Р. Габасов, А. В. Лубочкин, Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления, *Автомат. и телемех.*, 1997, выпуск 9, 3–14

Автоматика и телемеханика, № 9, 1997

Детерминированные системы

УДК 517.977.58

© 1997 г. Р. ГАБАСОВ, д-р физ.-мат. наук,
А.В. ЛУБОЧКИН, канд. физ.-мат. наук
(Белорусский государственный университет, Минск)

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Развивая ранее разработанные методы программной оптимизации для специальной линейно-квадратичной задачи обосновывается алгоритм реализации оптимального управления типа обратной связи в условиях действия на систему неизвестных возмущений.

1. Введение

Проблема синтеза оптимальных систем является центральной в теории управления [1]. Она возникла в начале 50-х годов в результате естественного развития классической теории регулирования. Проблема синтеза исследовалась и математиками (классические подходы к ней изложены в [2–4]), но успех был достигнут (если исключить отдельные примеры) только в одной специфической задаче оптимизации линейных систем по квадратичному критерию качества, в которой нет ограничений ни на управления, ни на состояния систем [5, 6].

В работах [7, 8] обосновывается новый подход к решению проблемы синтеза оптимальных систем. Для решения этой проблемы в линейной задаче там предложены регуляторы, которые способны в режиме реального времени генерировать управления, циркулирующие в замкнутых оптимальных системах [1].

В [9–12] описан алгоритм построения программных оптимальных управлений в одной специальной линейно-квадратичной задаче (к подобным задачам сводятся задачи оптимального управления с минимальной энергией [4]). Цель данной работы – развить результаты [9–12] на задачу синтеза оптимальных систем, используя подход, предложенный в [7, 8].

2. Постановка задачи

В классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T = [0, t^*]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$(1)\qquad J(u) = \int\limits_0^{t^*} c(t)\big(u(t) - \alpha(t)\big)^2/2\,dt \to \min,$$

$$(2)\qquad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$(3)\qquad x(t^*) \in X^* = \{\, x \in R^n : Hx = g \,\},$$

$$(4)\qquad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T$$

($x \in R^n$, $b \in R^n$, $u \in R$, $g \in R^m$; $A \in R^{n\times n}$, $H \in R^{m\times n}$, $\operatorname{rank} H = m < n$; $c(t) > 0$, $\alpha(t)$, $t \in T$ – заданные непрерывные, дифференцируемые функции). Требование непрерывности функций $c(t)$, $\alpha(t)$, $t \in T$ не является принципиальным. Это ограничение продиктовано желанием бóльшей доступности и краткости дальнейшего изложения. В случае кусочной непрерывности функций $c(t)$, $\alpha(t)$, $t \in T$ оптимальное программное управление может иметь дополнительные разрывы в точках разрыва этих функций.

Оптимальным программным управлением задачи (1)–(4) называется любая кусочно-непрерывная функция $u^0(t) = u^0(t\,|\,0, x_0)$, $t \in T$, которая удовлетворяет ограничению (4), порождает оптимальную траекторию $x^0(t) = x^0(t\,|\,0, x_0)$, $t \in T$ системы (2), попадающую в заданный момент t^* на терминальное множество X^* (3), и придает критерию качества (1) минимальное значение. Если на систему (2) в процессе ее функционирования не действуют возмущения, то работа регулятора сводится к подаче в текущий момент τ на вход системы программного оптимального управления $u^0(\tau)$, которое можно вычислить до включения регулятора в момент $\tau = 0$. Алгоритм построения $u^0(t)$, $t \in T$ описан в [9–12].

Далее исследуется более реальная практическая ситуация. Пусть динамическая система испытывает действие неизвестного кусочно-непрерывного возмущения $w(t) \in R^n$, $t \in T^0 = [0, t^0]$, $t^0 < t^*$, из-за которого ее движение $x^*(t)$, $t \in T$ подчиняется не (2), а уравнению:

$$\dot{x} = Ax + bu + w(t), \quad x(0) = x_0.$$

Программное управление в этих условиях не обеспечивает даже допустимость траектории. Именно в связи с этим в данном случае на практике предпочтение отдают управлениям типа обратной связи.

Классическое понятие оптимального управления типа обратной связи состоит в следующем. Погрузим задачу (1)–(4) в семейство задач ($\tau \in [0, t^*)$):

$$(5) \qquad \int_{\tau}^{t^*} c(t)\big(u(t) - \alpha(t)\big)^2/2\,dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu,$$
$$x(\tau) = x^*(\tau), \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T_\tau = [\tau, t^*]; \quad Hx(t^*) = g.$$

Под оптимальным управлением типа обратной связи принято понимать кусочно-непрерывную функцию $u^0(t, x)$, $x \in R^n$, $t \in T$, которая для каждого момента $\tau \in$ $\in T$ и произвольного начального состояния $x^*(\tau)$ из множества управляемости $Z(\tau)$ порождает траекторию системы

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x), \quad x(\tau) = x^*(\tau),$$

совпадающую с оптимальной траекторией $x^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau))$, $t \in T_\tau$ задачи (5).

Рассмотрим поведение исходной системы (2), замкнутой оптимальной обратной связью

$$u^0(t, x), \quad x \in Z(\tau), \quad t \in T$$

в условиях неизвестных постоянно действующих возмущений

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x) + w(t), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть реализовалось возмущение $w(t) = w^*(t)$, $t \in T$. Обозначим через $x^*(t)$, $t \in T$ классическое решение последнего уравнения. Тогда в рассматриваемом процессе управления поведение системы будет описываться функцией $x^*(t)$, $t \in T$, которая является результатом действия на систему возмущения $w^*(t)$, $t \in T$ и управления

$$u^*(t) = u^0(t, x^*(t)), \quad t \in T.$$

Из последнего выражения видно, что в конкретном процессе управления оптимальная обратная связь целиком не используется: нужны лишь ее значения вдоль изолированной линии $\{t, x^*(t)\}$, $t \in T$ пространства позиций $\{t, x\}$, $x \in Z(t)$, $t \in T$. Более того, значение $u^*(\tau)$ не нужно знать заранее (например, в начальный момент $t = 0$), достаточно его иметь только в текущий момент τ, когда система оказалась в текущем состоянии $x^*(\tau)$.

Понятно, что объем необходимой текущей информации об оптимальной обратной связи в каждом конкретном процессе управления несравнимо меньше, чем это требуется по ее определению, и эта информация нужна не сразу, а используется последовательно малыми долями по мере развития процесса.

Далее, учтем еще три обстоятельства: 1) во многих современных системах управления, использующих средства вычислительной техники, управляющие воздействия подаются на вход объекта управления не непрерывно, а в дискретные моменты времени с определенным тактом; 2) реальное время течет с конечной скоростью; 3) современные средства вычислительной техники располагают весьма быстродействующими устройствами. Учитывая перечисленные обстоятельства, во многих практических процессах управления тот же результат достижим в режиме реального времени со сколь угодно высокой точностью, что дает оптимальная обратная связь.

Дадим строгие определения новых понятий. Функцию $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T$ назовем реализацией оптимального управления типа обратной связи, соответствующей возмущению $w^*(t)$, $t \in T$.

Семейство кусочно-непрерывных функций $u^*(h, t)$, $t \in T$, $h \to 0$ вида $u^*(h, t) \equiv \equiv f_k(t)$, $t \in [kh, (k+1)h)$, $k = \overline{0, N-1}$, $Nh = t^*$, где $f_k(t)$ – непрерывная функция, известная к моменту $t = kh$, назовем дискретной реализацией оптимальной обратной связи в замкнутой системе с возмущением $w(t) = w^*(t)$, $t \in T$, если выполняется условие

$$\int_0^{t^*} |u^*(t) - u^*(h, t)|\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

При выбранном $h > 0$ элемент $u^*(h, t)$, $t \in T$ указанного семейства будем называть h-реализацией оптимальной обратной связи при действии возмущения $w(t) = = w^*(t)$, $t \in T$.

При выбранном такте работы $h > 0$ любое устройство, способное вычислять в режиме реального времени[1] значения функции $u^*(h, t)$, $t \in T$, назовем оптимальным регулятором в задаче (1)–(4).

В дальнейшем для краткости речи будем опускать зависимость оптимального регулятора от выбранного параметра $h > 0$.

Цель настоящей работы – описание алгоритма работы оптимального регулятора.

3. Построение программного оптимального управления

Согласно [9–12], непрерывное оптимальное программное управление $u^0_\tau(t) = = u^0\big(t \,|\, \tau, x^*(\tau)\big)$, $t \in T_\tau$ простой задачи (5) имеет вид:

$$u^0_\tau(t) \equiv -1, \quad \text{если} \quad \varphi^0_\tau(t) < -c(t); \quad u^0_\tau(t) \equiv 1, \quad \text{если} \quad \varphi^0_\tau(t) > c(t);$$

[1] Понятие "решение в режиме реального времени" определяется в разделе 6.

$$u^0_\tau(t) \equiv \varphi^0_\tau(t)/c(t), \quad \text{если} \quad \left|\varphi^0_\tau(t)\right| \leqslant c(t), \quad t \in T_\tau,$$

где $\varphi^0_\tau(t) = \varphi^0\big(t \,|\, \tau, x^*(\tau)\big)$, $t \in T_\tau$ – функция, определяемая соотношением

$$(6) \qquad \varphi^0_\tau(t) = \Delta^0_\tau(t) + c(t)u^0_\tau(t) = \psi^{0'}_\tau(t)b + c(t)\alpha(t), \quad t \in T_\tau;$$

$\Delta^0_\tau(t) = \Delta^0\big(t \,|\, \tau, x^*(\tau)\big)$, $t \in T_\tau$ – коуправление: $\Delta^0_\tau(t) = \psi^{0'}_\tau(t)b - c(t)\big(u^0_\tau(t) - \alpha(t)\big)$, $t \in$ $\in T_\tau$; $\psi^0_\tau(t) = \psi^0\big(t \,|\, \tau, x^*(\tau)\big)$, $t \in T_\tau$ – решение (котраектория) сопряженной системы:

$$\dot\psi = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = H'y(\tau);$$

$y(\tau)$ – m-вектор потенциалов; штрих – операция транспонирования.

Таким образом, для работы регулятора достаточно знать поведение вектора потенциалов $y(\tau)$, $\tau \in T^0$ и принадлежащих T_τ концов квазиособых отрезков $T_{*i}(\tau) =$ $= \big[\underline{t}_i(\tau), \bar t_i(\tau)\big]$, $i \in P(\tau) = \big\{1, \ldots, p(\tau)\big\}$:

$$(7) \qquad \big\{\underline{t}_i(\tau),\, i \in P_q(\tau);\ \bar t_i(\tau),\, i \in P_r(\tau)\big\} = \big\{t \in T_\tau : \left|\varphi^0_\tau(t)\right| = c(t)\big\}.$$

Здесь: $\left|\varphi^0_\tau(t)\right| \leqslant c(t)$, $t \in T_{*i}(\tau)$, $i \in P(\tau)$; $P_q(\tau) = \big\{s^0(\tau) + 1, \ldots, p(\tau)\big\}$, $P_r(\tau) =$ $= \big\{1, \ldots, s^*(\tau)\big\}$. Значения индексов $s^0(\tau)$, $s^*(\tau)$, зависящие от структуры оптимального управления, вводятся ниже. Начальное положение $\underline{t}_i(0)$, $i \in P_q(0)$; $\bar t_i(0)$, $i \in P_r(0)$ точек (7) и вектора $y(0)$ можно найти до включения регулятора, решив методом [9–12] задачу (5) при $\tau = 0$. Для вычисления $y(\tau)$ и точек (7) в произвольный момент $\tau \in T^0$ ниже выводятся уравнения их поведения в реальном процессе.

Замечание. Под простой задачей здесь понимается задача, в которой

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\big(\varphi^0_\tau(t) - c(t)k_{i-1}\big)\big|_{t=\underline{t}_i(\tau)} \neq 0, \quad i \in P_q(\tau);$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\varphi^0_\tau(t) - c(t)k_i\big)\big|_{t=\bar t_i(\tau)} \neq 0, \quad i \in P_r(\tau);$$

где $u^0_\tau(t) \equiv k_{i-1}$, $t \in T^-\big(\underline{t}_i(\tau)\big)$, $i \in P_q(\tau)$; $u^0_\tau(t) \equiv k_i$, $t \in T^+\big(\bar t_i(\tau)\big)$, $i \in P_r(\tau)$; $|k_i| = 1$, $i \in \big\{s^0(\tau), \ldots, s^*(\tau)\big\}$; $T^-(t)$ – малая левосторонняя окрестность точки t, $T^+(t)$ – ее малая правосторонняя окрестность.

4. Определяющие уравнения регулятора

Пусть $u^0_\tau(t)$, $\varphi^0_\tau(t)$, $t \in T_\tau$ и $y(\tau)$ – оптимальные: управление, функция (6) и вектор потенциалов задачи (5), соответственно. Обозначим

$$T_*(\tau) = \big\{\, t \in T_\tau : \left|\varphi^0_\tau(t)\right| < c(t) \,\big\} = \bigcup_{i \in P(\tau)} \big(\underline{t}_i(\tau), \bar t_i(\tau)\big);$$

$h(t) = HF(t^*, t)b$, $t \in T$, где $F(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot x = Ax$. В дальнейшем предполагается, что для любого $\tau \in T^0$ имеет место равенство

$$(9) \qquad \operatorname{rank}\big(h(t),\, t \in T_*(\tau)\big) = m.$$

Рассмотрим моменты (7), считая их упорядоченными:

$$\underline{t}_i(\tau) < \bar t_i(\tau) < \underline{t}_{i+1}(\tau) < \bar t_{i+1}(\tau), \quad i \in P(\tau) \setminus \big\{p(\tau)\big\}.$$

Положим:

$$s^0(\tau)=0,\ \text{если}\ \underline{t}_1(\tau)>\tau;\quad s^0(\tau)=1,\ \text{если}\ \underline{t}_1(\tau)\leqslant\tau,\ \bar{t}_1(\tau)\geqslant\tau;$$
$$s^*(\tau)=p(\tau),\ \text{если}\ \bar{t}_{p(\tau)}(\tau)<t^*;\quad s^*(\tau)=p(\tau)-1,\ \text{если}$$
$$\bar{t}_{p(\tau)}(\tau)\geqslant t^*,\ \underline{t}_{p(\tau)}(\tau)\leqslant t^*;\quad K(\tau)=\{s^0(\tau),\dots,s^*(\tau)\};$$
$$K^-(\tau)=\{i\in K(\tau):\varphi^0_\tau(t)\leqslant -c(t),\ t\in T_i^*(\tau)\doteq[\bar{t}_i(\tau),\underline{t}_{i+1}(\tau)]\};$$
$$K^+(\tau)=K(\tau)\setminus K^-(\tau)=\{i\in K(\tau):\varphi^0_\tau(t)\geqslant c(t),\ t\in T_i^*\}.$$

Совокупность $S(\tau)=\{K^-(\tau),K^+(\tau),p(\tau)\}$ назовем структурой оптимального управления задачи (5).

Пусть позиция $\{\tau_*,\ x^*(\tau_*)\}$ такова, что при $\tau=\tau_*$ выполняются условие (8), одно из условий (10) и одно из условий (11):

$$\underline{t}_1(\tau)>\tau\quad\text{или}\quad \bar{t}_1(\tau)>\tau>\underline{t}_1(\tau),\tag{10}$$
$$\bar{t}_{p(\tau)}(\tau)<t^*\quad\text{или}\quad \underline{t}_{p(\tau)}(\tau)<t^*<\bar{t}_{p(\tau)}(\tau).\tag{11}$$

Положим $p_*=p(\tau_*)$, $s^0_*=s^0(\tau_*)$, $s^*_*=s^*(\tau_*)$; $K^-_*=K^-(\tau_*)$, $K^+_*=K^+(\tau_*)$; $k_i^*==1$, $i\in K^+_*$; $k_i^*=-1$, $i\in K^-_*$. К системе (5) в начальной позиции $\{\tau_*,\ x^*(\tau_*)\}$ приложим управление $u^*(\tau)$, $\tau>\tau_*$ и возмущение $w^*(\tau)$, $\tau\geqslant\tau_*$, в силу чего она станет двигаться по траектории $x^*(\tau)$, $\tau\geqslant\tau_*$. Для $\tau\in T^+(\tau_*)$ структура $S(\tau)$ управления $u^0_\tau(t)$, $t\in T_\tau$ совпадает с $S(\tau_*)$, а значения моментов и вектора

$$\underline{t}_i(\tau),\quad i\in P_q(\tau);\quad \bar{t}_i(\tau),\quad i\in P_r(\tau);\quad y(\tau)\in R^m,\tag{12}$$

соответствующие позиции $\{\tau,\ x^*(\tau)\}$, удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}&q_i(\underline{t}_j(\tau),\ j\in P_q(\tau);\ y(\tau))=0,\quad i\in P_q(\tau);\\ &r_i(\bar{t}_j(\tau),\ j\in P_r(\tau);\ y(\tau))=0,\quad i\in P_r(\tau);\\ &f(\tau;\ \underline{t}_i(\tau),\ i\in P_q(\tau);\ \bar{t}_i(\tau),\ i\in P_r(\tau);\ y(\tau);\ x^*(\tau))=0,\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$q_i(\underline{t}_j,\ j\in P_q;\ y)=y'h(\underline{t}_i)+c(\underline{t}_i)(\alpha(\underline{t}_i)-k_{i-1}),\quad i\in P_q;$$
$$r_i(\bar{t}_j,\ j\in P_r;\ y)=y'h(\bar{t}_i)+c(\bar{t}_i)(\alpha(\bar{t}_i)-k_i),\quad i\in P_r;$$
$$f(\tau;\ \underline{t}_i,\ i\in P_q;\ \bar{t}_i,\ i\in P_r;\ y;\ x)=\sum_{i=s^0}^{s^*}\int_{\bar{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}}h(t)k_i\,dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\int_{\underline{t}_i}^{\bar{t}_i}h(t)\big(y'h(t)/c(t)+\alpha(t)\big)\,dt+HF(t^*,\tau)x-g,$$

$\bar{t}_0=\bar{t}_0(\tau)=\tau$, если $s^0=0$; $\underline{t}_1=\underline{t}_1(\tau)=\tau$, если $s^0=1$; $\underline{t}_{p+1}=\underline{t}_{p+1}(\tau)=t^*$, если $s^*=p$; $\bar{t}_p=\bar{t}_p(\tau)=t^*$, если $s^*=p-1$; $p=p_*$, $s^0=s^0_*$, $s^*=s^*_*$; $k_i=k_i^*$, $i=\overline{s^0,s^*}$.

Из (8), (9) следует, что матрица Якоби $G(\underline{t}_i(\tau),\ i\in P_q(\tau);\ \bar{t}_i(\tau),\ i\in P_r(\tau);\ y(\tau))\big|_{\tau=\tau_*}$ невырождена. Здесь

$$G(\underline{t}_i,\ i\in P_q;\ \bar{t}_i,\ i\in P_r;\ y)=\begin{bmatrix}G_{11}&0&G_{13}\\0&G_{22}&G_{23}\\0&0&G_{33}\end{bmatrix};$$

$$G_{11} = \operatorname{diag}\bigl(-y'H\mu(\underline{t}_i) + \dot c(\underline{t}_i)\bigl(\alpha(\underline{t}_i) - k_{i-1}\bigr) + c(\underline{t}_i)\dot\alpha(\underline{t}_i),\ i \in P_q\bigr);$$
$$G_{22} = \operatorname{diag}\bigl(-y'H\mu(\bar t_i) + \dot c(\bar t_i)\bigl(\alpha(\bar t_i) - k_i\bigr) + c(\bar t_i)\dot\alpha(\bar t_i),\ i \in P_r\bigr);$$
$$G_{33} = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\underline{t}_i}^{\bar t_i} h(t)h'(t)/c(t)\,dt; \quad G_{13} = \begin{bmatrix} h'(\underline{t}_i) \\ i \in P_q \end{bmatrix}; \quad G_{23} = \begin{bmatrix} h'(\bar t_i) \\ i \in P_r \end{bmatrix};$$

$\mu(t) = F(t^*, t)Ab$, $t \in T$. Значит при $\tau \in T^+(\tau_*)$ существует единственное непрерывное решение (12) уравнения (13). Один способ решения уравнений (13) описан в разделе 6.

Поведение элементов (12) описывается с помощью (13) на промежутке $[\tau_*, \bar\tau)$, где а) $\bar\tau = t^0$, если $S(\tau) = S(\tau_*)$, для любого $\tau \in [\tau_*, t^0]$; б) $\bar\tau$ – наименьший момент из $[\tau_*, t^0]$, при котором $S(\bar\tau) \neq S(\tau_*)$.

Пусть $\bar\tau < t^0$. В момент $\tau = \bar\tau$ структура $S(\tau)$ может измениться по одной из следующих причин: 1) $\bar\tau = \underline{t}_1(\bar\tau)$; 2) $\bar\tau = \bar t_1(\bar\tau)$; 3) $\bar t_{p(\bar\tau)}(\bar\tau) = t^*$; 4) $\underline{t}_{p(\bar\tau)}(\bar\tau) = t^*$; 5) $p(\bar\tau) = p(\bar\tau - 0) - 1$; 6) $p(\bar\tau) = p(\bar\tau - 0) + 1$; 7) $|K(\bar\tau)| = |K(\bar\tau - 0)| - 1$; 8) $|K(\bar\tau)| = |K(\bar\tau - 0)| + 1$ (здесь $|K|$ – количество элементов множества K).

5. Анализ определяющих уравнений

Исследуем ситуации 1)–8). В каждой из них возможны два случая: а) $S(\bar\tau + 0) = S(\bar\tau - 0)$; б) $S(\bar\tau + 0) \neq S(\bar\tau - 0)$.

Рассмотрим ситуацию 1а). При $\tau \in T^+(\bar\tau)$ имеем $S(\tau) = S(\tau_*)$ и поведение элементов (12) описывается уравнением (13). Они решаются по правилам раздела 6 с учетом дополнительного правила (17).

В случае 1б) при $\tau \in T^+(\bar\tau)$ имеем $S(\tau) = \{\overline{K}^-, \overline{K}^+, \bar p\}$, где $\bar s^0 = s^0_* + 1$, $\bar s^* = s^*_*$, $\bar p = p_*$; $\overline{K}^- = \{i \in \{\bar s^0, \ldots, \bar s^*\} : \bar k_i = -1\}$, $\overline{K}^+ = \{\bar s^0, \ldots, \bar s^*\} \setminus \overline{K}^-$; $\bar k_i = k^*_i$, $i \in \overline{\bar s^0, \bar s^*}$; $\overline{P}_q = P_q \setminus \{s^0_*\}$, $\overline{P}_r = P_r$. Поведение элементов (12) при $\tau \in T^+(\bar\tau)$ описывается уравнением (13), где $p = \bar p$, $s^0 = \bar s^0$, $s^* = \bar s^*$; $P_q = \overline{P}_q$, $P_r = \overline{P}_r$; $k_i = \bar k_i$, $i \in \overline{s^0, s^*}$, с начальными условиями $\underline{t}_i(\bar\tau) = \underline{t}_i(\bar\tau - 0)$, $i \in P_q$; $\bar t_i(\bar\tau) = \bar t_i(\bar\tau - 0)$, $i \in P_r$; $y(\bar\tau) = y(\bar\tau - 0)$.

Аналогично ситуации 1), в случае 2а) уравнения (13) решаются по правилам раздела 6 с учетом дополнительного правила (18). В ситуации 2б) положим $\bar s^0 = s^0_* - 1$, $\bar s^* = s^*_* - 1$, $\bar p = p_* - 1$; $\bar k_i = k^*_{i+1}$, $i = \overline{\bar s^0, \bar s^*}$; $\overline{P}_q = \bigl(P_q \setminus \{p_*\}\bigr) \cup \{1\}$, $\overline{P}_r = P_r \setminus \{s^*_*\}$; $\underline{t}_i(\bar\tau) = \underline{t}_{i+1}(\bar\tau - 0)$, $i = \overline{\bar s^0 + 1, \bar p}$; $\bar t_i(\bar\tau) = \bar t_{i+1}(\bar\tau - 0)$, $i = \overline{1, \bar s^*}$. Далее поступаем так же, как и в случае 1б).

В случае 3а) учитываем дополнительное правило (19), в случае 4а) – правило (20). В ситуации 3б) полагаем $\bar s^0 = s^0_*$, $\bar s^* = s^*_* - 1$, $\bar p = p_*$; $\overline{P}_q = P_q$, $\overline{P}_r = P_r \setminus \{s^*_*\}$; в ситуации 4б) имеем $\bar s^0 = s^0_*$, $\bar s^* = s^*_*$, $\bar p = p_* - 1$; $\overline{P}_q = P_q \setminus \{p_*\}$, $\overline{P}_r = P_r$.

Ситуации 5) и 7) означают исчезновение одного квазиособого отрезка или отрезка постоянства управления, соответственно, внутри T_τ, т.е. слияние двух соседних отрезков постоянства управления или слияние двух соседних квазиособых отрезков, соответственно (случаи исчезновения отрезков через концы T_τ уже описаны в ситуациях 1)–4)).

Рассмотрим ситуации 6) и 8), когда появляется или новый квазиособый отрезок, или новый отрезок постоянства управления. Если это происходит через концы T_τ, то поступаем аналогично ситуациям 1)–4). Если новые отрезки появляются внутри T_τ, то имеем ситуации, аналогичные случаям 5а) и 7а).

Замечание. Поскольку нельзя сказать, какой случай а) или б) реализуется в ситуациях 1)–8) при $\tau > \overline{\tau}$, то для $\tau \in T^+(\overline{\tau})$ можно решать параллельно две системы уравнений, соответствующие этим случаям.

6. Численный метод решения определяющих уравнений

Опишем простейший алгоритм решения функционального уравнения (13), использующий метод Ньютона. Предположим сначала, что выполняется одно из условий (10), одно из условий (11) и

$$\det G\big(\underline{t}_i(\tau),\, i \in P_q;\, \overline{t}\,(\tau),\, i \in P_r;\, y(\tau)\big) \neq 0. \tag{14}$$

Как и при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенное решение уравнения (13) будем строить на сетке с шагом $h > 0$.

Пусть построена последовательность $\underline{t}_i(\tau_* + sh)$, $i \in P_q$; $\overline{t}_i(\tau_* + sh)$, $i \in P_r$; $y(\tau_* + sh)$; $s = \overline{0, \ell - 1}$, соответствующая последовательности позиций $\{\tau_* + sh,\, x^*(\tau_* + sh)\}$, $s = \overline{0, \ell - 1}$, при этом выполняются условия (8) и

$$\begin{aligned}
&q_i\big(\underline{t}_j(\tau_* + sh),\, j \in P_q;\, y_*(\tau_* + sh)\big) = 0, \quad i \in P_q;\\
&r_i\big(\overline{t}_j(\tau_* + sh),\, j \in P_r;\, y_*(\tau_* + sh)\big) = 0, \quad i \in P_r;\\
&f\big(\tau_* + sh;\, \underline{t}_i(\tau_* + sh),\, i \in P_q;\, \overline{t}_i(\tau_* + sh),\, i \in P_r;\\
&y(\tau_* + sh);\, x_*(\tau_* + sh)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Для вычисления в новой позиции $\{\check{\tau}, x^*(\check{\tau})\}$, $\check{\tau} = \tau_* + \ell h$ моментов $\underline{t}_i(\check{\tau})$, $i \in P_q$; $\overline{t}_i(\check{\tau})$, $i \in P_r$ и вектора $y(\check{\tau})$ построим векторы $z^k = (\underline{t}_i^k,\, i \in P_q;\, \overline{t}_i^{\,k},\, i \in P_r;\, y^k)$, $k = \overline{1, k^0}$:

$$z^1 = \big(\underline{t}_i^1 = \underline{t}_i(\check{\tau} - h),\, i \in P_q;\ \overline{t}_i^{\,1} = \overline{t}_i(\check{\tau} - h),\, i \in P_r;\ y^1 = y(\check{\tau} - h)\big); \tag{15}$$

$z^k = z^{k-1} - G^{-1}(z^{k-1})\big(q_i(\underline{t}_j^{k-1},\, j \in P_q;\, y^{k-1}),\, i \in P_q;\, r_i(\overline{t}_j^{\,k-1},\, j \in P_r;\, y^{k-1}),\, i \in P_r;$ $f'(\check{\tau};\, \underline{t}_i^{k-1},\, i \in P_q;\, \overline{t}_i^{\,k-1},\, i \in P_r;\, y^{k-1};\, x^*(\check{\tau}))\big)'$, $k = \overline{2, k^0}$. Положим: $\underline{t}_i(\tau_* + \ell h) = \underline{t}_i^{k^0}$, $i \in P_q$; $\overline{t}_i(\tau_* + \ell h) = \overline{t}_i^{\,k^0}$, $i \in P_r$; $y(\tau_* + \ell h) = y^{k^0}$.

При достаточно малых $h > 0$ и достаточно больших $k^0 = k^0(\ell h)$, $\ell = 0, 1, \ldots$ метод сходится, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ будут построены такие функции $\underline{t}_i(\ell h)$, $i \in P_q$; $\overline{t}_i(\ell h)$, $i \in P_r$; $y(\ell h)$, $\ell = 0, 1, \ldots$, что

$$\begin{aligned}
&\big\|\, f\big(\ell h;\, \underline{t}_i(\ell h),\, i \in P_q;\, \overline{t}_i(\ell h),\, i \in P_r;\, y(\ell h);\, x^*(\ell h)\big) \,\big\| \leqslant \varepsilon;\\
&\big|\, q_i\big(\underline{t}_j(\ell h),\, j \in P_q;\, y(\ell h)\big) \,\big| \leqslant \varepsilon, \quad i \in P_q;\\
&\big| r_i\big(\overline{t}_j(\ell h),\, j \in P_r;\, y(\ell h)\big) \big| \leqslant \varepsilon, \quad i \in P_r, \quad \ell = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Опираясь на свойства метода Ньютона, нетрудно подсчитать объем работы, необходимый для вычисления с заданной точностью решения определяющих уравнений в момент τ, если при этом использовать известное решение для момента $\tau - h$ в качестве начального приближения. Если имеющееся вычислительное устройство эту работу способно вычислить за h единиц реального времени, то будем говорить о решении определяющих уравнений в режиме реального времени.

Предположим теперь, что при некотором $\tau = \overline{\tau}$ нарушается первое условие из (10). Это происходит в ситуациях 1а) и 8б). В этом случае для построения

$$\underline{t}_i(\overline{\tau} + h), \quad i \in P_q; \quad \overline{t}_i(\overline{\tau} + h), \quad i \in P_r; \quad y(\overline{\tau} + h), \tag{16}$$

соответствующих позиции $\{\bar{\tau}+h,\ x^*(\bar{\tau}+h)\}$, вектор z^1 строим не по правилу (15), а следующим образом:

$$z^1 = \left(\underline{t}_1^1 = \bar{\tau}+h;\ \underline{t}_i^1 = \underline{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_q \setminus \{1\};\ \bar{t}_i^1 = \bar{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_r;\ y^1 = y(\bar{\tau})\right). \tag{17}$$

Дальнейшие операции совпадают с описанными выше.

Если при некотором $\tau = \bar{\tau}$ нарушается второе условие из (10) (случаи 2а) и 6б)), то для построения (16) вектор z^1 строим по правилу

$$z^1 = \left(\underline{t}_i^1 = \underline{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_q;\ \bar{t}_1^1 = \bar{\tau}+h;\ \bar{t}_i^1 = \bar{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_r \setminus \{1\};\ y^1 = y(\bar{\tau})\right). \tag{18}$$

Если нарушается первое условие из (11) (ситуации 3а), 8б)), то вектор z^1 строим по правилу

$$z^1 = \left(\underline{t}_i^1 = \underline{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_q;\ \bar{t}_i^1 = \bar{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_r \setminus \{p\};\ \bar{t}_p^1 = t^* - h;\ y^1 = y(\bar{\tau})\right). \tag{19}$$

При нарушении второго условия из (11) (случаи 4а), 6б)) вектор z^1 строим по правилу

$$z^1 = \left(\underline{t}_i^1 = \underline{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_q \setminus \{p\};\ \underline{t}_p^1 = t^* - h;\ \bar{t}_i^1 = \bar{t}_i(\bar{\tau}),\ i \in P_r;\ y^1 = y(\bar{\tau})\right). \tag{20}$$

Случай нарушения условия (14) означает либо нарушение условия (9), что тесно связано с управляемостью динамической системы, либо нарушение условий (8) (это происходит в ситуациях 5а), 6б), 7а), 8б)). В данной работе эта ситуация не исследуется. Она будет рассмотрена отдельно.

7. Алгоритм работы регулятора

Опишем работу регулятора для случая, когда в каждый текущий момент можно точно измерить только состояние системы. Зададим параметр метода $h > 0$. Пусть система находится в позиции $\{\tau,\ x^*(\tau)\}$. Обозначим через $u^*(t)$, $t \in [0,\tau)$ управление, выработанное регулятором к моменту τ. Положим $u^*(t) \equiv u^0(t \mid \tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h)$; $u^0(t \mid \tau, x^*(\tau)) = k_{s^0}$, если $t \leqslant \underline{t}_1(\tau)$ или $t \geqslant \bar{t}_1(\tau)$; $u^0(t \mid \tau, x^*(\tau)) = \varphi_\tau^0(t)/c(t) = y'(\tau)h(t)/c(t) + \alpha(t)$, если $\underline{t}_1(\tau) \leqslant t \leqslant \bar{t}_1(\tau)$.

Следуя описанным правилам, регулятор в каждом конкретном процессе функционирования системы (5) будет вырабатывать h-реализацию оптимального управления типа обратной связи при действии возмущения $w^*(t)$, $t \in T$.

8. Примеры

Работу регулятора продемонстрируем на двух примерах.

Пример 1. Рассмотрим задачу управления неколебательной системой

$$\int_0^6 u^2(t)/2\,dt \to \min,\quad \dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = u + w,\quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \tag{21}$$

$$x_1(6) = 8,\quad x_2(6) = 0,\quad -1 \leqslant u(t) \leqslant 1,\quad t \in [0,6].$$

В качестве возмущения рассматривалась функция $w(t) = a\cos bt$, $t \in [0{,}0; 3{,}0]$, $a \in [0{,}1; 1{,}0]$, $b \in [2{,}0; 10{,}0]$. Уравнения (13) решались с двумя значениями параметра h: 1) $h = 0{,}02$, 2) $h = 0{,}01$. Требуемая точность решения достигалась за 1–3 итерации. Точность выполнения терминальных ограничений во всех случаях имела порядок 10^{-10}–10^{-8}.

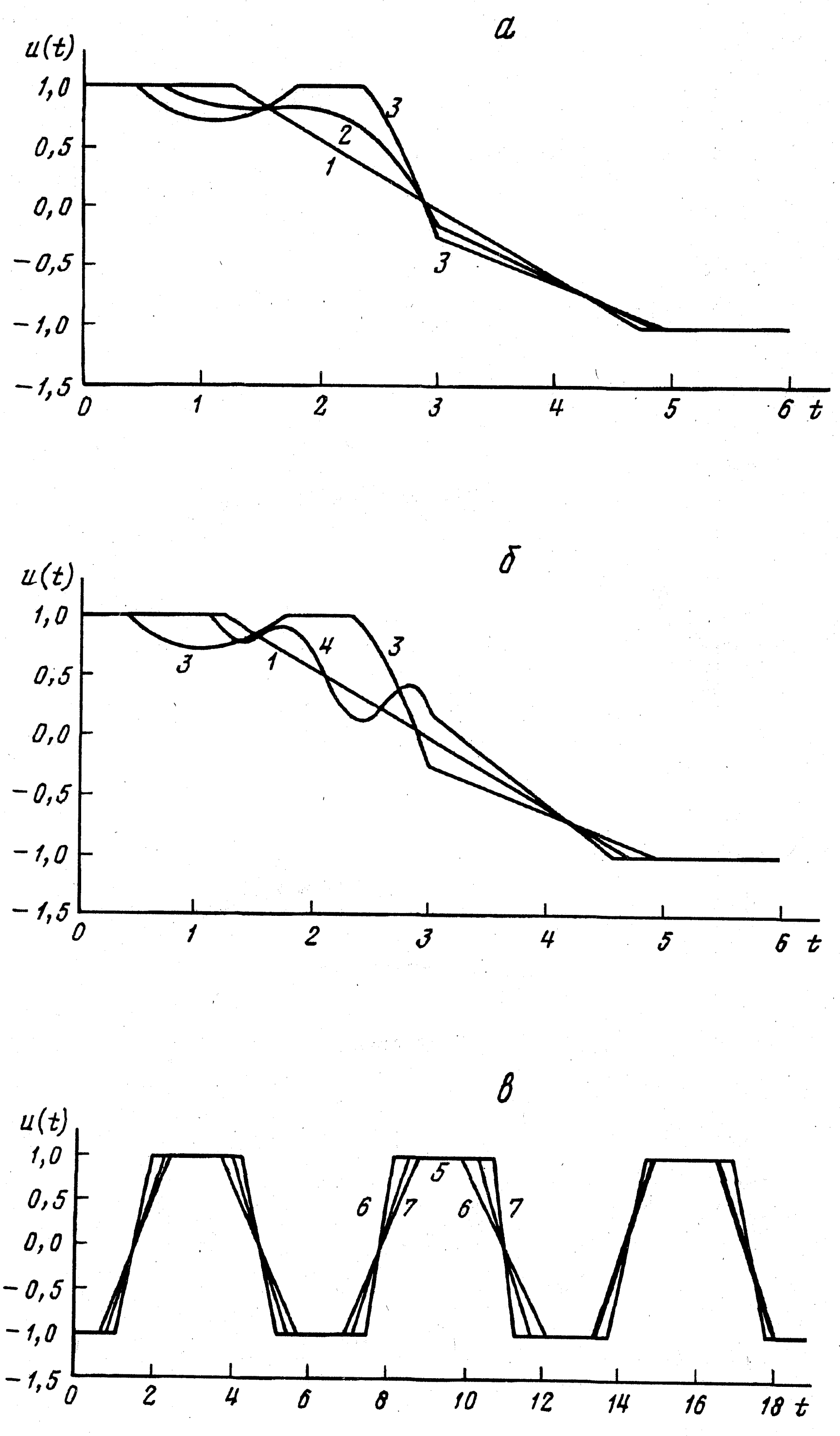
а
u(t)
1,0
0,5
0,0
−0,5
−1,0
−1,5
0
1
2
3
4
5
6
t
1
2
3
3
б
u(t)
3
1
4
3
в
u(t)
2
4
6
8
10
12
14
16
18
5
6
7
6
7

Рис. 1

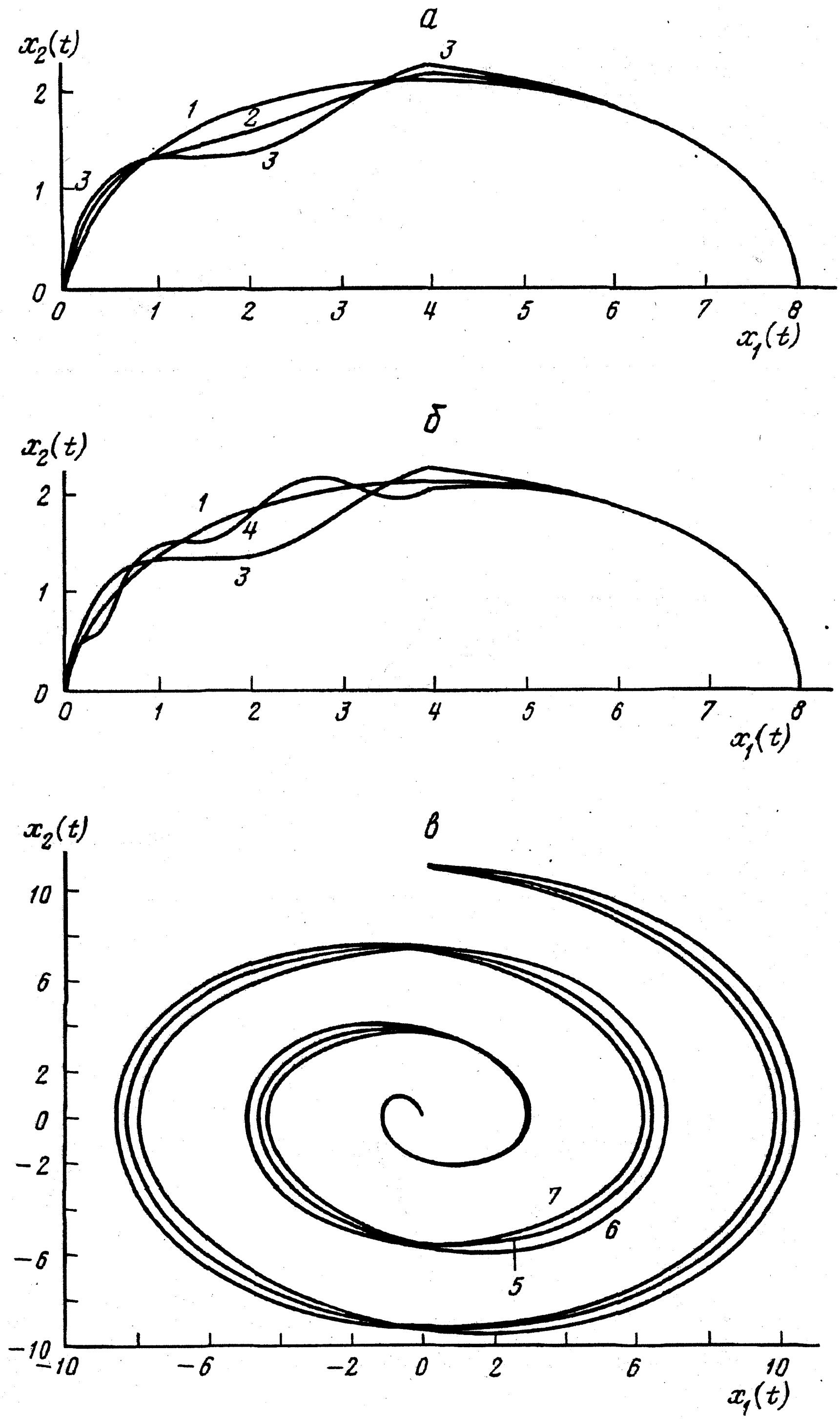
а
$x_2(t)$
$x_1(t)$
1
2
3
0 1 2 3 4 5 6 7 8
б
$x_2(t)$
$x_1(t)$
1
3
4
0 1 2 3 4 5 6 7 8
в
$x_2(t)$
$x_1(t)$
10
6
2
0
−2
−6
−10
−10 −6 −2 0 2 6 10
5
6
7

Рис. 2

Таблица 1

$u(\cdot)$	$w(\cdot)$	$\underline{t}_i,\ i \in P_q$	$\bar{t}_i,\ i \in P_r$	$J(u)$
$u^0(\cdot)$	—	1,267949	4,732051	1,845299
$u^*(\cdot)$	$0{,}5\cos 2t$	0,660000	4,875707	1,891904
	$0{,}9\cos 2t$	0,437911 2,344837	1,780000 4,915758	2,025819
	$0{,}9\cos 6t$	1,134715	4,556654	1,877521

Таблица 2

$u(\cdot)$	$w(\cdot)$	$\underline{t}_i,\ i \in P_q$	$\bar{t}_i,\ i \in P_r$	$J(u)$
$u^0(\cdot)$	—	0,831513 3,973105 7,114698 10,256291 13,397883 16,539476	2,290968 5,432561 8,574153 11,715746 14,857339 17,998931	6,613194
$u^*(\cdot)$	$1{,}0\cos 2t$	1,042703 3,668117 7,482602 9,840000 13,703354 16,844946	2,020000 5,695444 8,153285 12,070382 14,657682 17,799275	6,838647
	$-0{,}7\cos 2t$	0,689771 4,235493 6,898310 10,701190 13,336396 16,477989	2,468956 5,213539 8,819077 11,305927 14,835445 17,977038	6,742858

На рис. 1,*а* и 1,*б* приведены графики программного управления (обозначен цифрой *1*) и управлений, выработанных регулятором при $a = 0{,}5$, $b = 2{,}0$ (цифра *2*), при $a = 0{,}9$, $b = 2{,}0$ (цифра *3*), при $a = 0{,}9$, $b = 6{,}0$ (цифра *4*). На рис. 2,*а* и 2,*б* приведены графики соответствующих фазовых траекторий. В табл. 1 включены соответствующие данные (указаны концы квазиособых отрезков и значения критерия качества).

Пример 2. Для задачи управления колебательной системой

$$\int_0^{6\pi} u^2(t)/2\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \quad x_1(0) = x_{10},$$

$$x_2(0) = x_{20}, \quad x_1(6\pi) = x_2(6\pi) = 0, \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0, 6\pi]$$

были проведены эксперименты, аналогичные экспериментам для задачи (21) ($w(t) = a\cos bt$, $t \in [0, 4\pi]$). На рис. 1,*в* приведены графики программного управления (цифра *5*) и управлений, выработанных регулятором при $a = 1{,}0$, $b = 2{,}0$ (цифра *6*), $a = -0{,}7$, $b = 2{,}0$ (цифра *7*). На рис. 2,*в* приведены графики соответствующих фазовых траекторий. Соответствующие данные включены в табл. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фельдбаум А.А.* О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // АиТ. 1955. № 2. С. 120–149.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. I Конгр. ИФАК. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
6. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I–III // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294–1299.
8. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 3–19.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И., Ракецкий В.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Минск: Изд-во Университетское, 1987.
10. *Лубочкин А.В.* Оптимизация переходного процесса по минимуму энергии управления // Вестник Белорусского ун-та. Серия 1. 1988. № 3. С. 67–68.
11. *Лубочкин А.В.* Алгоритм построения допустимого управления минимальной интенсивности для линейной системы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 5. С. 116.
12. *Лубочкин А.В.* Методы решения выпуклых задач оптимального управления: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Минск, 1987.

Поступила в редакцию 27.04.95