Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

УДК 512.542

Конечные группы с X-полунормальными максимальными подгруппами

В.В. Подгорная, И.В. Близнец

Рассматриваются конечные группы с ограничениями на добавления к максимальным подгруппам. Изучается обобщение квазинормальности и полунормальности подгрупп конечных крупп такое, как X-полунормальность, где X – некоторое непустое множество элементов группы. В частности, установлена сверхразрешимость конечной группы G с X-полунормальными максимальными подгруппами, где подмножество $\varnothing \neq X \subseteq G$.

Ключевые слова: конечная группа, перестановочная подгруппа, X-полунормальная подгруппа, сверхразрешимая группа.

Finite groups with restrictions on the additions to maximal subgroups are considered. The generalization of the quasinormality and the seminormality of subgroups of finite groups such as X-seminormality are studied, where X is some non-empty set of elements of the group. The supersolvability of finite groups with given X-seminormal maximal subgroups is defined, where subset X is $\varnothing \neq X \subseteq G$.

Keywords: finite group, permutable subgroup, X-seminormal subgroup, supersolvable group.

Введение. Все рассматриваемые группы полагаются конечными.

Напомним, что подгруппу A группы G называют перестановочной с подгруппой B, если верно равенство $AB = BA$. Пусть даны подгруппы A и B в группе G и множество $\varnothing \neq X \subseteq G$. Говорят, что подгруппа A является X-перестановочной с подгруппой B, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^x A$ [1].

Квазинормальной называют подгруппу H группы G, которая перестановочна со всеми подгруппами из G [2]. С этим понятием связаны многие результаты теории групп, см. например [5]–[6]. Квазинормальные подгруппы широко используются при изучении свойств конечных групп. Так известна теорема Оре [2] о том, что каждая квазинормальная подгруппа конечной группы субнормальна. Классические свойства перестановочных подгрупп можно найти в работах Ито и Сепа, Майера и Шмидта, А.Н. Скибы и К.П. Шама, Го В.[3], В.С. Монахова и других.

Ряд авторов в своих работах изучали подгруппы, перестановочные со всеми максимальными подгруппами, и их влияние на свойства группы (например, [4]). Но часто встречается ситуация, когда произвольные подгруппы A и B не перестановочны в группе G, но при этом найдется элемент $x \in G$ такой, что $AB^x = B^x A$, то есть подгруппы будут X-перестановочными.

Имеются различные обобщения квазинормальности, см., например, [7]–[8]. Так обобщением квазинормальности является понятие полунормальной подгруппы H группы G, для которой существует добавление K из G такое, что $HK = G$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой подгруппы K_1 из K отличной от K. Отдельные свойства полунормальных подгрупп рассматривались в работах [4], [9]–[12]. В частности, в [9] установлена сверхразрешимость группы, в которой 2-максимальные подгруппы полунормальны. Очевидно, что нормальные и квазинормальные подгруппы являются полунормальными.

Определение. Пусть G – группа, H – ее подгруппа, и X – некоторое непустое множество элементов из группы G. Подгруппа H называется X-*полунормальной* в G, если существует подгруппа K в G такая, что $HK = G$ и для каждой собственной подгруппы K_1 из K найдется элемент $x \in X$ такой, что $HK_1^x = K_1^x H$ – собственная подгруппа в G. В этой ситуации подгруппу K можно называть X-супердобавлением к подгруппе H в группе G.

Заметим, что в случае, когда $X=\{1\}$ понятия X-перестановочной и X-полунормальной подгруппы совпадают с понятиями перестановочной и полунормальной подгруппы соответственно. В другой крайней ситуации рассматривают G-перестановочные подгруппы [3]. Можно сказать, что X-полунормальная подгруппа H группы G – это такая подгруппа, у которой все собственные подгруппы из супердобавления будут X-перестановочны с подгруппой H. В данной работе покажем применение свойств X-перестановочных максимальных подгрупп для описания сверхразрешимых групп.

Предварительные результаты. Необходимые определения и обозначения можно найти в [5]–[6]. В лемме 2.1 работы [1] приводятся известные свойства X-перестановочных подгрупп, где X – подгруппа в группе G.

Верны следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G, N – нормальная подгруппа группы G и H – X-полунормальная подгруппа в группе G. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если $X=\{1\}$, то H – полунормальная подгруппа группы G.

(2) если $X\subseteq Y\subseteq G$, то подгруппа H будет Y-полунормальной подгруппой в группе G.

(3) если $X\subseteq K$, $H\subseteq K$, H и K – подгруппы группы G, то H X-полунормальна в K.

(4) подгруппа HN – X-полунормальная подгруппа в группе G.

(5) подгруппа HN/N – XN/N-полунормальная подгруппа в фактор-группе G/N.

(6) если $X\subseteq N$, то HN/N – полунормальная подгруппа в G/N.

Все утверждения непосредственно вытекают из определения X-полунормальной подгруппы.

Лемма 2 [9]. Если в группе G существует единственная максимальная подгруппа, то G – примарная циклическая группа.

Лемма 3 ([13], теорема VI.9.3). Пусть группа G p-разрешима, и индекс каждой максимальной подгруппы равен простому числу p или взаимно прост с p. Тогда группа G p-сверхразрешима.

Основные результаты.

Теорема 1. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G, и H – максимальная подгруппа в группе G. Если H X-полунормальна в G, то индекс $|G:H|$ есть простое число.

Доказательство. Пусть K – X-супердобавление к подгруппе H в группе G и K_1 – максимальная подгруппа из K. По условию существует элемент $x\in G$, такой, что $HK_1^x = K_1^xH$ – собственная подгруппа в G. Поскольку $G=KH$, то $x=kh$, где $k\in K$, $h\in H$, т. е. $HK_1^{kh} = K_1^{kh}H$ – собственная подгруппа в G. Из максимальности H следует, что $HK_1^{kh} = H$ и $K_1^{kh}\subseteq H$. Теперь $K_1^k\subseteq H$. Предположим, что существует другая максимальная в K подгруппа K_2, не сопряженная с K_1. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что $K_2^l\subseteq H$ для некоторого $l\in K$. Так как $K=\langle K_1^k, K_2^l\rangle$, то $K\subseteq H$, противоречие. Поэтому допущение неверно, и в K имеется единственный класс сопряженных максимальных подгрупп. Выберем элемент $g\in K\setminus K_1$, тогда циклическая подгруппа, порожденная элементом g не содержится в K_1, поэтому $K=\langle g\rangle$ – циклическая примарная группа по лемме 2. Но тогда индекс $|K:K_1|$ – простое число. Теперь $G=HK$, $K_1\subseteq H$, поэтому $|G:H|=|K:K\cap H\cap K|=|K:K_1|$ – простое число. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G, содержащее единичный элемент. Максимальная подгруппа H группы G будет X-полунормальной подгруппой в группе G тогда и только тогда, когда индекс $|G:H|$ есть простое число.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 1, достаточность получаем из доказательства теоремы 2 [9].

Следствие 2. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G. Если в группе G все максимальные подгруппы X-полунормальны, то G сверхразрешима.

Следствие 3. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G, содержащее единичный элемент. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда все максимальные подгруппы H группы G будут X-полунормальными подгруппами в группе G.

Следствие 4. Пусть π – некоторое множество простых чисел, X есть некоторое непустое множество элементов из группы G. Если в π-разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа, индекс которой делится на простое число из π, X-полунормальна, то группа G π-сверхразрешима.

Доказательство. По теореме 1 индекс каждой максимальной подгруппы из G есть либо π'-число, либо равен некоторому простому числу из π. По лемме 3 группа G p-сверхразрешима для всех простых чисел $p \in \pi$. Получаем π-сверхразрешимость группы G.

Следствие 5. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G. Если подгруппа H X-полунормальна в группе G и F – подгруппа группы G, в которой подгруппа H максимальна, то $|F:H|$ есть простое число.

Доказательство вытекает из утверждений теоремы 1 и леммы 1.

Следствие 6. Пусть X есть некоторое непустое множество элементов из группы G. В любой группе пересечение максимальных подгрупп, не обладающих X-супердобавлением, является сверхразрешимой подгруппой.

Теорема 2. В группе G все максимальные подгруппы G-полунормальны тогда и только тогда, когда G сверхразрешима.

Доказательство. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. По условию подгруппа M G-полунормальна. Из теоремы 1 следует, что ее индекс $|G:M| = p$, где число p простое. Итак, все максимальные подгруппы имеют простые индексы. По теореме Хупперта группа G сверхразрешима.

Докажем обратное утверждение. Пусть H – максимальная подгруппа сверхразрешимой группы G, значит ее индекс $|G:H| = p$, где число p простое. И пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Тогда подгруппа P не содержится в H и существует элемент $x \in P \backslash H$.

Пусть $|x| = p^a$, $|\langle x\rangle \cap H| = p^{a_1}$. Заметим, что $a > a_1$, поэтому $|\langle x\rangle H| = \dfrac{|\langle x\rangle| \times |H|}{|\langle x\rangle \cap H|} = \dfrac{p^a \frac{|G|}{p}}{p^{a_1}} \leq |G|$ и $\langle x\rangle H = G$. Теперь элемент $x^p \in H$, и если A есть собственная подгруппа циклической группы $\langle x\rangle$, то A – подгруппа в H, и H будет X-полунормальной при $x = 1$. Теорема доказана.

Пусть A – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда A-проектор группы G называется сверхразрешимым проектором группы G или подгруппой Гашюца. По теореме Гашюца в каждой разрешимой группе существует единственный сопряженный класс сверхразрешимых проекторов. Кроме того, если H – сверхразрешимый проектор разрешимой группы G и $H < M \leq G$, то $|M:H|$ – не простое число. Из теоремы 2 получаем

Следствие 7. Сверхразрешимый проектор разрешимой группы G-полунормален тогда и только тогда, когда он совпадает со всей группой.

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа и H – ее сверхразрешимый проектор. Предположим, что подгруппа H G-полунормальна в G и $H \neq G$. Пусть F – подгруппа группы G, в которой H является максимальной подгруппой. По лемме 1 подгруппа H G-полунормальна в F, а по следствию теоремы 1 индекс $|F:H|$ – простое число. Но это противоречит отмеченному свойству сверхразрешимого проектора. Поэтому $H = G$. Обратное утверждение очевидно.

Следствие 8. В разрешимой несверхразрешимой группе сверхразрешимый проектор не G-полунормален и не квазинормален.

Доказательство. Пусть разрешимая группа $G \notin \mathsf{A}$, H – ее сверхразрешимый проектор. Если подгруппа H G-полунормальна, то по предыдущему следствию $H = G \in \mathsf{A}$, что противоречит с выбором группы. Пришли к противоречию, подгруппа H не является G-полунормальной, тем более не квазинормальна.

Следствие 9. Если все вторые максимальные подгруппы G-полунормальны в группе G, то группа разрешима.

Литература

1. Го, В. X -перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742–759.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – V. 5. – P. 431–460.
3. Guo, W. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Muth. Debrecen. – 2006. – V. 68, № 3–4. – P. 433–449.
4. Su, Xiongying. On semi-normal subgroups of finite group / Su Xiongying // J.Math. (Wuhan). – 1988. – № 8 (1). – P. 5–9.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
6. Судзуки, М. Строение группы и строение структуры её подгруппы / М. Судзуки. – М. : ИЛ, 1960. – 158 с.
7. Beidleman, J.C. On finite groups satisfying the permutizer condition / J.C. Beidleman, D.J.S. Robinson. // J.Algebra. – 1997. – V. 191. – P. 686–703.
8. Kegel, O. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen / O. Kegel. // Math. Z. – 1962. – V. 78. – P. 205–221.
9. Подгорная, В.В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В.В. Подгорная // Весцi НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 22–25.
10. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальными силовскими нециклическими подгруппами / В.С. Монахов, В.В. Подгорная // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Вопросы алгебры. – 2004. – № 19. – С. 50–53
11. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. –Т. 80, вып. 4. – С. 573–581.
12. Княгина, В.Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
13. Huppert, B. Endliche gruppen, I / B. Huppert. – Berlin : Heidelberg; New York : Springer, 1967. – 793 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 08.06.2017