Р. ГАБАСОВ,
Ф. М. КИРИЛЛОВА,
О. И. КОСТЮКОВА,
В. М. РАКЕЦКИЙ

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть 4

ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ

Минск
Издательство «Университетское»
1987

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выпуклые задачи, вслед за линейными, составляют второй актуальный во многих приложениях раздел современной теории экстремальных задач. Для них разработана глубокая теория, предложены разнообразные численные методы, которые испытывались в практических расчетах и численных экспериментах на ЭВМ.

В данной части монографии изучаются методы решения двух специальных классов выпуклых задач. Первый класс составляют гладкие задачи, в которых ограничения формируются при помощи линейных равенств и неравенств, а целевая функция является выпуклой квадратичной функцией. Второй выбранный для исследования класс задач содержит негладкие задачи, отличающиеся от упомянутых гладких задач видом целевой функции. Последняя есть кусочно-линейная функция, образованная из конечного набора линейных функций при помощи операций взятия максимума и модуля. Общие выпуклые (гладкие и негладкие) задачи будут рассмотрены в следующей (заключительной) части монографии, где материал данной и предыдущих частей используется для нелинейных задач при конструировании численных методов первого и второго порядков.

В книге наряду со статическими экстремальными задачами исследуются их динамические аналоги, задачи оптимального управления, которые с позиций конструктивного подхода в литературе изучены еще недостаточно. В этой связи среди выпуклых задач оптимального управления можно отметить задачу А. М. Лётова об аналитическом конструировании регуляторов. Для решения выпуклых задач оптимального управления применяется метод опорных задач, разработанный во второй части монографии для линейного случая. Метод, основанный на специальной редукции вариационных задач к однотипным конечномерным, позволяет строить точные решения задач оптимального управления, содержащих разнообразные ограничения на управление и фазовую траекторию.

В монографии используются традиционные обозначения. Формулы, теоремы, подзаголовки в пределах каждого параграфа имеют одинарную нумерацию. При ссылках на результаты другого параграфа той же главы используется двойная нумерация, в которой первая цифра означает номер параграфа. Если формула находится вне данной главы, то дополнительно указывается и номер главы.

Соавторами результатов, помещенных в данной части монографии, являются Е. А. Костина (§ 1 гл. 2), А. В. Лубочкин (§ 5 гл. 4), С. В. Прищепова (§ 2 гл. 2), Б. Р. Умаров (§ 2 гл. 3), А. С. Чернушевич (§ 1 гл. 1; § 3 гл. 4), Е. И. Шилкина (§ 1, 2 гл. 2). Всем перечисленным сотрудникам выражаем нашу глубокую признательность.

Авторы

3. Проблема построения допустимых управлений. Методы предыдущих параграфов можно непосредственно использовать для построения допустимых управлений в задаче (1), если в ней вместо (2) присутствуют ограничения-равенства

$$d_i' x(t) = \alpha_i, \ i = \overline{1, m}, \ t \in T.$$

В этом случае задача первой фазы имеет вид

$$\int_0^{t^*} \sum_{i=1}^{m} (d_i' x(t) - \alpha_i)^2 \, dt \to \min,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = x_0, \ |u(t)| \leqslant 1, \ t \in T,$$

и может быть решена методом § 3.

Построение допустимых управлений в задачах, включающих ограничения-неравенства (2), (3), осуществляется или путем введения искусственных управлений с помощью методов решения линейных задач [6], или методами решения задач на минимакс.

§ 5. Построение оптимального (по среднеквадратичной интенсивности управления) переходного процесса в линейной системе

В данном параграфе излагается конечный метод решения специальной линейно-квадратичной задачи оптимального управления, в котором используется только опора ограничений.

1. Критерий оптимальности. В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t) = [u(t-0) + u(t+0)]/2$, $t \in T = [0, t^*]$, рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J(u) = \int_0^{t^*} c(t) \, (u(t) - \alpha(t))^2 / 2 dt \to \min,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \ x(0) = x_0, \ Gx(t^*) = g, \ |u(t)| \leqslant 1, \ t \in T, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n$; $g \in \mathbf{R}^m$; A, G — матрицы соответствующих размеров; $\operatorname{rank} G = m$; $c(t) > 0$, $\alpha(t)$, $t \in T$,— заданные непрерывные кусочно-дифференцируемые функции.

Стандартно вводятся понятия допустимого и оптимального управлений, опоры ограничений $T_{\text{оп}} = \{t_i \in T, i = \overline{1, m}\}$: $\det P \neq 0$, где $P = (p(t_i), i = \overline{1, m})$; $p(t) = Gq(t)$, $\dot{q}(t) = -Aq(t)$, $t \in T$, $q(t^*) = b$. Пара $\{u, T_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления и опоры ограничений — опорное управление. Оно считается невырожденным, если $|u(t_i)| < 1$, $i = \overline{1, m}$.

Для $\{u, T_{оп}\}$ построим вектор потенциалов $y' = (c(t_i)(u(t_i) - \alpha(t_i)), \ i = \overline{1, m})'P^{-1}$ и коуправление $\Delta(t) = \psi'(t)b - c(t)(u(t) - \alpha(t))$, $t \in T$, где $\psi(t)$, $t \in T$,— решение сопряженной системы (котраектория)

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \ \psi(t^*) = G'y. \qquad (2)$$

Тогда для приращения критерия качества на допустимых управлениях $u(t)$, $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, имеем.

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = -\int_0^{t^*} \Delta(t)\Delta u(t)\,dt + \eta, \qquad (3)$$

где $\eta = \int_0^{t^*} c(t)\Delta u^2(t)/2dt$. Из (3) следует

Критерий оптимальности. Для оптимальности допустимого управления u в задаче (1) достаточно существования такой опоры $T_{оп}$, что для опорного управления $\{u, T_{оп}\}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\Delta(t) \leqslant 0 \text{ при } u(t) = -1;\ \Delta(t) \geqslant 0 \text{ при } u(t) = 1;\\ \Delta(t) = 0 \text{ при } |u(t)| < 1,\ t \in T.\end{gathered} \qquad (4)$$

Пусть $\{u, T_{оп}\}$— невырожденное опорное управление. Для оптимальности допустимого управления u необходимо, чтобы для $\{u, T_{оп}\}$ выполнялись соотношения (4).

Следствие. Если u^0 — оптимальное управление и при некоторой $T_{оп}$ пара $\{u^0, T_{оп}\}$— невырожденное опорное управление, то u^0 — непрерывная функция.

2. Алгоритм. Пусть $\{u, T_{оп}\}$— начальное опорное управление. Построим квазиуправление ω:

$$\begin{gathered}\omega(t) = -1, \text{ если } \varphi(t) < -c(t);\ \omega(t) = 1, \text{ если } \varphi(t) > c(t);\\ \omega(t) = \alpha(t) + \psi'(t)b/c(t), \text{ если } |\varphi(t)| \leqslant c(t),\ t \in T,\end{gathered} \qquad (5)$$

где $\varphi(t) = \psi'(t)b + c(t)\alpha(t)$. По квазиуправлению ω построим квазитраекторию $\varkappa$: $\dot{\varkappa} = A\varkappa + b\omega$, $\varkappa(0) = x_0$.

Если $G\varkappa(t^*) = g$, то ω — оптимальное управление. В противном случае найдем вектор λ: $\lambda = R^{-1}(G\varkappa(t^*) - g)$, где $R = (r_i, i = \overline{1, m})$;

$$r_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} p(t)\,\dot{\omega}(t)\,\frac{t_{i-1} - t}{t_{i-1} - t_i}\,dt + $$

$$+ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} p(t)\,\dot{\omega}(t)\,\frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}\,dt, \quad i = \overline{1, m};$$

$t_0 = 0$, $t_{m+1} = t^*$. Если

$$|\lambda_i| \leqslant \mu, \quad i = \overline{1, m} \tag{6}$$

($\mu > 0$ — параметр метода), то переходим к доводке (см. ниже). В противном случае по схеме, изложенной в главе 4. Ч. 2, строится конечномерная задача квадратичного программирования (опорная задача). Используя ее специфику, разработан конечный алгоритм решения, который позволяет построить оптимальный опорный план. По оптимальному опорному плану строится опорное управление, для которого выполняются условия перехода к доводке (6) для любого заданного $\mu > 0$.

Процедура доводки состоит в поиске решения $\overline{\omega}_{оп} = (\overline{\omega}_i,\ i = \overline{1, m})$ уравнения

$$F(\overline{\omega}_{оп}) = \sum_{j=1}^{p} \Bigg(\int\limits_{\underline{t}_j}^{\underline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})} p(t)\,(\omega(\underline{t}_j) - \alpha(t))\,dt -$$

$$- \int\limits_{\overline{t}_j}^{\overline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})} p(t)\,(\omega(\overline{t}_j) - \alpha(t)\,dt) + \int\limits_{\underline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})}^{\overline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})} p(t)\,\psi'(t; \tag{7}$$

$$\overline{\omega}_{оп})\,b/c(t)\,dt - \int\limits_{\underline{t}_j}^{\overline{t}_j} p(t)\,\psi'(t)\,b/c(t)\,dt \Bigg) = g - G\varkappa(t^*).$$

Здесь $[\underline{t}_j, \overline{t}_j]$ — особый отрезок квазиуправления ω (5): $|\varphi(t)| \leqslant c(t)$, $t \in [\underline{t}_j, \overline{t}_j]$, $j = \overline{1, p}$; p — число особых отрезков; $\underline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})$, $j = \overline{1, p}$, — функции, заданные неявно соотношениями $\alpha(\underline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})) + \psi'(\underline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп});\ \overline{\omega}_{оп})\,b/c(\underline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})) = \omega(\underline{t}_j)$, $\underline{\tau}_j(\omega_{оп}) = \underline{t}_j$ (аналогично для $\overline{\tau}_j(\overline{\omega}_{оп})$), $j = \overline{1, p}$; $\psi'(t;\ \overline{\omega}_{оп})$, $t \in T$, — решение системы (2) при $y' = (c(t_i)\,(\overline{\omega}_i - \alpha(t_i)),\ i = \overline{1, m})' P^{-1}$.

Пусть решение $\omega_{оп}$ уравнения (7) таково, что

$\underline{\tau}_1(\bar{\omega}_{оп}) < \bar{\tau}_1(\bar{\omega}_{оп}) \leqslant \underline{\tau}_2(\bar{\omega}_{оп}) < \ldots \leqslant \underline{\tau}_p(\bar{\omega}_{оп}) < \bar{\tau}_p(\omega_{оп})$; $|\bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп})| \leqslant 1$, $t \in [\underline{\tau}_j(\bar{\omega}_{оп}),\ \bar{\tau}_j(\bar{\omega}_{оп})]$; $\bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп}) \equiv \equiv \operatorname{sign}\omega(\bar{t}_j)$, $t \in [\bar{\tau}_j(\bar{\omega}_{оп}),\ \underline{\tau}_{j+1}(\bar{\omega}_{оп})]$, $j = \overline{1,\ p-1}$; $\bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп}) \equiv \operatorname{sign}\omega(\bar{t}_1)$, $t \in [0,\ \underline{\tau}_1(\bar{\omega}_{оп})]$; $\bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп}) \equiv \equiv \operatorname{sign}\omega(\bar{t}_p)$, $t \in [\bar{\tau}_p(\bar{\omega}_{оп}),\ t^*]$, где $\bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп})$, $t \in T$,— квазиуправление, построенное по $T_{оп}$ и $\bar{\omega}_{оп}$. Тогда квазиуправление $\bar{\omega}$ является оптимальным управлением в задаче (1).

Для решения уравнения (7) в качестве начального приближения возьмем $\omega_{оп}^{(0)} = (\omega_i^{(0)} = \omega_i = u(t_i),\ i = \overline{1,\ m})$. Пусть известно k-е приближение $\omega_{оп}^{(k)} = (\omega_i^{(k)},\ i = \overline{1,\ m})$ и $\frac{d}{dt}(\alpha(t) + \psi'(t;\ \ \omega_{оп}^{(k)})\, b/c(t) \neq)0$ при $t \in \{\underline{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)}),\ \bar{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)}),\ j = 1,\ p\}$. Следующее приближение $\omega_{оп}^{(k+1)}$ найдем по формуле

$$\omega_{оп}^{(k+1)} = \omega_{оп}^{(k)} + G^{-1}(\omega_{оп}^{(k)})\,(g - G\varkappa(t^*) - F(\omega_{оп}^{(k)})), \quad (8)$$

где $G(\omega_{оп}^{(k)}) = \sum\limits_{j=1}^{p} \int\limits_{\underline{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)})}^{\bar{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)})} p(t)\, p'(t)/c(t)\, dt \times P^{-1} \operatorname{diag}(c(t_i),\ i = \overline{1,\ m})$.

Оказывается, $\det G(\omega_{оп}^{(k)}) \neq 0$, если $t_i \in \bigcup\limits_{j=1}^{p} [\underline{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)}),\ \bar{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)})]$, $i = \overline{1,\ m}$. В случае, когда $t_{i_0} \notin \bigcup\limits_{j=1}^{p} [\underline{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)}),\ \bar{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)})]$ при некотором i_0, положим $\bar{T}_{оп} = (T_{оп} \setminus t_{i_0}) \cup \bar{t}_{i_0}$; $\bar{\omega}_{оп}^{(k)} = (\bar{\omega}_i^{(k)} = \omega_i^{(k)},\ i = \overline{1,\ m},\ i \neq i_0;\ \bar{\omega}_{i_0}^{(k)} = \omega(\bar{t}_{i_0};\ \omega_{оп}^{(k)}))$, где $\bar{t}_{i_0} \in \bigcup\limits_{j=1}^{p} [\underline{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)}),\ \bar{\tau}_j(\omega_{оп}^{(k)})]$ и $e_{i_0}' P^{-1} p(\bar{t}_{i_0}) \neq 0$. В этом случае $\bar{\psi}'(t;\ \bar{\omega}_{оп}^{(k)})\, b = \psi'(t;\ \omega_{оп}^{(k)})\, b$, $t \in T$, а, следовательно, и $\bar{\omega}^{(k)} = \bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп}^{(k)}) = \omega^{(k)} = \omega(t;\ \omega_{оп}^{(k)})$, $t \in T$. Здесь $\bar{\psi}(t;\ \bar{\omega}_{оп}^{(k)})$, $t \in T$, строится согласно (2), $\bar{\omega}(t;\ \bar{\omega}_{оп}^{(k)})$, $t \in T$,— согласно (5) по $\bar{T}_{оп}$ и $\bar{\omega}_{оп}^{(k)}$. Итерации (8) доводки продолжим при новых опоре $\bar{T}_{оп}$ и векторе $\bar{\omega}_{оп}^{(k)}$.

Процесс останавливаем, если: 1) достигнута требуемая точность невязки $\|g - G\varkappa^{(k)}(t^*)\|$; 2) через 3 итерации (8) не установился квадратичный закон уменьшения невязки $\|g - G\varkappa^{(k)}(t^*)\|$. В первом случае $\omega^{(k)}$ принимаем за оптимальное управление, во втором, положив $\mu = \mu/3$, переходим к формированию и решению новой опорной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И.* Конструктивные методы оптимизации.— Минск: изд-во «Университетское», 1984. Ч. 1. Линейные задачи.—214 с.

2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации.— Минск: изд-во «Университетское», 1984. Ч. 2. Задачи управления.— 207 с.

3. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Конструктивные методы оптимизации.— Минск: изд-во «Университетское», 1986. Ч. 3. Сетевые задачи.— 222 с.

4. *Кюнци Г. П., Крелле В.* Нелинейное программирование.— М.: Сов. радио, 1962.—303 с.

5. *Ерёмин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1976.—191 с.

6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования.— Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина. Ч. 1. Общие задачи. 1977.—176 с.; Ч. 2. Транспортные задачи. 1978.—239 с.; Ч. 3. Специальные задачи. 1980.—368 с.

7. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и применения.— М.: Прогресс, 1966.—600 с.

8. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Сенько А. Л.* Двухфазные методы решения канонической задачи линейного программирования // Докл. АН БССР.—1983.— Т. 22.— № 9.

9. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.* Методы решения общей задачи линейного программирования // Докл. АН БССР.—1979.— Т. 23.— № 3.

10. Адаптивная оптимизация. Программное обеспечение ЭВМ / Ин-т математики АН БССР / Под ред. Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой, А. А. Сенько, А. В. Покатаева.— Минск, 1983. Вып. 43.—239 с.; 1985. Вып. 55.—249 с.

11. Конструктивная теория экстремальных задач / Под ред. Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой.— Минск: изд-во «Университетское», 1984.—204 с.

12. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации.— Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1981.—350 с.

13. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.— М.: Наука, 1981.—384 с.

14. *Лётов А. М.* Динамика полета и управление.— М.: Наука, 1969.—360 с.

15. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.—392 с.

16. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.—488 с.

17. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления.— Минск: Наука и техника, 1974.— 272 с.
18. *Биби М., Костюкова О. И.* Оптимизация линейной системы управления по квадратичному терминальному критерию качества // Докл. АН БССР.— 1986.— Т. 30.— № 1.
19. *Беллман Р.* Динамическое программирование.— М.: ИЛ, 1960.—400 с.
20. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.— М.: Наука, 1968.—475 с.
21. *Полак Э.* Численные методы оптимизации.— М.: Мир, 1974.— 376 с.
22. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем.— Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1973.— 248 с.