

## О приближенном решении для квадратичной модели доходности

Д.А. ПАВЛИВ

Исследуется многомерная квадратичная модель временной структуры доходности процентных ставок в случае наличия зависимости между латентными переменными, характеризующими состояние финансового рынка. Предложен приближенный метод нахождения значений кривой доходности и форвардной кривой в аналитическом виде, когда недиагональные элементы матриц, определяющие зависимость между переменными, пропорциональны некоторому наперед заданному малому параметру  $\varepsilon$ . Исследованы некоторые свойства полученного решения. Проведен эмпирический сравнительный анализ полученного приближенного и точного решений.

**Ключевые слова:** форвардная кривая, кривая доходности, квадратичная модель, метод малого параметра.

A multidimensional quadratic model of the term structure of the yield of interest rates in the case of a relationship between latent variables characterizing the state of the financial market is investigated. An approximate method is proposed for finding the values of the yield curve and the forward curve in the analytical form, when the off-diagonal elements of the matrices that determine the dependence between the variables are proportional to some preassigned small parameter  $\varepsilon$ . Some properties of the obtained solution are investigated. An empirical comparative analysis of the approximate and exact solutions obtained is given.

**Keywords:** forward curve, yield curve, quadratic model, small parameter method.

**Описание модели.** В теории диффузионных процессов известно множество различных моделей, описывающих динамику краткосрочных процентных ставок доходности. Однако все эти модели, за счет вводимых ими предположений и ограничений, не могут описать временную структуру доходности, существующую на реальном финансовом рынке, с необходимой точностью. Благодаря своей простоте, одними из самых изученных моделей являются модели аффинной временной структуры доходности. Однако они не учитывают многие важные свойства, присущие реальным данным. Поэтому идеи отказа от аффинных свойств набирают все большую популярность. Одним из примеров таких моделей служит квадратичная модель [1], в которой процесс процентной ставки  $r(t)$  описывается уравнениями.

$$dX(t) = \mu(X)dt + \sigma(X)dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$r(X) = r_{\min} + X^T \Phi X, \quad r_{\min} \in \mathbb{R}, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

где  $\mu(X)$  –  $n$ -мерная функция дрейфа,  $\sigma(X)$  – квадратная  $n$ -мерная матрица волатильности,  $W(t)$  – винеровский  $n$ -мерный процесс,  $r_{\min}$  – параметр, имеющий смысл минимального значения процентной ставки, а  $\Phi$  – диагональная положительно определенная матрица. При этом следует отметить, что сам процесс  $X(t)$ , в отличие от  $r(X)$ , является ненаблюдаемым и, на текущий момент, ни в одной из известных работ авторы не предложили экономического обоснования данной величины.

Случай многомерной квадратичной модели с независимыми переменными состояниями финансового рынка, компонентами вектора  $X$  (или, как их нередко называют в литературе, факторами модели), хорошо изучен многими авторами, например, в [2]. Однако, более реалистичный случай с зависимыми факторами до сих пор не раскрыт в известных источниках. Поэтому, целью данной работы является построение приближенной модели, описывающей поведение многофакторной квадратичной модели в условиях наличия зависимости между переменными состояниями финансового рынка, изучение ее свойств и анализ возможности использования такой модели на практике.

Рассмотрим квадратичную модель для класса диффузионных процессов с линейной функцией дрейфа  $\mu(X) = K(\theta - X)$  и постоянной волатильности  $\sigma(X) = S$ . Как правило, временную структуру доходности находят с помощью фундаментального уравнения в частных производных для цен бескупонных облигаций [1],  $P(r(X), t; T)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial X} K(\theta - X) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} S S^T \right) - r(X) P(r(X), t; T) = \frac{\partial P}{\partial X} S \Lambda(X), \quad (1)$$
$$P(r(X), T, T) = 1$$

где  $T$  обозначает дату погашения облигации, а  $\Lambda(X)$  –  $n$ -мерная векторная функция, характеризующая рыночную стоимость за риск. Рыночная стоимость риска задается линейным соотношением [1]:  $\Lambda(X) = \Lambda_0 + \Lambda_1 X$ . Решение уравнения (1) имеет простой вид [1]:

$$P(r(X), t; t + \tau) = \exp(-X^T A(\tau) X - X^T B(\tau) - C(\tau)), \quad (2)$$

где для удобства введено обозначение  $\tau = T - t$ , определяющее срок до погашения облигации, а функции  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  и  $C(\tau)$  являются решением системы дифференциальных уравнений, получаемой подстановкой решения (2) в уравнение (1):

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T A(\tau) + A(\tau)(K^*) + (K^*)^T A(\tau) - \Phi = 0 \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T B(\tau) + (K^*)^T B(\tau) - 2A(\tau)Q = 0 \\ \frac{dC(\tau)}{d\tau} - \text{tr}(SS^T A(\tau)) + \frac{1}{2} B^T(\tau)SS^T B(\tau) - B^T(\tau)Q - r_{\min} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $K^* = K + S\Lambda_1$ , а  $Q = K\theta - S\Lambda_0$ . При этом имеют место следующие начальные условия  $A(0) = 0$ ,  $B(0) = 0$ ,  $C(0) = 0$ .

Чаще всего для представления временной структуры процентных ставок доходности используют кривую доходности  $y(\tau, X)$  или форвардную кривую  $f(\tau, X)$ , которые согласно определениям выражаются через цену бескупонной облигации по формулам

$$y(\tau, X) = -\frac{\ln P(r(X), t; t + \tau)}{\tau} = \frac{X^T A(\tau) X + X^T B(\tau) + C(\tau)}{\tau},$$

$$f(\tau, X) = -\frac{\partial \ln P(r(X), t; t + \tau)}{\partial \tau} = X^T \frac{dA(\tau)}{d\tau} X + \left( \frac{dB(\tau)}{d\tau} \right)^T X + \frac{dC(\tau)}{d\tau}$$

Рассмотрим  $n$ -мерную квадратичную модель в риск-нейтральной мере – когда вектор рыночной стоимости риска,  $\Lambda(X)$ , равен нулю для любых  $X$ , т. е.  $\Lambda_1 = \mathbf{0}_{n \times n}$  и  $\Lambda_0 = \mathbf{0}_{n \times 1}$ , с нулевым стационарным средним,  $\theta$ . При таких условиях оказывается, что  $B(\tau) = 0$ . Действительно, в этом случае второе уравнение системы (3) распадается на  $n$  независимых скалярных однородных линейных дифференциальных уравнения с нулевым начальным условием. При независимых компонентах вектора  $X(t)$ , когда матрицы  $K$  и  $S$  являются диагональными, решение системы (3) может быть найдено в явном виде [2]. Однако, когда матрицы  $K$  и  $S$  недиагональны, в общем случае, решение в аналитическом виде найти не удастся. Поэтому попробуем построить приближенное решение.

Пусть недиагональные элементы матриц  $K$ ,  $S$  и  $A(\tau)$  имеют порядок некоторого малого параметра  $\varepsilon$ . Тогда матрицы  $K$ ,  $S$  и  $A(\tau)$  можно записать следующим образом

$$A(\tau) = A^D(\tau) + \varepsilon A^N(\tau), \quad K = K^D + \varepsilon K^N, \quad S = S^D + \varepsilon S^N,$$

где матрицы  $A^D(\tau)$ ,  $A^N(\tau)$ ,  $K^D$ ,  $K^N$ ,  $S^D$  и  $S^N$  определяются как

$$A^D(\tau) = \begin{pmatrix} A_{11}(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & A_{nn}(\tau) \end{pmatrix}, \quad A^N(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\tau) & A_{1n}(\tau) \\ A_{21}(\tau) & 0 & A_{2n}(\tau) \\ A_{n1}(\tau) & A_{n2}(\tau) & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^D = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{nn} \end{pmatrix}, \quad K^N = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{1n} \\ k_{21} & 0 & k_{2n} \\ k_{n1} & k_{n2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S^D = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad S^N = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{1n} \\ s_{21} & 0 & s_{2n} \\ s_{n1} & s_{n2} & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда первое уравнение системы (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA^D(\tau)}{d\tau} + 2A^D(\tau)S^D(S^D)^T A^D(\tau) + A^D(\tau)K^D + (K^D)^T A^D(\tau) + \Phi + \\ + \varepsilon \left( \frac{dA^N(\tau)}{d\tau} + A^N(\tau)D(\tau) + D(\tau)A^N(\tau) + R(\tau) \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}, \quad (4)$$

где

$$D(\tau) = 2A^D(\tau)S^D(S^D)^T + K^D, \quad (5)$$

$$R(\tau) = 2A^D(\tau)\left(S^N(S^D)^T + S^D(S^N)^T\right)A^D(\tau) + A^D(\tau)K^N + (K^N)^T A^D(\tau).$$

Заметим, что матрица  $D(\tau)$  в (5) является диагональной. Второе уравнение системы (3) представим как

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = r_{\min} + \text{tr}\left(S^D(S^D)^T A^D(\tau)\right) + \varepsilon\left(\text{tr}\left(S^D(S^D)^T A^N(\tau)\right) + 2\text{tr}\left(S^N(S^D)^T A^D(\tau)\right)\right) + o(\varepsilon^2), \quad (6)$$

с начальными условиями  $A(0) = 0$  и  $C(0) = 0$ .

В общем виде разрешить систему (4)–(6) не удастся. Поэтому попытаемся найти приближенное решение, пренебрегая членами порядка  $o(\varepsilon^2)$ .

Рассмотрим уравнение (4) более детально. Потребуем, чтобы коэффициент при  $\varepsilon$  был равен нулю. В этом случае уравнение сводится к случаю с диагональными матрицами и его решение известно [2]:

$$A_{ii}(\tau) = \frac{\Phi_i}{k_{ii} + v_{ii} \text{cth}(\tau v_{ii})}, \quad v_{ii} = \sqrt{k_{ii}^2 + 2s_{ii}^2 \Phi_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Приравняв коэффициент при  $\varepsilon$  к нулю, получаем линейное матричное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для определения недиагональных элементов матрицы  $A(\tau)$

$$\frac{dA^N(\tau)}{d\tau} + A^N(\tau)D(\tau) + D(\tau)A^N(\tau) + R(\tau) = 0. \quad (8)$$

*Утверждение.* Решение уравнения (8) с начальным условием  $A(0) = 0$  представимо в виде

$$A_{ij}(\tau) = \frac{1}{(v_{ii}^2 - v_{jj}^2)(v_{ii} \text{ch}(v_{ii}\tau) + k_{ii} \text{sh}(v_{ii}\tau))(v_{jj} \text{ch}(v_{jj}\tau) + k_{jj} \text{sh}(v_{jj}\tau))} \times$$

$$\times \left[ v_{ii} v_{jj} (k_{ij} \Phi_i - k_{ji} \Phi_j) (1 - \text{ch}(v_{ii}\tau) \text{ch}(v_{jj}\tau)) + (k_{ij} \Phi_i v_{jj}^2 - k_{ji} \Phi_j v_{ii}^2) \text{sh}(v_{ii}\tau) \text{sh}(v_{jj}\tau) + \right.$$

$$\left. + (k_{ij} \Phi_i k_{jj} + k_{ji} \Phi_j k_{ii} + 2\Phi_i \Phi_j (s_{ii} s_{ij} + s_{jj} s_{ji})) (v_{jj} \text{sh}(v_{ii}\tau) \text{ch}(v_{jj}\tau) - v_{ii} \text{ch}(v_{ii}\tau) \text{sh}(v_{jj}\tau)) \right],$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j \quad (9)$$

**Доказательство.** В силу диагональности матрицы  $D(\tau)$ , матричное уравнение (8) можно представить в виде системы независимых скалярных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dA_{ij}(\tau)}{d\tau} + A_{ij}(\tau)(d_i(\tau) + d_j(\tau)) + r_{ij}(\tau) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (10)$$

где

$$d_i(\tau) = 2A_{ii}(\tau)s_{ii}^2 + k_{ii}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$r_{ij}(\tau) = 2A_{ii}(\tau)(s_{ii}s_{ij} + s_{jj}s_{ji})A_{jj}(\tau) + A_{ii}(\tau)k_{ij} + A_{jj}(\tau)k_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

В силу симметричности матрицы  $A(\tau)$  достаточно решить  $n(n-1)/2$  уравнений.

Согласно [3, с. 50] решение уравнения (10) представимо в виде

$$A_{ij}(\tau) = e^{F_{ij}(\tau)} \left( c - \int e^{-F_{ij}(\tau)} r_{ij}(\tau) d\tau \right), \quad (11)$$

$$F_{ij}(\tau) = -\int (d_i(\tau) + d_j(\tau)) d\tau, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Вычисление интеграла дает следующее выражение для функции  $F_{ij}(\tau)$

$$F_{ij}(\tau) = -\ln(v_{ii} \text{ch}(v_{ii}\tau) + k_{ii} \text{sh}(v_{ii}\tau)) - \ln(v_{jj} \text{ch}(v_{jj}\tau) + k_{jj} \text{sh}(v_{jj}\tau)), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Тогда, с учетом начального условия, окончательно можно записать решение

$$A_j(\tau) = \frac{1}{(v_{ii}^2 - v_{jj}^2)(v_{ii} \operatorname{ch}(v_{ii}\tau) + k_{ii} \operatorname{sh}(v_{ii}\tau))(v_{jj} \operatorname{ch}(v_{jj}\tau) + k_{jj} \operatorname{sh}(v_{jj}\tau))} \times \\ \times \left[ v_{ii} v_{jj} (k_{ij} \varphi_i - k_{ji} \varphi_j) (1 - \operatorname{ch}(v_{ii}\tau) \operatorname{ch}(v_{jj}\tau)) + (k_{ij} \varphi_i v_{jj}^2 - k_{ji} \varphi_j v_{ii}^2) \operatorname{sh}(v_{ii}\tau) \operatorname{sh}(v_{jj}\tau) + \right. \\ \left. + (k_{ij} \varphi_i k_{jj} + k_{ji} \varphi_j k_{ii} + 2\varphi_i \varphi_j (s_{ii} s_{ij} + s_{jj} s_{ji})) (v_{jj} \operatorname{sh}(v_{ii}\tau) \operatorname{ch}(v_{jj}\tau) - v_{ii} \operatorname{ch}(v_{ii}\tau) \operatorname{sh}(v_{jj}\tau)) \right], \\ i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j$$

что доказывает утверждение.

Таким образом, выражения (7)–(9) определяют решение (4). При этом отметим, что имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dA_{ij}(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A_{ij}(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA_{ij}(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A_{ij}(\tau)}{\tau} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j$$

Проанализируем уравнение (6). Из свойств матриц  $A^D(\tau)$ ,  $A^N(\tau)$ ,  $S^D$  и  $S^N$  видно, что коэффициент при  $\varepsilon$  равен нулю для любых  $\tau \geq 0$ . Тогда, решение (6) с точностью до  $o(\varepsilon^2)$  не зависит от элементов матриц  $A^N(\tau)$ ,  $K^N$  и  $S^D$  и принимает следующий вид

$$C(\tau) = \tau r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \omega_i \exp(2v_i \tau)}{1 + \omega_i} \right) - (v_i + k_i) \tau \right), \quad \omega_i \equiv \frac{v_i + k_i}{v_i - k_i}$$

Данное свойство говорит о том, что с точностью до  $o(\varepsilon^2)$  недиагональные элементы матриц  $A^N(\tau)$ ,  $K^N$  и  $S^D$  не влияют на долгосрочное поведение кривой доходности и форвардной кривой, которое задается значением функции  $C(\tau)$ , а определяют поведение лишь для краткосрочных и среднесрочных доходностей.

Теперь, когда  $C(\tau)$  и элементы матрицы  $A(\tau)$  известны, можно записать выражения для нахождения приближенного значения кривой доходности и форвардной кривой соответственно (производные  $A(\tau)$  и  $C(\tau)$  вычисляются из (4) и (6) после подстановки найденных значений функций  $A(\tau)$  и  $C(\tau)$ )

$$\hat{y}(\tau, X) = \frac{1}{\tau} (X^T A^D(\tau) X + C(\tau) + \varepsilon X^T A^N(\tau) X) = y_0(\tau, X) + \frac{\varepsilon}{\tau} X^T A^N(\tau) X \quad (12)$$

$$\hat{f}(\tau, X) = X^T \frac{dA^D(\tau)}{d\tau} X + \frac{dC(\tau)}{d\tau} + \varepsilon X^T \frac{dA^N(\tau)}{d\tau} X = f_0(\tau, X) + \varepsilon X^T \frac{dA^N(\tau)}{d\tau} X. \quad (13)$$

Из приведенных выше выражений видно, что приближенные значения (12) и (13) для случая недиагональных матриц состоит из точного решения для случая диагональных матриц,  $y_0(\tau, X)$  и  $f_0(\tau, X)$  и дополнительного слагаемого, определяемого значением матрицы  $A^N(\tau)$ .

Предельные значения доходности и форвардной кривой при  $\tau \rightarrow \infty$  будут такими же, что и для случая с диагональными матрицами и равны

$$y(\infty) = f(\infty) = r_{\min} + \operatorname{tr} \left( S^D (S^D)^T A^D(\infty) \right)$$

**Эмпирический анализ.** Проиллюстрируем проведенный анализ численным примером. Будем использовать следующие значения параметров:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,08 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,03 \\ 0,05 & 0,13 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,02 \\ 0,01 & 0,08 \end{pmatrix}, \\ \theta = 0_{2 \times 1}, \quad \Lambda_1 = 0_{2 \times 2}, \quad \Lambda_0 = 0_{2 \times 1}$$

В этом случае значение стартовой процентной ставки  $r = 0,0481$ . Пусть нижняя граница процентных ставок равна нулю,  $r_{\min} = 0$ .

Чтобы представить кривую доходности и форвардную кривую «целиком» для всего интервала значений сроков до погашения  $\tau \in (0, \infty)$  использовано нелинейное преобразование сроков до погашения  $u = 1 - e^{-\rho\tau}$  [4], которое отображает положительную полуось  $(0, \infty)$  в единичный интервал  $(0, 1)$ . Принятое при расчетах численное значение  $\rho = (\ln 10)/30 = 0,07675$  соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал  $(0, 0,9)$ . Так что  $Y(u) = y(\tau, X)$ ,  $F(u) = f(\tau, X)$ , где  $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$ .

На рисунке 1 представлены кривая доходности  $Y(u)$  и форвардная кривая  $F(u)$  для случая диагональных матриц  $K$  и  $S$ , а также соответствующие кривые с недиагональными матрицами – точное и приближенное решения. В качестве  $\epsilon$  выбрано значение 0,01.

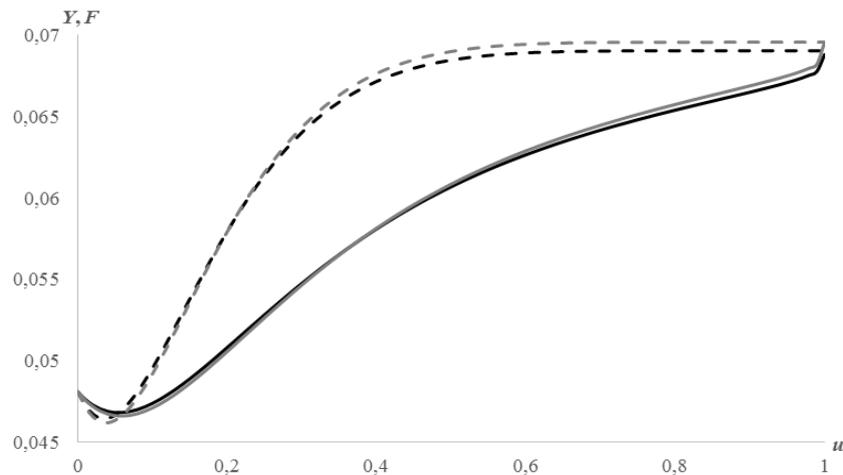


Рисунок 1 – Кривая доходности  $Y(u)$  (точное решение – черная сплошная; приближенное решение – серая сплошная) и форвардная кривая  $F(u)$  (точное решение – черный пунктир; приближенное решение – серый пунктир)

Из рисунка 1 видно следующее. Приближенное решение практически совпадает с точным решением для краткосрочных и среднесрочных доходностей. Это подтверждается и приведенным выше анализом – кривые совпадают с точностью до  $o(\epsilon)$ . Однако в долгосрочной перспективе разность между точным и приближенным решением начинает увеличиваться. Причиной такого расхождения может быть описанное выше свойство приближенного решения, об отсутствии влияния недиагональных элементов матриц на долгосрочную доходность. С другой стороны, анализ погрешности при построении кривых, изображенный на рисунке 2, показывает, что расхождение пропорционально величине  $\epsilon^2$ , что можно считать приемлемым для приближенного метода.

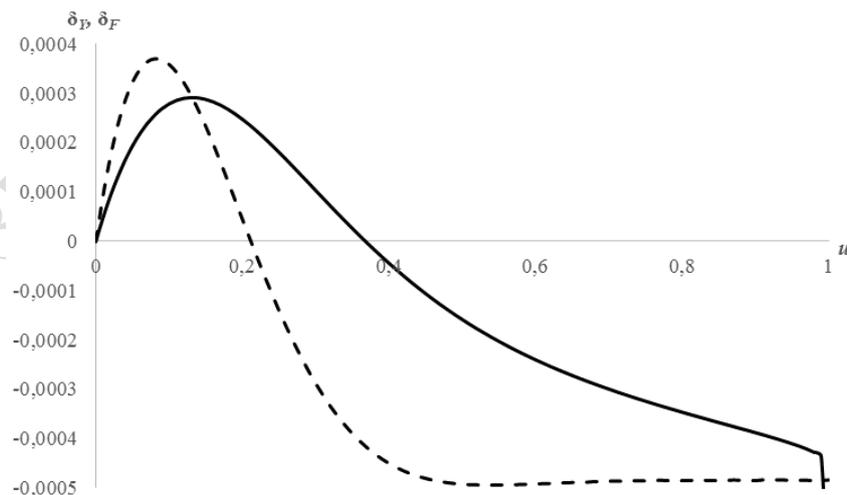


Рисунок 2 – Разность между точными и приближенными значениями для кривой доходности,  $\delta_Y$  – сплошная черная линия, для форвардной кривой,  $\delta_F$  – пунктирная черная линия

Поведение функций  $A_{12}(u)$  для точного и  $\epsilon A_{12}(u)$  для приближенного решения изображено на рисунке 3.

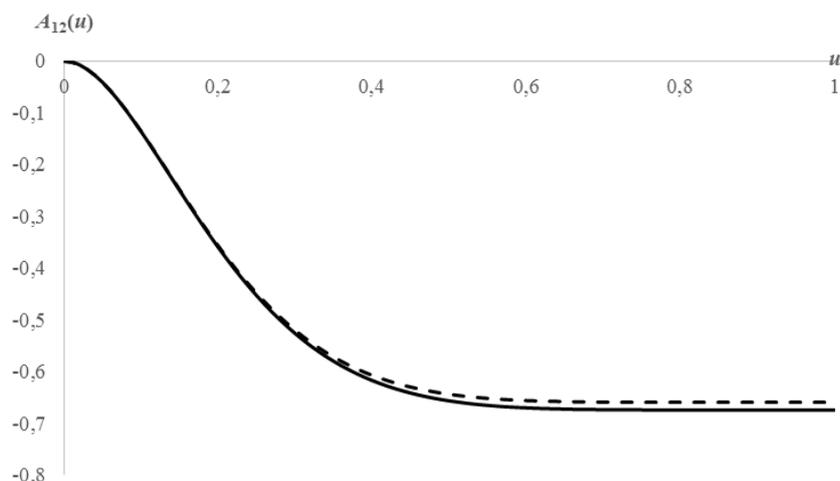


Рисунок 3 – График функций  $A_{12}(u)$  для точного решения – сплошная черная линия,  $\varepsilon A_{12}(u)$  для приближенного решения – пунктирная черная линия

Рисунок 3 показывает, что характер поведения, а также масштаб точного решения  $A_{12}(u)$  и его приближения  $\varepsilon A_{12}(u)$  совпадают для рассматриваемого примера.

**Заключение.** В данной работе предложен приближенный метод вычисления значений временной структуры доходности для квадратичной модели в случае наличия зависимости между латентными переменными, характеризующими состояние рынка, когда недиагональные элементы матриц, определяющие данную зависимость, являются малыми величинами. Наличие аналитического представления данного решения дает возможность для исследования свойств и закономерностей полученной модели. Практическое применение модели, а также сравнительный анализ точного и приближенного решения были продемонстрированы на численном примере. В результате анализа можно заключить, что модель может найти свое применение при практическом и теоретическом анализе деривативов, торгуемых на реальном экономическом рынке.

### Литература

1. Ahn, D. Quadratic term structure models: theory and evidence / D. Ahn, R. Dittmar, A. Gallant – New Orleans : AFA, 2001. – 52 p.
2. Медведев, Г.А. О квадратичных моделях доходности в риск-нейтральной среде / Г.А. Медведев, Д.А. Павлив – Вестник ТГУ. – 2016. – № 4 (37). – С. 44–56.
3. Полянин, А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – Москва, 2001. – 576 с.
4. Медведев, Г.А. О временной структуре доходности. 7. Новая версия / Г.А. Медведев // Вестник ТГУ. – 2013. – № 4 (25). – С. 61–70.