Проблемы физики, математики и техники, № 1 (50), 2022 **ISSN 2077-8708**

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В.М. Селькин[1], В.С. Закревская[1], Н.С. Косенок[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации*, *Гомель*

FINITE GROUPS WITH GIVEN SCHMIDT SUBGROUPS

V.M. Sel'kin[1], V.S. Zakrevskaya[1], N.S. Kosenok[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives*, *Gomel*

Аннотация. В статье рассматриваются только конечные группы. Подгруппа *H* группы *G* называется $\mathfrak{U}_p$*-нормальной* в *G* (*p* – простое число), если каждый главный фактор группы *G* между H^G и H_G является либо циклическим, либо p'-группой. В статье доказывается, что если каждая подгруппа Шмидта группы *G* либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в *G*, то производная подгруппа G' группы *G* *p*-нильпотентна. Также обобщаются некоторые известные результаты.

Ключевые слова: *конечная группа*, *нильпотентная группа*, *субнормальная подгруппа*, $\mathfrak{U}_p$*-нормальная подгруппа*, *группа Шмидта*.

Для цитирования: *Селькин*, *В.М.* Конечные группы с заданными подгруппами Шмидта / В.М. Селькин, В.С. Закревская, Н.С. Косенок // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 84–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84

Abstract. Throughout the article, all groups are finite and *G* always denotes a finite group. A subgroup *H* of the group *G* is called $\mathfrak{U}_p$*-normal* in *G* (*p* is a prime) if every chief factor of the group *G* between H^G and H_G is either cyclic or a p'-group. In this article, we prove that if each Schmidt subgroup of the group *G* is either subnormal or $\mathfrak{U}_p$-normal in *G*, then the derived subgroup G' of *G* is *p*-nilpotent. Some well-known results are generalized.

Keywords: *finite group*, *nilpotent group*, *subnormal subgroup*, $\mathfrak{U}_p$*-normal subgroup*, *Schmidt group*.

For citation: *Sel'kin*, *V.M.* Finite groups with given Schmidt subgroups / V.M. Sel'kin, V.S. Zakrevskaya, N.S. Kosenok // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 84–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_84 (in Russian)

Введение

В данной статье мы рассматриваем только конечные группы; подгруппа *A* группы *G* называется *модулярной* в *G* [2], если выполняются следующие условия:

(i) $\langle X, A\cap Z\rangle = \langle X, A\rangle \cap Z$ для всех $X \le G$, $Z \le G$ таких, что $X \le Z$ и

(ii) $\langle A, Y\cap Z\rangle = \langle A, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G$, $Z \le G$ таких, что $A \le Z$.

Мы говорим, что подгруппа *H* группы *G* называется $\mathfrak{U}_p$*-нормальной* [3] в *G*, если каждый главный фактор группы *G* между H^G и H_G является либо циклическим, либо p'-группой.

Напомним также, что *G* называется *группой Шмидта*, если сама группа *G* не является нильпотентной, но каждая её собственная подгруппа нильпотентна. Изучение групп Шмидта и их применение нашло своё отображение в большом числе работ (см., например, [4]–[7] и, в первую очередь это обосновано тем, что каждая ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта. Поэтому изучение таких групп является важной задачей общей теории конечных групп.

В.Н. Семенчук в своей работе [8] доказал, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы *G* субнормальна в *G*, то *G* метанильпотентна, т. е. $G/F(G)$ нильпотентна. Это важное наблюдение было развито в различных направлениях. Так, например, В.С. Монахов и В.Н. Княгина в статье [9] доказали, что в группах *G*, в которых выполняется такое условие, производная подгруппа G' будет нильпотентной. А в работе [10] В.А. Ведерников получил полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта. В работе [11] И.В. Близнец и В.М. Селькин доказали, что если в ненильпотентной группе

G каждая подгруппа Шмидта модулярна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.

В течение последних лет исследования большого числа авторов (см., в частности, [13]–[24]) были связаны с изучением и применениями σ-субнормальных подгрупп [13]. Напомним, что подгруппа A в G называется *σ-субнормальной* в G [13], если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной, т. е. $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ_i-группой для некоторого i, для всех $i = 1, \ldots, n$.

Приведённые выше результаты [8], [9], [11] получают дальнейшее развитие также в теории σ-субнормальных подгрупп. Так, например, в работе [15] К.А. Аль-Шаро и А.Н. Скиба доказали, что если каждая подгруппа Шмидта группы G σ-субнормальна, то G' является σ-нильпотентной группой, т. е. является прямым произведением σ-примарных групп. Развивая этот результат, в статье [22] утверждается и доказывается, что в каждой группе G, удовлетворяющей такому условию, имеется нормальная σ-нильпотентная подгруппа N с циклической факторгруппой G / N. Более того, согласно работе [16], G' является σ-нильпотентной группой и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G является либо σ-субнормальной, либо модулярной в G.

В этой работе мы докажем следующий результат в данном направлении.

***Теорема* 0.1.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является p-нильпотентной.*

Следствиями данной теоремы являются несколько известных результатов.

***Следствие* 0.2** [9, теорема]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

***Следствие* 0.3** [9, теорема]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа G' группы G нильпотентна.*

***Следствие* 0.4** [8, теорема 2]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G / F(G)$ нильпотентна.*

***Следствие* 0.5** [12, теорема 1.9]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо $\mathfrak{U}$-нормальна, либо субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

1 Вспомогательные результаты

При построении доказательства основной теоремы были использованы следующие леммы.

***Лемма* 1.1.** *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы группы G, где N – нормальна и A – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G. Тогда*:

(1) AN / N *– $\mathfrak{U}_p$-нормальна в* G / N.

(2) *Если E / N – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G / N, то E – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G.*

(3) $A \cap E$ *– $\mathfrak{U}_p$-нормальна в E.*

(4) *Если E $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ – $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G.*

Доказательство. См. доказательство предложения 1.8 и леммы 3.3 в [1] или доказательство теоремы 1.1 и леммы 2.2 в [25]. □

***Лемма* 1.2** [26, глава А, леммы 14.1, 14.2, 14.3 и теорема 14.4]. *Пусть A и $N \le E$ являются подгруппами в G, где N является нормальной и A субнормальной подгруппами группы G. Тогда*:

(1) AN / N *– субнормальна в* G / N.

(2) *Если $A \le E$, то A является субнормальной в E.*

(3) *Если E / N является субнормальной в G / N, то E является субнормальной в G.*

(4) *Если E является субнормальной в G, то $\langle A, E\rangle$ – субнормальна в G}.*

***Лемма* 1.3** [4, III, теорема 5.2] или [5, VI, теорема 24.2]. *Если G – группа Шмидта, тогда $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – силовская p-подгруппа в G и $Q = \langle x\rangle$ – циклическая силовская q-подгруппа группы G, $p \ne q$. Помимо этого, $\langle x^q\rangle \le \Phi(G)$ и p имеет экспоненту p или 4 (если p – неабелева 2-группа).*

Факт, который мы приведём дальше, хорошо известен (в частности, см. [5, I, следствие 7.7.2]). Здесь он доказан без применения теории формаций.

***Лемма* 1.4.** *Если A является субнормальной подгруппой группы G, то для каждого простого p $O_p(A) \le O_p(G)$.*

Доказательство. Согласно условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_{t-1} \le A_t = G$$

такая, что A_i нормальна в A_{i+1} для всех $i = 1, \ldots, t-1$. Тогда по индукции мы получаем $O_p(A) \le O_p(A_{t-1})$. С другой стороны, $O_p(A_{t-1})$ характеристична в A_{t-1} и поэтому нормальна в $A_t = G$. Следовательно, $O_p(A_{t-}) \le O_p(G)$. □

2 Доказательство теоремы 1.1

Доказательство. Предположим, что эта утверждение неверно, и пусть G будет контрпримером минимального порядка.

(1) *Если E является собственной подгруппой группы G, тогда $E' \le F_p(E)$* (исходя из леммы 1.2 (2) и выбора G).

(2) *Если N является минимальной нормальной подгруппой группы G, тогда $(G / N)' \le F_p(G / N)$. Следовательно, $N \le G'$ and $O_{p'}(G) = 1$.*

Здесь используется цепочка рассуждений из работы [27] А.Н. Скибы (см. также в статье [12] доказательство теоремы 1.9).

Если G/N является p-нильпотентной, тогда это очевидно. Но предположим, что G/N не p-нильпотентна, и пусть E/N является произвольной подгруппой Шмидта в G/N. Пусть H является минимальным добавлением к N в E. Тогда $H/(H \cap N) \simeq HN/N = E/N$ – группа Шмидта и $H \cap N \le \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A является подгруппой Шмидта в H.

Мы получаем из леммы 1.3, что

$$(H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) =$$
$$= (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \simeq H/\Phi = P \rtimes Q,$$

где p является силовской p-подгруппой, q является силовской q-подгруппой в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $p \ne q$. Тогда, опять же по лемме 1.3, получаем, что $A = A_p \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \nleq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q-подгруппой в H/Φ, и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно леммам 1.1 (4) и 1.2 (4), $(A_q)^H = A^H$ является либо субнормальной либо $\mathfrak{U}_p$-нормальной подгруппой в G и, следовательно, $E/N = (A_q)^H NN$ является либо субнормальной, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальной в G/N, согласно леммам 1.1 (1) и 1.2 (1).

Тогда гипотеза будет верной для G/N, соответственно, из выбора G мы имеем $G'N/N = (G/N)' \le F_p(G/N)$. Если $N \cap G' = 1$, то $G'N/N \simeq G'/(G' \cap N) = G'/1 \simeq G'$ является p-нильпотентной группой, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $N \le G'$.

Предположим, что $N \le O_{p'}(G)$. Тогда $F_p(G/N) = F_p(G)/N$ и $G'N/N = G'/N$, поэтому $G'/N = (G/N)' \le F_p(G/N)$ и тогда $G' \le F_p(G)$. Этим противоречием мы завершаем доказательство утверждения (2).

(3) *Группа G – p-разрешима.*

Согласно пунктам (1) и (2) нам нужно лишь показать, что группа G не является неабелевой простой группой. Допустим предположение, что это утвеждение является неверным, и пусть A будет произвольной подгруппой Шмидта группы G. Согласно условию подгруппа A является либо субнормальной, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальной в группе G. С другой стороны, G является неабелевой простой группой. Тогда A $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G и $A_G = 1$. Но тогда $1 < A^G$ и каждый главный фактор G ниже $A^G = G$ будет либо циклическим, либо p'-группой. Из этого следует, что G не является неабелевой простой группой. Это противоречие заканчивает доказательство пункта (3).

(4) *Если R является минимальной нормальной подгруппой группы G, то $R \nleq \Phi(G)$ и $R = C_G(R) = O_p(G) = F_p(G)$. Помимо этого, $|R| > p$ и для некоторой максимальной подгруппы M группы G правдиво равенство $G = R \rtimes M$.*

Вначале отметим, что, ввиду утверждений (2) и (3), имеет место $R \le O_p(G)$. Согласно пункту (2) производная подгруппа

$$(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$$

группы G/R является p-нильпотентной. Допустим, что в G существует минимальная нормальная подгруппа $L \ne R$. Значит, $G'/(G' \cap L)$ является p'-нильпотентной и тогда

$$G' \simeq G'/((G' \cap R) \cap (G' \cap L)) = G'/(R \cap L)$$

является p-нильпотентной. Поэтому $G/F(G)$ является абелевой, что противоречит выбору G. Следовательно, R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $R \nleq G'$. Помимо этого, $R \nleq \Phi(G)$, иначе, в противном случае, G' нильпотентна согласно [26, глава А, лемма 13.2]. Значит, $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$ согласно [26, глава А, теорема 15.6 (2)]. Заметим также, что R не циклическая группа, потому что иначе группа $G/C_G(R) = G/R = G/F(G)$ является циклической. Следовательно, мы имеем (4).

(5) *$M \simeq G/R$ p-замкнута. Следовательно, R – силовская p-подгруппа группы G.*

Допустим, что M не является p-замкнутой группой, и пусть H – минимальная не q-нильпотентная подгруппа в M для некоторого простого числа $q \ne p$, делящего $|M|$. Тогда H – группа Шмидта ввиду [4, IV, теорема 5.4] и поэтому H либо субнормальна, либо является $\mathfrak{U}_p$-нормальной в G.

В первом случае для некоторого простого числа q имеет место $O_q(H) \ne 1$. Тогда $O_q(H) \le O_q(G) \le R$ по утверждению (4) и лемме 1.4, поэтому $R \cap M \ne 1$. Это противоречие показывает, что, H $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G.

Помимо этого очевидно, что $H_G = 1$, а, значит, каждый главный фактор G ниже H^G либо цикличен, либо является p'-группой. Но $R \le H^G$ по утверждению (4) и, следовательно, R является циклической, что противоречит утверждению (4). Это противоречие показывает, что

$M \simeq G/R$ q-нильпотентна для всех простых чисел $q \neq p$, делящих $|M|$. Тогда $O_p(M)R \leq O_p(G) = R$. Следовательно, $O_p(M) = 1$, поэтому утверждение (5) выполнено.

(6) *M – группа Миллера – Морено (т. е. M не является абелевой, но каждая собственная подгруппа в M является абелевой группой). Более того, M является q-группой для некоторого простого числа $q \neq p$.*

Вначале заметим, что M – холлова p'-подгруппа группы G, что очевидно из пунктов (4) и (5).

Тогда пусть S является произвольной максимальной подгруппой в M. Значит $RS/F_p(RS)$ будет абелевой согласно утверждения (1). Следовательно $R = (RS)'$, исходя из пунктов (4) и (5), и, очевидно, $S \simeq RS/R$ является абелевой. Тогда из выбора G и пункта (5) мы получаем (6).

Заключительное противоречие. Исходя из утверждения (6), $Z(M) \cap \Phi(M) \neq 1$. Пусть Z является подгруппой порядка q в $Z(M) \cap \Phi(M)$ и пусть $E = RZ$. Тогда E не нильпотентна (из пункта (4)). Однако $R = R_1 \times \cdots \times R_t$, где R_k является минимальной нормальной подгруппой в E для всех $k = 1, \ldots, t$ по теореме Машке. Следовательно, для некоторого i подгруппа $R_i \rtimes Z$ не будет нильпотентной, а, значит, эта подгруппа будет содержать подгруппу Шмидта вида $A = A_p \rtimes Z$.

Допустим, что $A < E$. Следовательно $|A_p| < |R|$ и $A_G = 1$. Следуя гипотезе, A либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G. Вначале допустим, что A является субнормальной в G. Тогда в E существует такая собственная подгруппа V, что $A \leq V$ и V является нормальной в E. Так как $Z \leq V < E$, то для некоторого k имеем $R_k \nleq V$. Тогда $R_k \cap V = 1$, следовательно, $R_k \leq C_E(V)$, поэтому $R_k \leq N_G(Z) = M$, где M является максимальной в G, получаем противоречие. Значит, A не субнормальна в G. Также очевидно, что $A_G = 1$, поэтому $R \leq T^G$ ввиду утверждения (4). Но в этом случае R является либо циклической группой, либо p'-группой, что невозможно ввиду пунктов (2) и (4).

Значит, $A = E$, следовательно $R = A_p$ и Z действует неприводимо на R. Очевидно, что $Z \leq \Phi(M)$, значит, каждая собственная подгруппа группы M действует неприводимо на R. Из этого факта получаем, что каждая максимальная подгруппа из M – циклическая. Значит, $q = 2$ и, следовательно, $|R| = p$, что противоречит пункту (4). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hu*, *B*. Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

2. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

3. *Skiba*, *A.N*. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.

4. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967. – 796 p.

5. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

6. *Шеметков*, *Л.А*. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 256 с.

7. *Ballester-Bolinehes*, *A*. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinehes, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.

8. *Семенчук*, *В.Н*. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В.Н. Семенчук. – Наука и Техника, Минск, 1981. – С. 138–149.

9. *Монахов*, *В.С*. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45 (6). – Р. 1316–1322.

10. *Ведерников*, *В.А*. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46 (6). – С. 669–687.

11. *Близнец*, *И.В*. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.

12. *Хуан*, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62 (1). – С. 201–220.

13. *Skiba*, *A.N*. On a-subnormal and a-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

14. *Beidleman*, *J.C*. On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

15. *Al-Sharo*, *K.A*. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

16. *Hu*, *B*. On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.

17. *Skiba*, *A.N.* Some characterizations of finite σ-soluble PσT-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

18. *Skiba*, *A.N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A.N. Skiba // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. – 2019. – Vol. 3. – P. 35–47.

19. *Guo*, *W.* Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Sci. China Math. – 2019. – Vol. 62. – P. 1355–1372.

20. *On* σ-*subnormality criteria in finite* σ-*soluble groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // RACSAM. – 2020. – Vol. 114, № 94. – DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4

21. *On* σ-*subnormal subgroups of factorised finite groups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, M.C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // J. Algebra. – 2020. – Vol. 559. – P. 195–202.

22. *Yi*, *X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2020. – Vol. 560. – P. 181–191.

23. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Siberian Math. J. – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.

24. *Kamornikov*, *S.F.* On σ-subnormal subgroups of finite 3'-groups / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // Ukranian Math. J. – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.

25. Chi, Z. On a lattice characterization of finite soluble PST-groups / Z. Chi, A.N. Skiba // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2020. – Vol. 101 (2). – P. 247–254. – DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972719000741.

26. *Doerk*, *K.* Finite Soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

27. *Skiba*, *A.N.* Finite groups with abnormal Schmidt subgroup / A.N. Skiba // Preprint, 2021.

Поступила в редакцию 26.01.2022.

Информация об авторах
Селькин Вадим Михайлович – д.ф.-м.н., доцент
Закревская Виктория Сергеевна – аспирантка
Косенок Николай Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент