшего порядка. Так как классы всех экстремальных и e-сверхазрешимых групп гомоморфы, а формация всех сверхразрешимых групп насыщена, то $\Phi(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N. Так как G e-сверхазрешима, то она разрешима. Следовательно, N – элементарная абелева p-группа. Так как $\Phi(G) = 1$, то в G найдётся максимальная подгруппа M такая, что $MN = G$. Заметим, что $M \cap N = 1$. Тогда $G/N \cong M$ – экстремальная, и сверхразрешимая по предположению, группа. Итак, M $\mathbf{P}$-sn G. То есть $|G : M|$ – простое число. Следовательно, $|N| = p$. Значит, G сверхразрешима, противоречие.

(*e*) $e\mathfrak{U}$ *– наследственная формация.*

Докажем, что класс $e\mathfrak{U}$ замкнут относительно прямых произведений. Пусть $G = G_1 \times G_2$ и H – экстремальная подгруппа G. Обозначим через H_i проекцию H на G_i. Тогда H_i – экстремальная e-сверхразрешимая группа по (*b*) и (*c*). Согласно (*d*), H_i сверхразрешима. Значит, $H_1 \times H_2$ сверхразрешима. Заметим, что $H \le H_1 \times H_2$. Следовательно, H $\mathbf{P}$-sn $H_1 \times H_2$. Так как G_i

e-сверхразрешима, то H_i $\mathbf{P}$-sn G_i. Тогда $H_1 \times H_2$ $\mathbf{P}$-sn $G_1 \times G_2$ по лемме 4. Итак, H $\mathbf{P}$-sn G. Следовательно, G e-сверхразрешима. Таким образом, $e\mathfrak{U}$ замкнут относительно прямых произведений. Хорошо известно, что наследственный гомоморф, замкнутый относительно прямых произведений, является наследственной формацией.

(f) $e\mathfrak{U}$ *совпадает с классом групп, у которых все экстремальные подгруппы сверхразрешимы, в частности, класс* $e\mathfrak{U}$ *насыщен.*

Напомним, что класс всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U} = LF(k)$, где $k(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$.

Согласно (d) и (e), всякая экстремальная подгруппа e-сверхразрешимой группы сверхразрешима. Докажем обратное включение. Предположим, что оно не верно и пусть G – контрпример наименьшего порядка. Отметим [14], что класс групп, все экстремальные подгруппы которых сверхразрешимы, является наследственной насыщенной формацией. Так как всякая простая группа экстремальна, то G разрешима. Из (e) и нашего предположения следует, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N. Заметим, что N – элементарная абелева p-группа. В силу нашего предположения, в G имеется не $\mathbf{P}$-субнормальная экстремальная подгруппа M. Если $MN < G$ то M $\mathbf{P}$-sn $MN \in e\mathfrak{U}$. Так как $|G/N| < |G|$, то MN/N $\mathbf{P}$-sn G/N. Тогда MN $\mathbf{P}$-sn G по лемме 1. Итак, M $\mathbf{P}$-sn G, противоречие. Значит, $MN = G$. Тогда $M \cap N = 1$ и $G/N \cong M$. По теореме 7.12 [15, с. 79] $C_G(N) = N$. По следствия 1 из [14] все экстремальные подгруппы $G/N = G/C_G(N) \cong M$ принадлежат $\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. То есть $M \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}\,(p-1)$. Следовательно, G сверхразрешима, заключительное противоречие. Теорема доказана.

Следствие B.1. $e\mathfrak{U} = LF(F)$, *где* $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}(p-1)$.

Доказательство. Согласно следствию 1 из [14] и теореме B, $e\mathfrak{U}$ имеет локальный экран F такой, что $F(p)$ состоит из всех групп, все экстремальные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Пусть $G \in F(p)$. Согласно теореме A и теореме 26.1 из [15, с. 243], всякая группа Шмидта экстремальна. Следовательно, все подгруппы Шмидта группы G p-замкнуты. Значит, G p-замкнута. Тогда p не делит $|G/O_p(G)|$. Следовательно, $G/O_p(G)$ не содержит подгрупп Шмидта. То есть $G/O_p(G)$ нильпотентна. Так как циклические примарные группы экстремальны, то $G/O_p(G)$ имеет экспоненту, делящую $p-1$. Итак, $F(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}(p-1)$.

Нетрудно видеть, что все экстремальные подгруппы H $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}(p-1)$-группы p-замкнуты и $H/O_p(H) \in \mathfrak{N}(p-1)$. Тогда $H/O_p(H)$ – циклическая примарная группа, экспоненты делящей $p-1$. Значит, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}(p-1) \subseteq F(p)$. Итак, $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}(p-1)$. Следствие доказано.

Согласно [1], класс всех w-сверхразрешимых групп $w\mathfrak{U} = LF(h)$, где $h(p) = \mathfrak{N}_p\boldsymbol{A}(p-1)$.

Пример 2. (1) Напомним, что группа кватернионов Q_8 имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. По лемме 5 существует точный неприводимый F_5Q_8-модуль V. Пусть G – естественной полупрямое произведение V и Q_8 (эта группа имеет номер [200, 44] в библиотеке малых групп GAP). Так как $G/C_G(V) \cong Q_8$ – нильпотентная группа экспоненты $4 = 5-1$, то G e-сверхразрешима по следствию B.1. Так как силовские подгруппы Q_8 небелевы, то G не w-сверхразрешима.

(2) Так как симметрическая группа S_3 степени 3 имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, то по лемме 5 существует точный неприводимый F_7S_3-модуль V. Пусть G – естественной полупрямое произведение V и S_3 (эта группа имеет номер [294, 7] в библиотеке малых групп GAP). Так как $G/C_G(V) \cong S_3$ – не имеет нормальных 7-подгрупп и ненильпотентна, то G не e-сверхразрешима по следствию B.1. Так как S_3 сверхразрешима и её силовские подгрупы абелевы, экспоненты делящей $6 = 7-1$, то G w-сверхразрешима.

Теорема C. *Верны следующие утверждения*:

(1) *Группа e-сверхразрешима тогда и только тогда, когда она метанильпотентна и v-сверхразрешима*.

(2) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она e-сверхразрешима и w-сверхразрешима*.

(3) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она e-сверхразрешима и её обобщенный коммутант нильпотентен.*

Доказательство. (1) Согласно [15, с. 36] класс всех метанильпотентных групп $\mathfrak{N}^2 = LF(g)$, где $g(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$; класс всех v-сверхразрешимых групп $v\mathfrak{U} = LF(t)$, где $t(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}(p-1)$ [5]. Тогда класс всех метанильпотентных v-сверхразрешимых групп – локальная формация с экраном

$$f(p) = \mathtt{N}_p\mathtt{N} \cap \mathtt{N}_p\mathtt{S}(p-1) = \mathtt{N}_p(\mathtt{N} \cap \mathtt{S}(p-1)) = \mathtt{N}_p\mathtt{N}(p-1).$$

По следствию B.1 это в точности класс всех *e*-сверхразрешимых групп.

(2) Так как $w\mathtt{U} = LF(h)$, где $h(p) = \mathtt{N}_p\boldsymbol{A}(p-1)$, то класс всех *e*-сверхразрешимых *w*-сверхразрешимых групп имеет локальный экран

$$k(p) = \mathtt{N}_p\mathtt{N}(p-1) \cap \mathtt{N}_p\boldsymbol{A}(p-1) = \mathtt{N}_p(\mathtt{N}(p-1) \cap \boldsymbol{A}(p-1)) = \mathtt{N}_p\mathtt{A}(p-1).$$

Однако, это же и экран класса всех сверхразрешимых групп.

(3) Доказательство аналогично (2) ввиду того, что класс всех групп с обобщенным нильпотентным коммутантом $\mathtt{N}\boldsymbol{A} = LF(l)$, где $l(p) = \mathtt{N}_p\boldsymbol{A}$ [15, с. 36]. Теорема доказана.

Следствие C.1. *Всякая e-сверхразрешимая группа метанильпотентна.*

Теорема D. *Классы групп* $v\mathtt{U}$ *и* $e\mathtt{U}$ *совпадает с классами всех групп, у которых все циклические примарные и экстремальные подгруппы соответственно* K-**P**-*субнормальны.*

Доказательство. Предположим, что все циклические примарные подгруппы G K-**P**-субнормальны, но G не разрешима. Не теряя общности рассуждений можно считать, что G наименьшая из групп с таким свойством. Если G не проста, то в ней найдётся нормальная подгруппа $N \neq G$. По [3, лемма 3.1] у групп N и G/N все циклические примарные подгруппы K-**P**-субнормальны. Тогда N и G/N разрешимы по нашему предположению. Следовательно, G разрешима, противоречие. Значит, G – простая неабелева группа. Пусть p – наибольший простой делитель группы G. Тогда $O_p(G) \neq 1$ по лемме 6, заключительное противоречие.

Следовательно, классы всех групп, у которых все циклические примарные и экстремальные подгруппы соответственно K-**P**-субнормальны состоят из разрешимых групп. Напомним, что классы $v\mathtt{U}$ *и* $e\mathtt{U}$ также состоят только из разрешимых групп. Итак, утверждение теоремы D напрямую следует из (1) леммы 2.

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н. А.Ф. Васильеву за полезные консультации по данной работе.

Литература

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

2. Between Nilpotent and Soluble / H.G. Bray [et. al.]. – Passaic : Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.

3. Васильев, А.Ф. О произведениях **P**-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

4. Monakhov, V.S. Finite groups with P-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche mat. – 2013. – V. 62, № 2. – P. 307–322.

5. Мурашко, В.И. Свойства класса конечных групп с P-субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 5–8.

6. Murashka, V.I. One formation of finite groups / V.I. Murashka // ArXiv.org e-Print archive, arXiv: 1312.0313v1, 2 Dec 2013.

7. Brandl, R. Groups sharing varietal properties with supersoluble groups / R. Brandl // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1983. – V. 34. – P. 265–268.

8. Васильев, А.Ф. О K-**P**-субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

9. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

10. Васильев, А.Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

11. Мурашко, В.И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.

12. Васильев, А.Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовскими подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

13. Carter, R. Extreme classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – V. 9, № 3. – P. 285–313.

14. Васильев, А.Ф. Одна задача теории формаций конечных групп / А.Ф. Васильев // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62, № 1. – С. 52–58.

15. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

16. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 07.10.2017