Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

М. И. Жадан
Е. М. Березовская

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое пособие

для студентов специальности 1-31 03 03–02
«Прикладная математика
(научно-педагогическая деятельность)»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 519.6(076)
ВВК 22.193я73
Ж15

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков,
кандидат физико-математических наук В. И. Мироненко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Жадан, М. И.

Ж15 Методы решения сеточных уравнений : практическое пособие / М. И. Жадан, Е. М. Березовская; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 47 с.

ISBN 978-985-577-308-6

В практическом пособии содержатся основные понятия по методам решения сеточных уравнений, алгоритмам математических моделей, лабораторные работы и вопросы для самостоятельной подготовки к выполнению лабораторных работ.

Издание адресовано студентам специальности 1-31 03 03–02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)» и призвано оказать помощь по приобретению практических навыков в области вычислительной математики и дальнейшему совершенствованию программирования на алгоритмических языках.

УДК 519.6(076)
ВВК 22.193я73

ISBN 978-985-577-308-6

Оглавление

Предисловие.. 4
Тема 1. Решение специальных систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки.. 5
Тема 2. Явная разностная схема решения третьей краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.. 10
Тема 3. Неявная разностная схема решения одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами 13
Тема 4. Метод продольно-поперечной прогонки для решения уравнения теплопроводности в прямоугольнике..................................... 18
Тема 5. Симметричная разностная схема для решения уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами 23
Тема 6. Решение двумерного уравнения гиперболического типа в прямоугольнике локально-одномерным методом 27
Тема 7.Решение нелинейных задач математической физики 32
Тема 8. Численные решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области сложной формы 37
Литература 42
Приложение А. Варианты заданий 43

Предисловие

Настоящее практическое руководство предназначено для студентов четвертого курса математического факультета специальности «Прикладная математика» (научно-педагогическая деятельность).

Оно должно облегчить изучение теоретического материала, а также способствовать приобретению практических навыков в области вычислительной математики и дальнейшему совершенствованию программирования на алгоритмических языках Паскаль и Си.

В лабораторных работах 1–6 подробно рассматриваются разностные схемы решения линейных одномерных и многомерных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов с переменными коэффициентами. Лабораторная работа 7 посвящена методам реализации нелинейных разностных схем для решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. Лабораторная работа 8 ориентирована на численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области сложной формы.

Каждая лабораторная работа включает в себя постановку дифференциальной задачи, разностную аппроксимацию, условие устойчивости вычислительного алгоритма, описание вычислительной схемы решения задачи. С целью закрепления изучаемого теоретического материала в конце лабораторных работ приводятся вопросы для самостоятельной подготовки.

В приложении даны задачи для выполнения индивидуальных лабораторных работ.

Все лабораторные работы выполняются студентами на ЭВМ. В отчет по каждой работе должны быть включены условие задания, разностная схема решения задачи, распечатки текста программы, исходных данных и результатов.

Тема 1. Решение специальных систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки

Рассмотрим следующую систему разностных уравнений

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, ..., N-1 \\ y_0 - x_1 y_1 = \mu_1, \; -x_2 y_{N-1} + y_N = \mu_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

причем $A_i \neq 0, B_i \neq 0, \quad i = 1, 2, ..., N-1$.

Матрица этой системы уравнений является трехдиагональной. Она имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -x_1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & & & & & & & & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & A_i & -C_i & B_i & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -x_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Системы вида (1.1) возникают при трехточечной аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными и переменными коэффициентами, а также при реализации разностных схем для уравнений в частных производных.

Для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей (1.2) можно использовать метод исключения Гаусса, называемый методом прогонки.

Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, ..., N-1, \tag{1.3}$$

где $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ – неизвестные пока коэффициенты.

Исключая с помощью соотношения (1.3) неизвестное y_{i-1} из уравнения

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i,$$

получим

$$\left(A_i \alpha_i - C_i\right) y_i + B_i y_{i+1} = -F_i - A_i \beta_i.$$

Если предположить, что $A_i \alpha_i - C_i \neq 0$, то

$$y_i = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i} y_{i+1} + \frac{F_i + A_i\beta_i}{C_i - A_i\alpha_i}. \quad (1.4)$$

Сравнивая равенство (1.3) и (1.4), находим

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1, ..., N-1; \quad (1.5)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i\beta_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1, ..., N-1. \quad (1.6)$$

Соотношения (1.5) и (1.6) представляют собой нелинейные разностные уравнения первого порядка. Для их решения необходимо задать начальные значения α_1 и β_1. Эти значения находятся из первого уравнения $y_0 = x_1 y_1 + \mu_1$ системы (1.1) и формулы (1.3) при $i = 0$ $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$. Таким образом, получаем

$$\alpha_1 = x_{1,} \quad \beta_1 = \mu_1. \quad (1.7)$$

Нахождение коэффициентов $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ по формулам (1.5)–(1.7) называется *прямой* прогонкой.

Если коэффициенты α_1 и β_1 известны и известно значение y_N, то, двигаясь от $i+1$ к i, по формуле (1.3) определяются y_i. Значение y_N определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} y_N = x_2 y_{N-1} + \mu_2 \\ y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N. \end{cases}$$

откуда, если $1 - \alpha_N x_2 \neq 0$,

$$y_N = \frac{\mu_2 + x_2\beta_N}{1 - \alpha_N x_2}. \quad (1.8)$$

Нахождение y_i по формулам (1.3), (1.8) называется *обратной* прогонкой.

Метод прогонки можно применять, если знаменатели выражений (1.5), (1.6) и (1.8) не обращаются в нуль. Для выполнения этих условий достаточно потребовать, чтобы коэффициенты системы (1.1) удовлетворяли соотношениям

$$A_i \neq 0, B_i \neq 0, \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (1.9)$$

$$|x_\alpha| \leq 1, \alpha = 1, 2 \qquad |x_1| + |x_2| < 2 \quad (1.10)$$

Условия (1.9), (1.10) гарантируют существование и единственность решения системы (1.1) и возможность нахождения этого решения методом прогонки. Кроме того, эти условия обеспечивают устойчивость счета по рекуррентным формулам обратной прогонки. Это означает, что погрешность, внесенная на каком-либо шаге вычислений, не будет возрастать при переходе к следующим шагам.

Рассмотренный метод решения системы (1.1), при котором определение y_i производится последовательно справа налево, называется методом *правой* прогонки. Аналогично формулам правой прогонки получаются формулы *левой* прогонки:

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1.11}$$

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1 \tag{1.12}$$

$$\xi_N = x_2,$$

$$\eta_i = \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1 \tag{1.13}$$

$$\eta_N = \mu_2; \quad y_0 = \frac{\mu_1 + x_1 \eta_1}{1 - \xi_1 x_1}. \tag{1.14}$$

В алгоритмах правой и левой прогонки неизвестное y_i выражается только через соседнее неизвестное, поэтому методы правой и левой прогонки называют еще методами *монотонной* прогонки. Монотонный порядок нахождения неизвестных y_i на обратном ходе метода связан с естественным порядком исключения неизвестных из уравнения на прямом ходе.

Таким образом, метод монотонной прогонки является методом Гаусса без выбора главного элемента применительно к системам линейных уравнений (1.1) с трехдиагональной матрицей. Метод же Гаусса без выбора главного элемента корректен для случая систем уравнений с матрицами, имеющими диагональное преобладание. Если диагональное преобладание отсутствует, то гарантировать отличие от нуля величин $C_i - A_i \alpha_i$ и $1 - \alpha_N x_2$ нельзя. В данном случае метод монотонной прогонки может породить деление на нуль или сильную чувствительность к ошибкам округления. Чтобы этого не произошло, необходимо использовать метод *немонотонной* прогонки, который базируется на алгоритме Гаусса с *выбором главного элемента* по строке. В таком случае монотонный порядок определения неизвестных y_i нарушен.

Это требует хранения на каждом i-м шаге информации о том, какое неизвестное вычисляется через какое при помощи прогоночных коэффициентов α_{i+1} и β_{i+1}. Для хранения такой информации необходимы два целочисленных массива индексов S и R:

$$S = \{s_i, 1 \le i \le N\}, \quad R = \{r_i, 1 \le i \le N\},$$

так, что неизвестные находятся по формулам:

$$y_m = \alpha_{i+1} y_n + \beta_{i+1}, \quad m = s_{i+1}, \; n = r_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \ldots, 0.$$

Массивы S и R строятся на прямом ходе метода.

Алгоритм метода *немонотонной* прогонки можно описать следующим образом:

1) формально полагается

$$r_0 = 0, \; C_0 = 1, \; B_0 = x_1, \; F_0 = \mu_1, \; A_N = x_2, \; C_N = 1, \; F_N = \mu_2$$

и задаются начальные значения для A^*, B^*, C^*, F^*:

$$C^* = C_0, \quad A^* = A_1, \; F^* = F_0, \; B^* = F_1;$$

2) последовательно для каждого $i = 0, 1, \ldots, N-1$ выполняются действия, описанные в пунктах а) или б):

а) если $|C^*| \ge |B_i|$, то $\alpha_{i+1} = B_i / C^*$, $\beta_{i+1} = F^* / C^*$,

$$C^* = C_{i+1} - A^* \alpha_{i+1}, \; F^* = B^* + A^* \beta_{i+1}, \; s_{i+1} = r_i, \; r_{i+1} = i+1,$$
$$A^* = A_{i+2}, \; B^* = F_{i+2};$$

б) если $|C^*| < |B_i|$, то $\alpha_{i+1} = C^* / B_i$, $\beta_{i+1} = -F^* / B_i$,

$$C^* = C_{i+1} \alpha_{i+1} - A^*, \; F^* = B^* - C_{i+1} \beta_{i+1}, \; s_{i+1} = i+1, \; r_{i+1} = r_i,$$
$$A^* = A_{i+2} \alpha_{i+1}, \; B^* = F_{i+2} + A_{i+2} \beta_{i+1}.$$

Для $i = N-1$ переопределять A^* и B^* в пунктах а) и б) не нужно;

3) вычисляется сначала неизвестное y_n, где $n = r_N$ по формуле $y_n = F^* / C^*$, а затем последовательно для $i = N-1, N-2, \ldots, 0$ вычисляются остальные неизвестные

$$y_m = \alpha_{i+1} y_n + \beta_{i+1}, \text{ где } m = s_{i+1}, n = r_{i+1}.$$

Описанный алгоритм переходит в обычный алгоритм правой прогонки, если выполнены условия (1.9) и (1.10).

Рассмотрим матричную систему уравнений

$$\begin{cases} -A_j Y_{j-1} + C_j Y_j - B_j Y_{j+1} = F_j,\ j = \overline{1, N-1} \\ C_0 Y_0 - B_0 Y_1 = F_0,\ -A_N Y_{N-1} + C_N Y_N = F_N \end{cases}, \tag{1.15}$$

где Y_j и F_j – векторы размерности M_j,

C_j – квадратной матрицы размерности $M_j \times M_j$,

A_j – прямоугольная матрица размерности $M_j \times M_{j-1}$,

B_j – прямоугольная матрица размерности $M_j \times M_{j+1}$.

Решение системы (1.15) ищется в виде

$$Y_j = \alpha_{j+1} Y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1, 0, \tag{1.16}$$

где α_j – прямоугольная матрица размерности $M_{j-1} \times M_j$,

β_j – вектор размерности M_{j-1}.

Из (1.15) и (1.16) по аналогии с методом правой прогонки получаем рекуррентные формулы для определения α_j, β_j:

$$\alpha_{j+1} = \left(C_j - A_j \alpha_j\right)^{-1} B_j,\ j = \overline{1, N-1}, \quad \alpha_1 = C_0^{-1} B_0,$$

$$\beta_{j+1} = \left(C_j - A_j \alpha_j\right)^{-1} \left(F_j + A_j \beta_j\right),\ j = \overline{1, N}, \quad \beta_1 = C_0^{-1} F_0,$$

$$Y_N = \left(C_N - A_N \alpha_N\right)^{-1} \left(A_N \beta_N + F_N\right) = \beta_{N+1},$$

$$Y_j = \alpha_{j+1} Y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1, 0.$$

Метод матричной прогонки устойчив по отношению к ошибкам округления, если выполнены условия

$$\left\| C_0^{-1} B_0 \right\| \le 1, \quad \left\| C_N^{-1} A_N \right\| \le 1, \quad \left\| C_j^{-1} A_j \right\| + \left\| C_j^{-1} B_j \right\| \le 1,\ 1 \le j \le N-1,$$

причем хотя бы для одного из этих условий должно выполняться строгое неравенство.

Тема 2. Явная разностная схема решения третьей краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Пусть в прямоугольной области $\overline{D} = \{a \le x \le b, 0 < t \le T\}$ требуется найти непрерывное решение $U = U(x,t)$ уравнения

$$c(x,t)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - g(x,t)U + f(x,t), \tag{2.1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,0) = \varphi(x),\ a \le x \le b \tag{2.2}$$

и краевым условиям третьего рода ($0 \le t \le T$):

$$\alpha_1(t)U - \beta_1(t)\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi_1(t) \quad \text{при } x = a, \tag{2.3}$$

$$\alpha_2(t)U - \beta_2(t)\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi_2(t) \quad \text{при } x = b.$$

Все коэффициенты задачи (2.1)–(2.3) предполагаются непрерывными и ограниченными

$$c(x,t) \ge c_1 > 0,\ c_2 \ge K(x,t) \ge c_3 > 0,\ g(x,t) \ge 0,$$

$$|\alpha_k(t)| + |\beta_k(t)| \ne 0,\ k = 1,2.$$

Введем в области $\overline{D}$ равномерную по h и τ разностную сетку

$$\overline{\omega}_{h,\tau} = \left\{(x_i,t_j); x_i = a + ih, i = \overline{0,N}, h = \frac{b-a}{N},\ t_j = j\tau,\ j = \overline{0,M}, \tau = \frac{T}{M}\right\}.$$

Обозначим через $y_i^j = y(x_i,t_j)$ значение в узле (x_i,t_j) сеточной функции y, определенной на $\overline{\omega}_{h,\tau}$. Во внутренних узлах (x_i,t_j), $i = \overline{1,N-1}$, $j = \overline{0,M-1}$ сетки $\overline{\omega}_{h,\tau}$ уравнению (2.1) поставим в соответствие следующую систему разностных уравнений

$$c_i^j y_{t,i}^j = (K_{i+1/2}^j y_{x,i}^j)_{\bar{x},i} - g_i^j y_i^j + f_i^j, \quad i = \overline{1,N-1},\ j = \overline{0,M-1}, \tag{2.4}$$

где

$$K_{i\pm1/2}^j = K\left(x_i \pm \frac{h}{2}, t_j\right),\ g_i^j = g(x_i,t_j),$$

$$f_i^j = f(x_i, t_j),\ y_{t,i}^j = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau},\ y_{x,i}^j = \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h},\ y_{\bar{x},i}^j = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}.$$

В безиндексной форме система (2.4) запишется следующим образом:

$$cy_t = (K_{+0,5}y_x)_{\bar{x}} - gy + f, \quad K_{+0,5} = K_{i+1/2}^j.$$

Начальное условие (2.2) аппроксимируем точно:

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = \varphi(x_i, 0),\ i = \overline{0, N}\ . \tag{2.5}$$

Краевым условиям (2.3) поставим в соответствие разностные краевые условия повышенного порядка аппроксимации:

$$\alpha_1^{j+1} \cdot y_0^{j+1} - \frac{\beta_1^{j+1}}{K_0^{j+1}}\left[K_{+0,5}y_x - \frac{h}{2}(cy_t + gy - f)\right]_0^{j+1} = \varphi_1^{j+1}, \tag{2.6}$$

$$\alpha_2^{j+1} \cdot y_N^{j+1} - \frac{\beta_2^{j+1}}{K_N^{j+1}}\left[K_{-0,5}y_{\bar{x}} + \frac{h}{2}(cy_t + gy - f)\right]_N^{j+1} = \varphi_2^{j+1}.$$

Разностная схема (2.4)–(2.6) на достаточно гладких решениях $U(t,x)$ аппроксимирует задачу (2.1)–(2.3) с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau)$, т. е. со 2-м порядком по h (по пространственной переменной) и первым по τ (по времени).

Множество узлов сетки $\bar{\omega}_{h,\tau}$, лежащих на прямой $t = t_j$, называется *слоем*. Разностная схема (2.4) содержит значения искомой функции y на двух соседних слоях и поэтому является двухслойной схемой. Она позволяет определить значения y_i^{j+1} в каждой внутренней точке слоя $t = t_{j+1}$(нового слоя) через значения y_i^j на слое $t = t_j$ (на старом слое) по следующей формуле ($i = \overline{1, N-1}$):

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{\tau}{c_i^j}\left(\frac{K_{i+1/2}^j + K_{i-1/2}^j}{h^2} + g_i^j\right)\right)y_i^j + \frac{\tau}{c_i^j}\left(\frac{K_{i+1/2}^j y_{i+1}^j + K_{i-1/2}^j y_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j\right) \tag{2.7}$$

Разностная схема (2.7) называется *явной*.

С помощью принципа максимума можно доказать, что разностная задача (2.4)–(2.6) будет устойчива при выполнении условия

$$\tau \le \min \frac{h^2 c_i^j}{(K_{+0,5} + K_{-0,5} + h^2 g)_i^j}\ ,\ i = \overline{1, N-1},\quad j = \overline{0, M-1}, \tag{2.8}$$

$$\text{или} \qquad \tau \le \frac{h^2 \min\limits_{D} c(x,t)}{\max\limits_{\overline{D}}(2K(x,t) + h^2 g(x,t))}. \tag{2.9}$$

Так как разностная схема (2.4)–(2.6) устойчива только при выполнении соотношений (2.8) или (2.9) на шаги τ и h, то она является условно устойчивой. Если при решении задачи (2.1)–(2.3) выбраны значения N или h из условия требуемой точности решения ε, то шаг τ предварительно должен быть определен из условий (2.8) или (2.9).

Вычислительный алгоритм решения задачи (2.4)–(2.6) можно описать следующим образом:

1) выбираются N и M (или шаги h и τ) из условия требуемой точности и условия устойчивости разностной схемы (2.8) или (2.9);

2) из начального условия (2.5) вычисляются значения на начальном слое по формуле $y_i^0 = \varphi(x_i)$, $i = \overline{0, N}$;

3) при каждом значении $j = \overline{0, M-1}$ по формуле (2.7) вычисляются значения сеточной функции y_i^{j+1} $(i = \overline{1, N-1})$ на верхнем временном слое через известные уже значения y_i^j $(i = \overline{0, N})$ на нижнем слое. Зная значения y_1^{j+1} и y_{N-1}^{j+1}, из граничных условий (2.6) определяются значения в точках $i = 0$ и $i = N$:

$$y_0^{j+1} = \frac{\varphi_1^{j+1} + \dfrac{\beta_1^{j+1}}{K_0^{j+1}}\left(K_{+0,5}^{j+1}\dfrac{y_1^{j+1}}{h} + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{c_0^{j+1}}{\tau} y_0^j + f_0^{j+1}\right)\right)}{\alpha_1^{j+1} + \dfrac{\beta_1^{j+1}}{K_0^{j+1}}\left(K_{+0,5}^{j+1}\dfrac{1}{h} + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{c_0^{j+1}}{\tau} + g_0^{j+1}\right)\right)}, \tag{2.10}$$

$$y_N^{j+1} = \frac{\varphi_2^{j+1} + \dfrac{\beta_2^{j+1}}{K_N^{j+1}}\left(K_{N-0,5}^{j+1}\dfrac{y_{N-1}^{j+1}}{h} + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{c_N^{j+1}}{\tau} y_N^j + f_N^{j+1}\right)\right)}{\alpha_2^{j+1} + \dfrac{\beta_2^{j+1}}{K_N^{j+1}}\left(K_{N-0,5}^{j+1}\dfrac{1}{h} + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{c_N^{j+1}}{\tau} + g_N^{j+1}\right)\right)}. \tag{2.11}$$

Данная вычислительная схема позволяет найти решения для первой краевой задачи $(\beta_k(t) = 0)$, второй краевой задачи $(\alpha_k(t) = 0)$ и смешанной краевой задачи, как в случае переменных, так и в случае постоянных коэффициентов.

При программировании данного вычислительного алгоритма в памяти ЭВМ резервируются два одномерных массива размерности

$N+1$. В массив $Y\emptyset$, согласно пункту 2, заносятся значения сеточной функции на нулевом слое. Затем, согласно пункту 3, заполняется массив Y. Причем, значения $Y(i)$, $(i=2,3,\ldots,N)$ вычисляются по формуле (2.7), а значения $Y(1)$ и $Y(N+1)$ по формулам (2.10) и (2.11) соответственно. После того как элементы массива Y вычислены, осуществляется перегонка из массива Y в массив $Y\emptyset$ и тем самым массив Y освобождается для вычисления решения задачи (2.1)–(2.3) на следующих слоях: $j=2,3,\ldots,M$.

Вопросы для самоконтроля

1. Показать, что разностная схема (2.4)–(2.6) аппроксимирует дифференциальную задачу (2.1)–(2.3) с порядком $O(\tau+h^2)$. Определить порядок аппроксимации разностных краевых условий (2.3).

2. Дать определение аппроксимации, устойчивости и сходимости разностной схемы.

3. Привести примеры аппроксимации простейших дифференциальных операторов.

Тема 3. Неявная разностная схема решения одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

В области $\bar{D}=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ требуется найти решение уравнения

$$c(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-g(x,t)U+f(x,t), \qquad (3.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1 \qquad (3.2)$$

и граничным условиям ($0\le t\le T$)

$$\alpha_1(t)U-\beta_1(t)\frac{\partial U}{\partial x}=\varphi_1(t) \qquad \text{при } x=0,$$

$$\alpha_2(t)U + \beta_2(t)\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi_2(t) \qquad \text{при } x = 1, \tag{3.3}$$

где $c(x,t)$, $K(x,t)$, $g(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\varphi_i(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < c_1 \le K(x,t) \le c_2,\ c(x,t) \ge c_3 > 0,\ g(x,t) \ge 0,$$

$$|\alpha_k(t)| + |\beta_k(t)| \ne 0 \text{ для } k = 1, 2.$$

Для построения разностной схемы необходимо, прежде всего, ввести сетку в области изменения независимых переменных и задать шаблон, то есть множество точек сетки, участвующих в аппроксимации дифференциального выражения. Введем сетку по переменной x:

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,..,N,\ hN = 1\}$$

и сетку по переменной t с шагом τ, которую обозначим

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0,1,..,M, \tau M = T\}.$$

Чтобы аппроксимировать уравнение (3.1) во внутренних точках (x_i,t_j) сетки $\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, выберем шаблон, изображенный на рисунке 3.1 и состоящий из шести узлов $(x_{i\pm1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), (x_{i\pm1}, t_j)$.

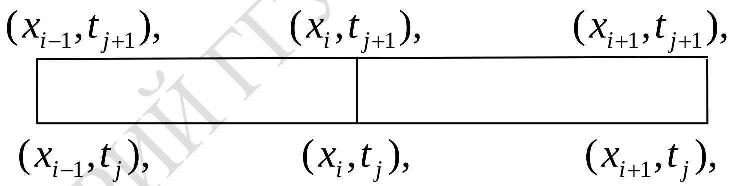


Рисунок 3.1 – Сетка

Дифференциальное выражение $LU = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ при каждом фиксированном t аппроксимируем в точке (x_i,t_j) разностным отношением

$$\Lambda(t)y_i = (a(x_i,t)y_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h}\left[a(x_{i+1},t)\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a(x_i,t)\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right], \tag{3.4}$$

где разностный коэффициент теплопроводности $a(x_i,t)$ должен удовлетворять условиям второго порядка аппроксимации:

$$a(x_{i+1},t) + a(x_i,t) = 2K(x_i,t) + o(h^2), \tag{3.5}$$

$$\frac{a(x_{i+1},t)-a(x_i,t)}{h}=K'(x_i,t)+o(h^2).$$

Наиболее употребительные следующие выражения для $a(x_i,t)$:

$$a(x_i,t)=0,5(K(x_i,t)+K(x_{i-1},t)),$$
$$a(x_i,t)=K(x_{i-\frac{1}{2}},t)=K\left(x_i-\frac{h}{2},t\right), \tag{3.6}$$
$$a(x_i,t)=\frac{2K(x_{i-1},t)K(x_i,t)}{K(x_{i-1},t)+K(x_i,t))}.$$

Производную $\frac{\partial U}{\partial t}$ заменим в точке (x_i,t_j) разностным отношением $y^j_{t,i}$, а функцию $f(x,t)$ аппроксимируем сеточной функцией φ^j_i, в качестве которой можно взять одно из следующих выражений:

$$f(x_i,y_j),\ \ \frac{1}{h}\int\limits_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} f(x_i,y_j)dx,\ \ \frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_j}^{t_j+1}\int\limits_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} f(x,t)dxdt.$$

Тогда, вводя произвольный вещественный параметр σ, получим однопараметрическое семейство разностных схем

$$c(x_i,t)\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\Lambda(t)(\sigma y_i^{j+1}+(1-\sigma)y_i^j)-g(x_i,t)\times$$
$$\times(\sigma y_i^{j+1}+(1-\sigma)y_i^j)+\varphi(x_i,t),\quad i=\overline{1,N-1}, \tag{3.7}$$

которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (3.3) в точке (x_i,t). Здесь в качестве t можно взять любое значение $t\in[t_j,t_{j+1}]$.

Если $t=t_j+0,5\tau$ и $\sigma=0,5$, то разностное уравнение (3.7) аппроксимирует (3.1) со вторым порядком аппроксимации по τ и h. При остальных значениях σ и t выполняется первый порядок аппроксимации по τ и второй – по t. Для достижения второго порядка аппроксимации по h необходимо чтобы $\varphi(x_i,t)=f(x_i,t)+\mathrm{o}(h^2)+\mathrm{o}(\tau)$.

Разностную схему (3.7) называют иногда *схемой с весами*.

Краевые условия (3.3) заменим разностными краевыми условиями повышенного порядка аппроксимации:

$$\left[\alpha_1 y-\beta_1\frac{K_{+0,5}}{K}y_x\right]_0^{j+1}=\varphi_1^{j+1}-\frac{\beta_1^{j+1}h}{2K_0^{j+1}}[cy_{\bar t}+gy-f]_0^{j+1},$$
$$\left[\alpha_2 y+\beta_2\frac{K_{-0,5}}{K}y_{\bar x}\right]_N^{j+1}=\varphi_2^{j+1}-\frac{\beta_2^{j+1}h}{2K_N^{j+1}}[cy_{\bar t}+gy-f]_N^{j+1}. \tag{3.8}$$

Начальное условие (3.2) аппроксимируется точно:

$$y_i^0=y(x_i,0)=\varphi(x_i),\quad i=\overline{0,N}. \tag{3.9}$$

Разностная схема (3.7)–(3.9) абсолютно устойчива при $\sigma\ge 0,5$. При $\sigma=1$получаем чисто *неявную* разностную схему, которую называют иногда *схемой с опережением*. Эта схема использует трехточечный шаблон $(x_{i\pm1},t_{j+1}),(x_i,t_{j+1}),(x_i,t_j)$ и имеет следующий вид:

$$c(x_i,t_{j+1})\frac{y_i^{j+i}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[K(x_{i+\frac{1}{2}},t_{j+1})\frac{y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}}{h}-\right.$$
$$\left.-K(x_{i-\frac{1}{2}},t_{j+1})\frac{y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}}{h}\right]-g(x_i,t_{j+1})y_i^{j+1}+\varphi(x_i,t_{j+1}), \tag{3.10}$$

$$\left[\alpha_1 y-\beta_1\frac{K_{+0,5}}{K}y_x\right]_0^{j+1}=\varphi_1^{j+1}-\frac{\beta_1^{j+1}h}{2K_0^{j+1}}[cy_{\bar t}+gy-f]_0^{j+1},$$
$$\left[\alpha_2 y+\beta_2\frac{K_{-0,5}}{K}y_{\bar x}\right]_N^{j+1}=\varphi_2^{j+1}-\frac{\beta_2^{j+1}h}{2K_N^{j+1}}[cy_{\bar t}+gy-f]_N^{j+1}, \tag{3.11}$$

$$y_i^0=\varphi(x_i),\quad i=\overline{0,N} \tag{3.12}$$

Разностная схема (3.10)–(3.12) имеет первый порядок аппроксимации по τ и по второй – по *h*.

Для нахождения решения y_i^{j+1} верхнем на временном слое по известным y_i^j. В отличие от явной схемы требуется решить систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1}^{j+1}-C_i y_i^{j+1}+B_i y_{i+1}^{j+1}=-F_i,\quad i=\overline{1,N-1}\\ y_0^{j+1}=\psi_1 y_1^{j+1}-\mu_1,\\ y_N^{j+1}=\psi_2 y_{N-1}^{j+1}+\mu_2,\end{cases} \tag{3.13}$$

где

$$A_i=\frac{K_{i-0,5}^{j+1}}{h^2},\quad B_i=\frac{K_{i+0,5}^{j+1}}{h^2},\quad C_i=\frac{K_{i+0,5}^{j+1}-K_{i-0,5}^{j+1}}{h^2}+g_i^{j+1}+\frac{c_i^{j+1}}{\tau},\quad F_i=\varphi_i^{j+1}+\frac{c_i^{j+1}y_i^j}{\tau},$$

$$\psi_1=\frac{2\tau\beta_1^{j+1}K_{+0,5}^{j+1}}{2\tau\beta_1^{j+1}K_{+0,5}^{j+1}+2h\tau K_0^{j+1}\alpha_1^{j+1}+\beta_1^{j+1}h^2(c_0^{j+1}+\tau g_0^{j+1})},$$

$$\mu_1=\frac{2h\tau K_0^{j+1}\varphi_1^{j+1}+\beta_1^{j+1}h^2(c_0^{j+1}y_0^{j+1}+\tau f_0^{j+1})}{2\tau\beta_1^{j+1}K_{+0,5}^{j+1}+2h\tau K_0^{j+1}\alpha_1^{j+1}+\beta_1^{j+1}h^2(c_0^{j+1}+\tau g_0^{j+1})},$$

$$\psi_2=\frac{2\tau\beta_2^{j+1}K_{N-0,5}^{j+1}}{2\tau\beta_2^{j+1}K_{N-0,5}^{j+1}+2h\tau K_N^{j+1}\alpha_2^{j+1}+\beta_2^{j+1}h^2(c_N^{j+1}+\tau g_N^{j+1})},$$

$$\mu_2=\frac{2h\tau K_N^{j+1}\varphi_2^{j+1}+\beta_2^{j+1}h^2(c_N^{j+1}y_N^{j-1}+\tau f_N^{j+1})}{2\tau\beta_2^{j+1}K_{N-0,5}^{j+1}+2h\tau K_N^{j+1}\alpha_2^{j+1}+\beta_2^{j+1}h^2(c_N^{j+1}+\tau g_N^{j+1})}.$$

Систему конечно-разностных уравнений (3.13) можно решать методом *правой* прогонки, так как коэффициентные условия устойчивости прогонки выполнены.

Вычислительная схема решения дифференциальной задачи (3.1)–(3.7) чисто неявным разностным методом состоит в следующем:

1) из условия требуемого уровня точности разностного решения выбираются значения *N* и *M*;

2) по формуле $y_i^0=\varphi(x_i)$, $i=\overline{0,N}$ вычисляются значения сеточной функции y_i на нулевом слое;

3) при каждом значении $j=\overline{0,M-1}$ строится система конечно-разностных уравнений (3.13). Для этого вычисляются все коэффициенты A_i,B_i,C_i,F_i $(i=1,..,N-1,k=1,2)$, а также ψ_k и μ_k;

4) для решения построенной системы уравнений методом правой прогонки сначала вычисляются прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_{i+1}=\frac{B_i}{C_i-\alpha_iA_i},\ \alpha_1=\psi_1,\ \beta_{i+1}=\frac{A_i\beta_i+F_i}{C_i-\alpha_iA_i},\ \beta_1=\mu_1,\ i=1,2,..,N-1;$$

5) после определения пригоночных коэффициентов находится значение y_N^{j+1} на правой границе по формуле:

$$y_N^{j+1}=\frac{\mu_2+\psi_2\beta_N}{1-\alpha_N\psi_2};$$

6) используя значение y_N^{j+1}, обратной прогонкой вычисляются значения сеточной функции y_i^{j+1} в узлах сетки с номерами $N-1,N-2,..,1,0$ по формуле

$$y_i^{j+1}=\alpha_{i+1}y_{i+1}^{j+1}\beta_{i+1}.$$

При программировании данного вычислительного алгоритма, как и в случае явной разностной схемы, в памяти ЭВМ резервируются два одномерных массива *Y0* и *Y* размерности $N+1$. При переходе с одного временного слоя на другой осуществляется перегонка значений из массива *Y* в массив *Y0* и тем самым массив *Y* освобождается для вычисления решения задачи (3.1)–(3.3) на верхнем временном слое.

Вопросы для самоконтроля

1. Показать, что при выполнении условий (3.5) разностный оператор $\Lambda(t)y_i = (a(x_i,t)y_{\bar{x}})_{x,i}$ аппроксимирует дифференциальный оператор $Lu = \dfrac{\partial}{\partial x}(K(x,t)\dfrac{\partial U}{\partial x})$ с порядком $O(h^2)$.

2. Доказать, что выражение для разностного коэффициента теплопроводности $a(x_i,t) = \dfrac{2K(x_{i-1},t)K(x_i,t)}{K(x_{i-1},t)+K(x_i,t)}$ удовлетворяет условиям второго порядка аппроксимации (3.5).

3. Построить для задачи (3.1)–(3.3) симметричную разностную схему $\sigma = \dfrac{1}{2}$ и определить порядок аппроксимации. Предложить метод реализации симметричной схемы.

4. Показать, что для системы конечно-разностных уравнений (3.13) выполняются коэффициентные условия устойчивости метода прогонки.

Тема 4. Метод продольно-поперечной прогонки для решения уравнения теплопроводности в прямоугольнике

В области $\overline{D} = \overline{\Omega}\times[0 \le t \le T]$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, Γ граница области Ω,

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2\}$$

рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f(x,t) \qquad (4.I)$$

с граничными и начальными условиями:

$$u(x,t) = \mu(x,t),\ \ x \in \Gamma,\ \ 0 < t \le T, \qquad (4.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ \ x \in \overline{\Omega} \qquad (4.3)$$

При этом предполагается, что существует единственное решение $u(x,t)$ поставленной задачи (4.1)–(4.3) непрерывное в замкнутой области

$\overline{D}$ и удовлетворяющее условию $u(x,t) \in C_4^2(\overline{D})$, где $C_\beta^\alpha(\overline{D})$ – класс функций, имеющих β непрерывных производных по x_1, x_2 и α – по t в области $\overline{D}$.

Относительно входных данных задачи (4.1)–(4.3) предполагается выполнение следующих условий гладкости и параболичности на решении

$$K_\alpha(x,t) \in C_3^1(\overline{D}),\ K_\alpha(x,t) \geq C_\alpha > 0,\ \ \alpha = 1,2,\ \ (x,t) \in \overline{D}.$$

Задача (4.I)–(4.3) описывает нестационарный процесс теплопроводности в неоднородной среде.

Среди общих вопросов теории разностных схем одним из основных является вопрос о построении в исследовании разностных схем для многомерных задач математической физики. Здесь приходится сталкиваться с проблемой уменьшения количества операций, затрачиваемых на получение численного решения. Требования устойчивости разностных схем предполагают использование схем неявного типа. Однако для получения решения по неявным схемам необходимо обращать матрицу больших размеров, что требует огромного числа вычислений. Наоборот, при использовании явных схем затрачивается число арифметических операций при переходе со слоя на слой, пропорциональное числу узлов многомерной сетки, но устойчивость явных схем имеет место при достаточно малом шаге τ по времени. Противоречие между устойчивостью и объемом вычислений явных и неявных схем позволяют избежать экономичные разностные схемы.

Абсолютно устойчивые разностные схемы, требующие для перехода со слоя на слой затрат числа арифметических действий, пропорционального числу узлов сетки ω_h, называются *экономичными*.

Построим для решения задачи (4.1)–(4.3) *экономичную разностную схему*. Для этого введем в области $\overline{D}$ следующую пространственно-временную сетку:

$$\overline{\omega_{h,\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau},$$
$$\overline{\omega_h} = \left\{ \left(i_1 h_1, i_2 h_2\right),\ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha},\ N_\alpha = l_\alpha / h_\alpha \right\},$$
$$\overline{\omega_\tau} = \left\{ t_j = \tau_j,\ j = \overline{0, j^*},\ j^* = T / \tau \right\}$$

и аппроксимируем дифференциальную задачу (4.1)–(4.3) следующей разностной схемой:

$$\frac{y_{i_1,i_2}^{j+1/2} - y_{i_1,i_2}^{j}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y_{i_1,i_2}^{j+1/2} + \Lambda_2 y_{i_1,i_2}^{j} + \varphi_{i_1,i_2}^{j}. \qquad (4.4)$$

$$\frac{y_{i_1,i_2}^{j+1}-y_{i_1,i_2}^{j+1/2}}{0,5\tau}=\Lambda_1 y_{i_1,i_2}^{j+1/2}+\Lambda_2 y_{i_1,i_2}^{j+1}+\varphi_{i_1,i_2}^{j}. \qquad (4.5)$$

$$1\le i_1\le N_1-1,\ \ 1\le i_2\le N_2-1, \qquad (4.6)$$

$$y_{i_1,i_2}^{0}=u_0(i_1h_1,i_2,h_2),\ \ 0\le i_\alpha\le N_\alpha$$

$$y_{i_1,0}^{j+1}=\mu_{i_1,0}^{j+1},\ \ y_{i_1,N_2}^{j+1}=\mu_{i_1,N_2}^{j+1},\quad 1\le i_1\le N_1-1, \qquad (4.7)$$

$$y_{0,i_2}^{j+1/2}=\bar{\mu}_{0,i_2},\ \ y_{N_1,i_2}^{j+1/2}=\bar{\mu}_{N_1,i_2},\quad 1\le i_2\le N_2-1, \qquad (4.8)$$

где

$$y_{i_1,i_2}^{j}=y(i_1h_1,i_2h_2,t_j),\quad y_{i_1,i_2}^{j+1/2}=y(i_1h_1,i_2h_2,t_j+\tau/2),$$

$$\Lambda_1 y_{i_1,i_2}^{j}=\frac{1}{h_1}\left[K_{1,i_1+0,5,i_2}^{j}\frac{y_{i_1+1,i_2}^{j}-y_{i_1,i_2}^{j}}{h_1}-K_{1,i_1-0,5,i_2}^{j}\frac{y_{i_1,i_2}^{j}-y_{i_1-1,i_2}^{j}}{h_1}\right],$$

$$\Lambda_2 y_{i_1,i_2}^{j}=\frac{1}{h_2}\left[K_{2,i_1,i_2+0,5}^{j}\frac{y_{i_1,i_2+1}^{j}-y_{i_1,i_2}^{j}}{h_2}-K_{2,i_1,i_2-0,5}^{j}\frac{y_{i_1,i_2}^{j}-y_{i_1,i_2-1}^{j}}{h_2}\right],$$

$$K_{1,i_1\pm0,5,i_2}^{j}=K_1((i_1\pm0,5)h_1,i_2h_2,t_j),$$

$$K_{2,i_1,i_2\pm0,5}^{j}=K_2(i_1h_1,(i_2\pm0,5)h_2,t_j),$$

$$\bar{\mu}=\frac{\mu^j+\mu^{j+1}}{2}-\frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu^{j+1}-\mu^j),\ \ \varphi_{i_1,i_2}^{j}=f(i_1h_1,i_2h_2,t_j).$$

Разностная схема (4.4)–(4.8) называется *продольно-поперечной* разностной схемой или схемой Писмена Ричфорда. В этой схеме переход от слоя j к слою $j+1$ осуществляется в два этапа с шагами $0,5\tau$. На первом этапе определяются промежуточные значения $y_{i_1,i_2}^{j+1/2}$ из системы уравнений (4.4), а на втором этапе, используя найденные значения $y_{i_1,i_2}^{j+1/2}$, находят y_{i_1,i_2}^{j+1} из системы уравнений (4.5).

Разностная схема (3.4) неявна по направлению x_1 и явна по x_2, а схема (4.5) явна по x_1 и неявна по x_2. Поэтому системы уравнений (4.4) и (4.5) с учетом граничных условий (4.7) и (4.8) можно решать последовательным применением одномерных прогонок, сначала по направлению x_1, а затем по направлению x_2. Этим обстоятельством объясняется название метода продольно поперечной прогонки.

Схема (4.4)–(4.8) имеет на решении $u(x,t)$ второй порядок аппроксимации

$$\psi_1^j=\psi_2^j=0(\tau^2+|h|^2),\ \ |h|^2=h_1^2+h_2^2,$$

где

$$\psi_1^j = \Lambda_1 u^{j+1/2} + \Lambda_2 u^j + \varphi^j - \frac{u^{j+1/2} - u^j}{0{,}5\tau},$$

$$\psi_2^j = \Lambda_1 u^{j+1/2} + \Lambda_2 u^{j+1} + \varphi^j - \frac{u^{j+1} - u^{j+1/2}}{0{,}5\tau}.$$

Относительно устойчивости и сходимости разностной схемы (4.4)–(4.8) имеет место следующая теорема:

Теорема. Если выполнены условия, обеспечивающие второй порядок аппроксимации на решении $u = u(x,t)$ задачи (4.1)–(4.3), то разностная схема (4.4)–(4.8) абсолютно устойчива и сходится со скоростью $0(\tau^2 + |h|^2)$.

Перепишем разностную схему (4.4), (4.7) в виде

$$A_{i_1} y_{i_1-1,i_2}^{j+1/2} - C_{i_1} y_{i_1,i_2}^{j+1/2} + B_{i_1} y_{i_1+1,i_2}^{j+1/2} = -F_{i_1} \quad 1 \le i_1 \le N_1 - 1,\ 1 \le i_2 \le N_2 - 1, \tag{4.9}$$

$$y_{0,i_2}^{j+1/2} = \overline{\mu}_{0,i_2},\ \ y_{N_1,i_2}^{j+1/2} = \overline{\mu}_{N_1,i_2}, \quad 1 \le i_2 \le N_2 - 1,$$

где $A_{i_1} = K_{i_1-0,5,i_2}^j / h_1^2,\ \ B_{i_1} = K_{i_1+0,5,i_2}^j / h_1^2,$

$$C_{i_1} = A_{i_1} + B_{i_1} + \frac{2}{\tau},\quad F_{i_1} = \varphi_{i_1,i_2}^j + 2y_{i_1,i_2}^j / \tau.$$

Система разностных уравнений (4.9) решается при каждом фиксированном $i_2 = 1,\ 2,\ldots, N_2 - 1$ методом прогонки по переменной i_1. Так как при каждом i_2 прогонка по направлению x_1 выполняется за $0(N_1)$ арифметических действий, то нахождение всех $y_{i_1,i_2}^{j+1/2}$ требует $0(N_1 \cdot N_2)$ арифметических действий.

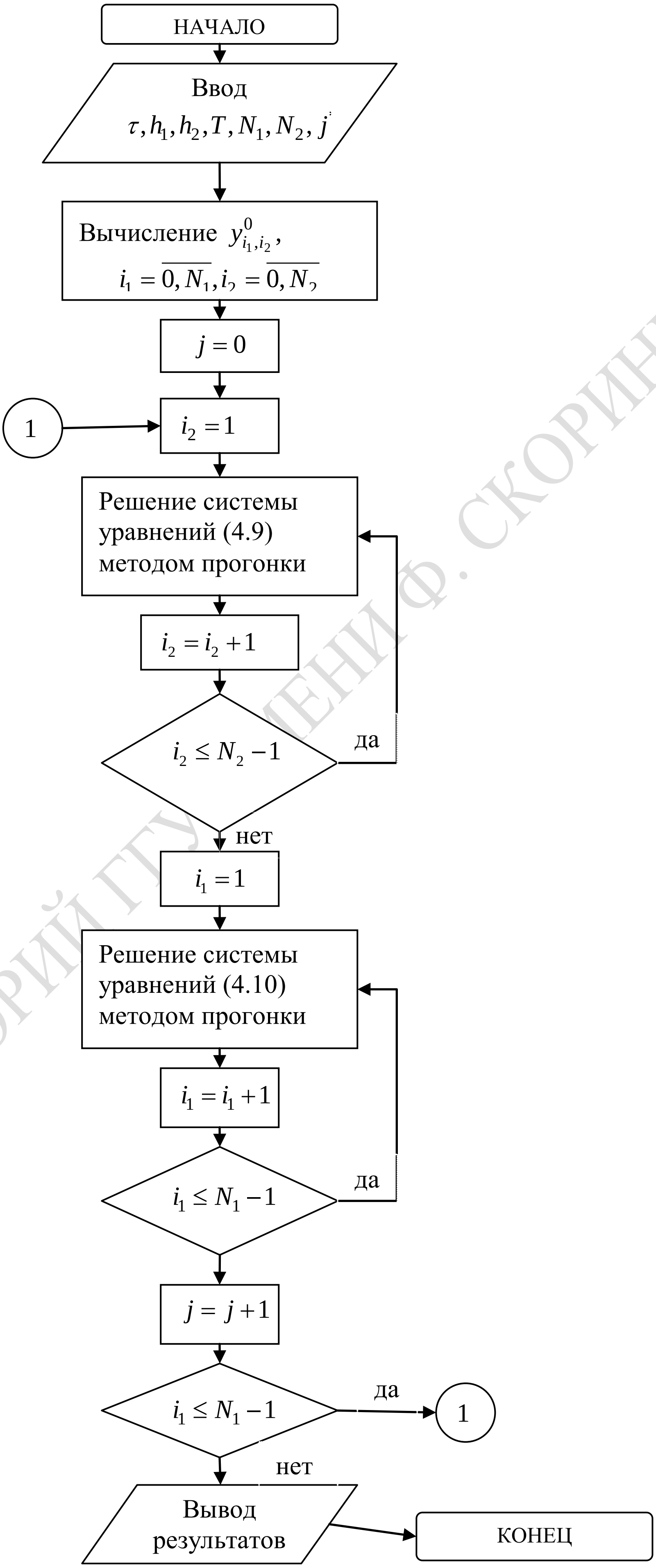
После того как все значения $y_{i_1,i_2}^{j+1/2}$ определены, решается система уравнений (4.5), (4.8). Переписывая ее подробнее, получим

$$\begin{cases} A_{i_2} y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{i_2} y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{i_2} y_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -F_{i_2},\quad 1 \le i_2 \le N_2 - 1,\ 1 \le i_1 \le N_1 - 1, \\ y_{i_1,0}^{j+1} = \mu_{i_1,0}^{j+1},\ \ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \mu_{i_1,N_2}^{j+1}, \quad 1 \le i_1 \le N_1 - 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

где $A_{i_2} = K_{i_1,i_2-0,5}^j / h_2^2,\ \ B_{i_2} = K_{i_1,i_2+0,5}^j / h_2^2,$

$$C_{i_2} = A_{i_2} + B_{i_2} + \frac{2}{\tau},\quad F_{i_2} = \varphi_{i_1,i_2}^j + 2y_{i_1,i_2}^{j+1/2} / \tau.$$

При каждом фиксированном $i_1 = 1, 2\ldots, N_1 - 1$ система уравнений (4.10) решается с помощью метода прогонки по переменной i_2. Для нахождения всех y_{i_1,i_2}^{j+1} из системы (4.10) необходимо затратить $0(N_1 \cdot N_2)$ арифметических действий.


НАЧАЛО
Ввод
$\tau, h_1, h_2, T, N_1, N_2, j$
Вычисление $y^0_{i_1,i_2}$,
$i_1 = \overline{0, N_1}, i_2 = \overline{0, N_2}$
$j = 0$
1
$i_2 = 1$
Решение системы уравнений (4.9) методом прогонки
$i_2 = i_2 + 1$
$i_2 \le N_2 - 1$
да
нет
$i_1 = 1$
Решение системы уравнений (4.10) методом прогонки
$i_1 = i_1 + 1$
$i_1 \le N_1 - 1$
да
$j = j + 1$
$i_1 \le N_1 - 1$
да
1
нет
Вывод результатов
КОНЕЦ

Метод продольно-поперечной прогонки требует для нахождения y_{i_1,i_2}^{j+1} по известным значениям y_{i_1,i_2}^{j} затрат числа арифметических действий, пропорционального числу узлов сетки ω_h. Так как продольно-поперечная схема абсолютно устойчива, то она является и экономичной.

Вычислительная схема решения задачи (4.1)–(4.3) методом продольно-поперечной прогонки может быть описана блок-схемой, приведенной выше. При программировании данного вычислительного алгоритма с целью экономии оперативной памяти ЭВМ необходимо резервировать только два двумерных массива размерности N и при необходимости осуществлять перегонку значений из одного массива в другой.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое экономичные разностные схемы?

2. Показать, что разностная схема (4.4)–(4.8) аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком $0(\tau^2 + |h|^2)$.

3. Построить для задачи (4.1)–(4.3) двумерную разностную схему с опережением и определить порядок аппроксимации этой схемы.

4. Будут ли выполнены условия устойчивости метода прогонки для систем разностных уравнений (4.9) и (4.10)?

5. Показать, что при каждом фиксированном i_2 система уравнений (4.9) решается методом прогонки за $0(N_1)$ арифметических действий.

Тема 5. Симметричная разностная схема для решения уравнений гиперболического типа с переменными коэффициентами

Пусть в области: $\bar{D} = \{a \le x \le b, 0 \le t \le T\}$ требуется найти решение $u = u(x,t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - d(x,t)u + f(x,t) \tag{5.1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad a \le x \le b \tag{5.3}$$

$$\alpha_1(t)u(a,t)-\beta_1(t)\frac{\partial u}{\partial x}(a,t)=\upsilon_1(t), \tag{5.4}$$

$$\alpha_2(t)u(b,t)-\beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(b,t)=\upsilon_2(t), \quad 0\le t\le T\,. \tag{5.5}$$

Все коэффициенты задачи (5.1)–(5.5) предполагаются непрерывными и ограниченными:

$$a(x,t)\ge a_0>0, \quad d(x,t)\ge 0,$$
$$\left|\alpha_k(t)\right|+\left|\beta_k(t)\right|\ne 0, \ k=1,2.$$

Уравнению (4.1) на сетке $\overline{w}_{h,\tau}=\overline{w}_h\times\overline{w}_\tau$

$$\overline{w}_h=\left\{x_i=a+ih, \ i=\overline{0,N}, \ h=\frac{b-a}{N}\right\},$$
$$\overline{w}_\tau=\left\{t_j=j*\tau, \ j=\overline{0,M}, \ \tau=T/M\right\},$$

поставим в соответствие разностное уравнение

$$y_{t\bar{t}}=\left(\overline{a}\tilde{y}_{\overline{x}}\right)_x-d\tilde{y}+f, \tag{5.6}$$

где $\quad y_{t\bar{t}}=\dfrac{y_i^{j+1}-2y_i^j+y_i^{j-1}}{\tau^2}, \quad y_i^j=y\left(x_i,t_j\right),$

$$y_i^{j\pm 1}=y\left(x_i,t_{j\pm 1}\right)=y\left(x_i,t_j\pm\tau\right),$$

$$\tilde{y}=\frac{1}{2}\left(y_i^{j-1}+y_i^{j+1}\right), \ f=f_i^j=f\left(x_i,t_j\right), \ d=d_i^j=d\left(x_i,t_j\right),$$

$$\overline{a}=a^j_{i-1/2}=a\left(x_i-\frac{h}{2},t_j\right).$$

Начальные условия аппроксимируем следующим образом:

$$y_i^0=\varphi(x_i), \quad i=\overline{0,N}, \tag{5.7}$$

$$\frac{y_i^1-y_i^0}{\tau}=\psi(x_i)+\frac{\tau}{2}\left[\left(\overline{a}y_{\overline{x}}^0\right)_{x,i}-d_i^0y_i^0+f_i^0\right], \quad i=\overline{1,N-1}, \tag{5.8}$$

$$\alpha_1(\tau)y_0^1-\beta_1(\tau)\frac{a_{0,5}^1}{a_0^1}y_{x,0}^1=\upsilon_1(\tau)-\beta_1(\tau)\frac{h}{2a_0^1}\left(\overline{a}^0y_{\overline{x}}^0\right)_{x,1}, \tag{5.9}$$

$$\alpha_2(\tau)\, y_N^1 - \beta_2(\tau)\,\frac{a^1_{N-0,5}}{a^1_N}\, y^1_{\bar{x},N} = \upsilon_2(\tau) - \beta_2(\tau)\,\frac{h}{2a^1_N}\left(\bar{a}^0 y^0_{\bar{x}}\right)_{x,N-1}. \quad (5.10)$$

Краевые условия (5.4), (5.5) заменим разностными краевыми условиями повышенного порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} &\alpha_1\left(t_{j+1}\right) y_0^{j+1} - \beta_1\left(t_{j+1}\right)\frac{a^{j+1}_{0,5}}{a^{j+1}_0}\, y^{j+1}_{x,0} = \upsilon_1\left(t_{j+1}\right) - \\ &-\beta_1\left(t_{j+1}\right)\frac{h}{2a_0^{j+1}}\left[y^j_{\bar{t}t,0} + d_0^{j+1} y_0^{j+1} - f_0^{j+1}\right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_2\left(t_{j+1}\right) y_N^{j+1} - \beta_2\left(t_{j+1}\right)\frac{a^{j+1}_{N-0,5}}{a^{j+1}_N} - y^{j+1}_{\bar{x},N} = \upsilon_2\left(t_{j+1}\right) - \\ &-\beta_2\left(t_{j+1}\right)\frac{h}{2a_N^{j+1}}\left[y^j_{\bar{t}t,N} + d_N^{j+1} y_N^{j+1} - f_N^{j+1}\right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Разностная схема (5.6)–(5.12) аппроксимирует задачу (5.1)–(5.5) на достаточно гладких решениях $u = u(x,t)$ с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. Эта схема является абсолютно устойчивой.

При каждом фиксированном j для определения решения y_i^{j+1} $(i = \overline{0,N})$ получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \;\; i = \overline{1, N-1} \\ y_0^{j+1} = x_1 y_1^{j+1} + \mu_1, \quad y_1^{j+1} = x_2 y_{N-1}^{j+1} + \mu_2 \end{cases}, \quad (5.13)$$

где

$$A_i = a^{j+1}_{i-0,5}\Big/2h^2, \;\; B_i = a^{j+1}_{i+0,5}\Big/2h^2, \;\; C_i = A_i + B_i + 1/\tau^2 + d_i^j\Big/2,$$

$$F_i = f_i^j + 2y_i^j\Big/\tau^2 + A_i y_{i-1}^{j-1} - C_i y_i^{j-1} + B_i y_{i+1}^{j-1},$$

$$x_1 = \frac{2\tau^2\beta_1^{j+1} a_{0,5}^{j+1}}{2\alpha_1^{j+1} h\tau^2 a_0^{j+1} + \beta_1^{j+1}\left(2\tau^2 a_{0,5}^{j+1} + h^2 + h^2\tau^2 d_0^{j+1}\right)},$$

$$\mu_1 = \frac{2h\tau^2 a_0^{j+1}\upsilon_1^{j+1} + h^2\beta_1^{j+1}\left(2y_0^j - y_0^{j-1} + \tau^2 f_0^{j+1}\right)}{2\alpha_1^{j+1}h\tau^2 a_0^{j+1} + \beta_1^{j+1}\left(2\tau^2 a_{0,5}^{j+1} + h^2 + h^2\tau^2 d_0^{j+1}\right)},$$

$$x_2 = \frac{2\tau^2\beta_2^{j+1}a_{N-0,5}^{j+1}}{2h\tau^2\alpha_2^{j+1}a_N^{j+1} + \beta_2^{j+1}\left(2\tau^2 a_{N-0,5}^{j+1} + h^2 + h^2\tau^2 d_N^{j+1}\right)},$$

$$\mu_2 = \frac{2h\tau^2 a_N^{j+1}\upsilon_2^{j+1} + h^2\beta_2^{j+1}\left(2y_N^j - y_N^{j-1} + \tau^2 f_N^{j+1}\right)}{2h\tau^2\alpha_2^{j+1}a_N^{j+1} + \beta_2^{j+1}\left(2\tau^2 a_{N-0,5}^{j+1} + h^2 + h^2\tau^2 d_N^{j+1}\right)}.$$

Для решения системы уравнений (5.13) можно использовать методы правой или левой прогонки, так как условия устойчивости прогонки в данном случае выполнены.

Вычислительный алгоритм решения разностной задачи (5.6)–(5.12) можно описать следующим образом:

1) выбираются шаги h и τ, определяющие сетку на области $\overline{D}$;

2) по формуле (5.7) определяется решение $y_i^0 = \varphi(x_i)$, $(i = \overline{0, N})$ на нулевом слое;

3) для вычисления решения y_i^1 на первом слое используются соотношения $(i = \overline{1, N-1})$

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\left[\frac{a_{i+0,5}^0\left(y_{i+1}^0 - y_i^0\right) - a_{i-0,5}^0\left(y_i^0 - y_{i-1}^0\right)}{h^2} - d_i^0 y_i^0 + f_i^0\right],$$

$$y_0^1 = \frac{a_{0,5}^1\beta_1(\tau)y_1^1 + a_0^1 h\tilde{m}}{a_{0,5}^1\beta_1(\tau) + ha_0^1\alpha_1(\tau)},$$

$$y_N^1 = \frac{a_{N-0,5}^1\beta_2(\tau)y_{N-1}^1 + a_N^1 h\tilde{n}}{a_{N-0,5}^1\beta_2(\tau) + ha_N^1\alpha_2(\tau)},$$

где $\tilde{m} = \upsilon_1(\tau) - \dfrac{\beta_1(\tau)}{2ha_0^1}\left[a_{3/2}^1\left(y_2^0 - y_1^0\right) - a_{1/2}^0\left(y_1^0 - y_0^0\right)\right],$

$$\tilde{n} = \upsilon_2(\tau) - \frac{\beta_2(\tau)}{2ha_N^1}\left[a_{N-0,5}^0\left(y_N^0 - y_{N-1}^0\right) - a_{N-3/2}^0\left(y_{N-1}^0 - y_{N-2}^0\right)\right];$$

4) для каждого $j = \overline{1, M-1}$ строится система конечно-разностных уравнений (4.13) Для этого определяются все коэффициенты A_i, B_i, C_i и $F_i (i = \overline{1, N-1})$, а также x_k, μ_k $(k = 1, 2)$. Построенная схема уравнений решается методом прогонки.

При программировании описанного вычислительного алгоритма в оперативной памяти ЭВМ необходимо резервировать для хранения решения только три одномерных массива размерности $N + 1$.

При переходе на новый временной слой осуществляется перегонка значений из одного массива в другой, что позволяет освободить один из массивов под новые значения.

Вопросы для самоконтроля

1. Показать, что разностное уравнение (5.6) аппроксимирует дифференциальное уравнение (5.1) с порядком $O\left(\tau^2 + h^2\right)$.

2. Определить порядок аппроксимации начальных условий (5.7)–(5.10).

3. Определить порядок аппроксимации граничных условий (5.11), (5.12).

4. Свести разностную задачу (5.6), (5.11), (5.12) к методу прогонки.

5. Показать, что для системы уравнений (5.13) выполняются условия устойчивости метода прогонки.

Тема 6. Решение двумерного уравнения гиперболического типа в прямоугольнике локально-одномерным методом

В прямоугольной области $\overline{D} = \overline{\Omega} \times [0 \le t \le T]$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, Γ – граница области $\Omega = \{x_1 x_2;\ 0 \le x_2 \le l_2,\ \ \alpha = 1, 2\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha U + f(x,t), \quad L_\alpha U = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right) \qquad (6.1)$$

$$K_\alpha(x,t) \ge C_1 > 0, \quad C_1 = \text{const},$$

удовлетворяющее краевому условию

$$U(x,t)\big|_\Gamma = \mu(x,t), \quad 0 \le t \le T \qquad (6.2)$$

и начальным условиям

$$U(x,0)=U_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=\overline{U_0}(x), \quad x\in\overline{\Omega} \qquad (6.3)$$

При этом предполагается, что задача (6.1)–(6.3) имеет единственное решение $U=U(x,t)$, обладающее непрерывными в $\overline{D}$ производными по x_α и t до четвертого порядка включительно; правая часть $f(x,t)$ должна быть дважды дифференцируемой по t.

Построим для решения задачи (6.1)–(6.3) экономичную разностную схему. Для этого используем локально-одномерный метод (метод суммарной аппроксимации). Идея метода связана с понятием суммарной аппроксимации и состоит в том, что процесс отыскания приближенного решения многомерной задачи разбивается на несколько этапов путем введения промежуточных временных слоев, на каждом из которых решается одномерная разностная задача, не аппроксимирующая исходное уравнение. Аппроксимация исходного дифференциального уравнения достигается только при переходе со слоя t_j на слой t_{j+1} при суммировании невязок по всем промежуточным слоям

$$\Psi=\sum_{\alpha=1}^{2}\Psi_\alpha .$$

Введем в области $\overline{D}$ равномерную пространственно-временную сетку $\varpi_{h,\tau}=\varpi_h\times\varpi_\tau$: $\varpi_h=\{(i_1h_1,i_2h_2),\ i_2=\overline{0,N_\alpha},\ N_\alpha=l_\alpha/h_\alpha\}$,

$$\varpi_\tau=\{t_{j+\alpha/2}=t_j+\alpha_{i/2},\quad j=\overline{0,j^*},\quad j^*\tau=T,\ \ \alpha=1,2\}$$

и перепишем уравнение (6.1) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2}P_\alpha U=0,$$

$$P_\alpha(U)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)+f_\alpha(x,t), \qquad (6.4)$$

где $f_\alpha(x,t)$, $(\alpha=1,2)$ – произвольные функции (обладающие не той же гладкостью, что и $f(x,t)$, удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1+f_2=f .$$

При построении разностной схемы используем следующие обозначения:

$$t_\alpha=t_j+\alpha\tau/2,\quad t_{\alpha-1}=t_j+\frac{(\alpha-1)\tau}{2},\quad t'_\alpha=t_j+\left(\frac{\alpha}{2}-0,5\right)\tau,$$

$$y_\alpha = y_\alpha(x, t_\alpha), \quad y_{\alpha-1} = y(x, t_{\alpha-1}), \quad \breve{y}_\alpha = y(x, t_{j-1+\alpha/2}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Аппроксимируем теперь с шагом $\tau/2$ последовательно операторы (6.4). Для аппроксимации производной $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ с шагом $\tau/2$, используя выражения

$$y_{t_\alpha \overline{t_\alpha}} = \frac{y_\alpha - 2y_{\alpha-1} + \breve{y}_\alpha}{\tau^2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

а для аппроксимации $L_\alpha U + f_\alpha$ на пространственной сетке ω_h применяется разностный оператор второго порядка аппроксимации:

$$\Lambda_1 y_{1,i_1,i_2} = \frac{1}{h_1}\left[K_{1,i_1+0,5,i_2}\frac{y_{1,i_1+1,i_2} - y_{1,i_1,i_2}}{h_1} - K_{1,i_1-0,5,i_2}\frac{y_{1,i_1,i_2} - y_{1,i_1-1,i_2}}{h_1}\right]$$

$$\Lambda_2 y_{2,i_1,i_2} = \frac{1}{h_2}\left[K_{2,i_1,i_2+0,5}\frac{y_{2,i_1,i_2+1} - y_{2,i_1,i_2}}{h_2} - K_{2,i_1,i_2-0,5}\frac{y_{2,i_1,i_2} - y_{2,i_1,i_2-1}}{h_2}\right]$$

$$K_{1,i_1\pm 0,5,i_2} = K_1((i_1 \pm 0,5)h_1, i_2 h_2, t),$$

$$K_{2,i_1,i_2\pm 0,5} = K_2(i_1 h_1, (i_2 \pm 0,5)h_2, t), \quad \varphi_\alpha = f_\alpha + 0(h_\alpha^2)$$

Коэффициент оператора Λ_α и правая часть φ_α берутся в момент t'_α, так что $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(t'_\alpha)$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t'_\alpha)$.

В результате с учетом аппроксимации граничных и начальных условий получаем следующую локально-одномерную разностную схему:

$$\frac{y_\alpha - 2y_{\alpha-1} + \breve{y}_\alpha}{\tau^2} = \frac{1}{4}\Lambda_\alpha(y_\alpha + \breve{y}_\alpha) + \frac{1}{2}\varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{6.5}$$

$$y_\alpha = \mu(x, t_\alpha), \quad x \in \Gamma, \tag{6.6}$$

$$y(x, 0) = U_0(x), \tag{6.7}$$

$$y\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1 y\left(x, \frac{\tau}{2}\right) + F_1, \quad x \in \omega_h, \tag{6.8}$$

где $F_1 = U_0 + \dfrac{\tau}{2}\overline{U_0} + \dfrac{\tau^2}{4}\Lambda_1 U_0 + \tau^2\left(f_1 - \dfrac{1}{8}(\Lambda U + f)\right)\Big|_{t=0}$.

Каждое из разностных уравнений (6.5) при фиксированном α аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)+f_\alpha(x,t)$$

с порядком $O(\tau^2+h_\alpha^2)$. Погрешность аппроксимации осей разностной схемы на решении $U(x,t)$ дифференциальной задачи (6.1)–(6.3) представима в виде суммы

$$\Psi=\sum_{\alpha=1}^{2}\Psi_\alpha,$$

где $$\Psi=\overset{\circ}{\Psi}_\alpha+\overset{*}{\Psi}_\alpha,\quad \overset{*}{\Psi}_\alpha=O(\tau^2+h_\alpha^2),$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)-f_\alpha(x,t)\right]_{t=t'_\alpha}.$$

Отсюда следует

$$\overset{\circ}{\Psi}{}_1^{j}+\overset{\circ}{\Psi}{}_2^{j+1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ddot{U}-L_1U-f_1\right)^{j}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ddot{U}-L_2U-f_2\right)^{j+1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\ddot{U}-(L_1+L_2)U-(f_1+f_2))^{j}+\frac{1}{2}\tau\overset{\circ}{\Psi}_{2,\bar{t}_1},\quad \ddot{U}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_{2,\bar{t}_1}=(\overset{\circ}{\Psi}{}_2^{j+1/2}-\overset{\circ}{\Psi}{}_2^{j})/\tau.$$

Учитывая, что в силу уравнения (6.1)

$$\ddot{U}=(L_1+L_2)U-f,\quad f=f_1+f_2,$$

получим $$\Psi=\overset{\circ}{\Psi}{}_1^{j}+\overset{\circ}{\Psi}{}_2^{j+1/2}+O(\tau^2+|h|^2)=O(\tau+|h|^2),$$

то есть разностная схема (6.5)–(6.8) аппроксимирует задачу (6.1)–(6.3) в суммарном смысле с порядком $O(\tau+|h|^2)$.

Локально-одномерная разностная схема абсолютно устойчива и сходится в сеточной форме W_2^1 со скоростью $O(\tau+|h|^2)$.

Пусть теперь при $\alpha=1$ решения $y_{\alpha-1}$ и $\breve{y}_\alpha$ уже вычислены. Тогда для вычисления $y_{\alpha-1}$ на сетке $\overline{w_h}$ получаем следующую систему уравнений $(1\le i_1\le N_1-1,\ 1\le i_2\le N_2-1)$:

$$A_{i_1}y_{i_1-1,i_2}^{j+1/2}-C_{i_1}y_{i_1,i_2}^{j+1/2}+B_{i_1}y_{i_1+1,i_2}^{j+1/2}=-F_{i_1}\tag{6.9}$$

$$y_{0,i_2}^{j+1/2}=\mu_{0,i_2}^{j+1/2},\quad y_{N_1,i_2}^{j+1/2}=\mu_{N_1,i_2}^{j+1/2},\qquad 1\le i_2\le N_2-1,$$

где

$$A_{i_1} = K_1((i_1-0,5)h_1, i_2h_2, t_j)/4h_1^2, \quad B_{i_1} = K_1((i_1+0,5)h_1, i_2h_2, t_j)/4h_1^2,$$

$$C_{i_1} = A_{i_1} + B_{i_1} + 1/\tau^2, \quad F_{i_1} = \frac{1}{2} f_{i_1,i_2}^{j+1/2} + \frac{2y_{i_1,i_2}^{j} - y_{i_1,i_2}^{j-1/2}}{\tau^2} + \frac{1}{4}\Lambda_1 y_{i_1,i_2}^{j-1/2}.$$

При каждом фиксированном $i_2 = 1,2,...,N_2-1$ система уравнений (6.9) решается методом прогонки по переменной i_1.

Определив решение $y^{j+1/2}$, переходим к следующей системе конечно-разностных уравнений для $\alpha = 2$ $(1 \le i_2 \le N_1 - 1,\ 1 \le i_1 \le N_1 - 1)$:

$$A_{i_2} y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{i_2} y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{i_2} y_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -F_{i_2} \qquad (6.10)$$

$$y_{i_1,0}^{j+1} = \mu_{i_1,0}^{j+1}, \quad y_{i_1,N_2}^{j+1} = \mu_{i_1,N_2}^{j+1}, \quad 1 \le i_1 \le N_1 - 1,$$

где

$$A_{i_2} = K_2(i_1h_1(i_2-0,5)h_2, t_{j+1/2})/4h_2^2,$$

$$B_{i_2} = K_2(i_1h_1(i_2+0,5)h_2, t_{j+1/2})/4h_2^2,$$

$$C_{i_2} = A_{i_2} + B_{i_2} + 1/\tau^2, \quad F_{i_2} = \frac{1}{2} f_{i_1,i_2}^{j+1} + \frac{2y_{i_1,i_2}^{j+1/2} - y_{i_1,i_2}^{j}}{\tau^2} + \frac{1}{2}\Lambda_2 y_{i_1,i_2}^{j}.$$

Эта система позволяет найти решение y^{j+1}. Для этого система (6.10) при каждом фиксированном $i_1 = 1,2,...,N_1-1$ решается методом прогонки по переменной i_2.

Таким образом, полагая последовательно $\alpha = 1,2$ и меняя направления прогонок, определим $y^{j+1/2}$ и y^{j+1}, затратим при этом количество арифметических операций, пропорциональное числу узлов сетки W_h, то есть разностная схема (6.5)–(6.8) является экономичной.

Вычислительный алгоритм решения задачи (6.1)–(6.3) локально одномерным методом может быть описан следующим образом:

1) выбираются шаги h_1, h_2 и τ, которые определяют сетку $\overline{W}_{h,\tau}$ на области $\overline{D}$;

2) по формуле (6.7) находится решение $y_{i_1,i_2}^{0} = u_0(i_1h_1, i_2h_2)$ на нулевом слое;

3) для определения решения $y\left(x, \tau/2\right)$ на первом промежуточном слое решается следующая система уравнений:

$$A_{i_1} y_{i_1-1,i_2}^{1/2} - C_i y_{i_1,i_2}^{1/2} + B_{i_1} y_{i_1,i_2+1}^{1/2} = -F_{i_1}, \quad 1 \le i_1 \le N_1 - 1,\ 1 \le i_2 \le N_2 - 1.$$

$$y_{0,i_2}^{1/2} = \mu_{0,i_2}^{1/2}, \quad y_{N_1,i_2}^{1/2} = \mu_{N_1,i_2}^{1/2}. \quad 1 \le i_2 \le N_2 - 1,$$

где $A_{i_1} = \tau^2 K_1\left((i_1-0,5)h_1, i_2h_2, \tau/2\right)4h_1^2,$

$$B_{i_1} = \tau^2 K_1\left((i_1+0,5)h_1, i_2h_2, \tau/2\right)4h_1^2,$$

$$C_{i_1} = A_{i_1} + B_{i_1} + 1, \quad F_{i_1} = F_{1,i_1,i_2};$$

4) из системы уравнений (6.10) методом прогонки находится решение $y(x,\tau)$ на первом слое;

5) для каждого $j = \overline{1, j^2-1}$ строятся системы уравнений (6.9) и (6.10), первая из которых решается методом прогонки вдоль строк $i_2 = 1,2,...,N_2-1$, а вторая – вдоль столбцов $i_1 = 1,2,...,N_1-1$

Вопросы для самоконтроля

1. Показать, что разностное уравнение (6.5) аппроксимирует дифференциальный оператор (6.4) с порядком $O(\tau^2 + h_2^2)$.

2. Определить погрешность аппроксимации для разностного уравнения (6.8).

3. Показать, что локально-одномерная разностная схема (6.5)–(6.8) аппроксимирует задачу (6.1)–(6.3) в суммарном смысле.

4. Доказать, что локально-одномерная разностная схема (6.5)–(6.8) является экономичной.

5. Выполняются ли условия устойчивости метода прогонки для систем уравнений (6.9) и (6.10)?

Тема 7. Решение нелинейных задач математической физики

Рассмотрим краевую задачу для квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t,U)\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + f(x,t,U), \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ U(x,0) = U_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad U(0,t) = \overline{\mu_0}(t), \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}(1,t) = \overline{\mu_1}(t), \quad t \ge 0, \ \ K(x,t,U) \ge C > 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Задачу (7.1) аппроксимируем на сетке $\overline{\omega}_{\tau,h} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ неявной разностной схемой вида

$$
\begin{gathered}
y_k = (a(\hat{y})\hat{y}_{\bar{x}})_x + f(\hat{y}), \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau} \\
y(x,0) = U_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \\
y(0,t) = \bar{\mu}_0(t), \quad y_{\bar{x}}(1,t) = \bar{\mu}_1(t), \quad t \in \omega_\tau,
\end{gathered}
\tag{7.2}
$$

где $a(\hat{y})$ выбирается по формулам

$$
a(y) = \frac{K(x, t+\tau, \hat{y}(x)) + K(x-h, t+\tau, \hat{y}(x-h))}{2},
$$

$$
a(\hat{y}) = K(x-0{,}5h, t+\tau,\ 0{,}5(\hat{y}(x) + \hat{y}(x-h)), \quad \hat{y}(x) = y(x, t+\tau) .
$$

Для реализации неявной схемы (7.2), которая представляет собой систему нелинейных уравнений относительно $\hat{y}$, используются итерационные процессы.

1. *Метод итерации*. Коэффициенты уравнения вычисляются на k-й итерации, а разностные производные на (k+*1*)-й. Тогда относительно (k+*1*)-й итерации получаем систему линейных алгебраических уравнений вида ($1 \le i \le N-1$):

$$
\frac{\overset{(k+1)}{y_i} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}\left[\frac{K\left(x_{i+1}, t_j+\tau, \overset{(k)}{y}_{i+1}\right) + K\left(x_i, t_j+\tau, \overset{(k)}{y}_i\right)}{2} \times \frac{\overset{(k+1)}{y}_{i+1} - \overset{(k)}{y}_i}{h} - \right.
$$

$$
\left. - \frac{K\left(x_i, t_j+\tau, \overset{(k)}{y}_i\right) + K\left(x_{i-1}, t_j+\tau, \overset{(k)}{y}_{i-1}\right)}{2} \times \frac{\overset{(k+1)}{y}_i - \overset{(k+1)}{y}_{i-1}}{h}\right] + f\left(x_i, t_j+\tau, \overset{(k)}{y}_i\right), \tag{7.3}
$$

$$
\overset{(k+1)}{y}_0 = \bar{\mu}_0(t_{j+1}), \quad \frac{\overset{(k+1)}{y}_N - \overset{(k+1)}{y}_{N-1}}{h} = \bar{\mu}_1(t_{j+1}), \quad t_{j+1} = t_j + \tau, \quad \overset{(0)}{y}_i = y_i^j, \quad i = \overline{0,N}.
$$

Вычисления по k проводятся до тех пор, пока $|\overset{(k+1)}{y}_i - \overset{(k)}{y}_i| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность. Тогда $\overset{(k+1)}{y}_i = \overset{j+1}{y}_i$. На начальном этапе задается значение $\overset{0}{y}_i = U_0(x_i)$, $i = \overline{0,N}$. Для решения системы (7.3) используется метод прогонки.

2. *Метод Ньютона*. Разностное уравнение (7.3) относительно неизвестных $\overset{j+1}{y}_{i-1}$, $\overset{j+1}{y}_i$, $\overset{j+1}{y}_{i+1}$ лежащих на верхнем слое, записывается в виде

$$
F(\overset{j+1}{y}_{i-1}, \overset{j}{y}_i, \overset{j+1}{y}_{i+1}) = 0. \tag{7.4}
$$

И линеаризуется по методу Ньютона на k-й итерации y_i:

$$
\begin{aligned}
&F\left(\overset{(k)}{y}_{i-1},\overset{(k)}{y}_{i},\overset{(k)}{y}_{i+1}\right)+\frac{\partial F\left(\overset{(k)}{y}_{i-1},\overset{(k)}{y}_{i},\overset{(k)}{y}_{i+1}\right)}{\partial\hat{y}_{i-1}}\left(\overset{(k+1)}{y}_{i-1}-\overset{(k)}{y}_{i-1}\right)+\\
&+\frac{\partial F\left(\overset{(k)}{y}_{i-1},\overset{(k)}{y}_{i},\overset{(k)}{y}_{i+1}\right)}{\partial\hat{y}_{i}}\times\left(\overset{(k+1)}{y}_{i}-\overset{(k)}{y}_{i}\right)+\\
&+\frac{\partial F\left(\overset{(k)}{y}_{i-1},\overset{(k)}{y}_{i},\overset{(k)}{y}_{i+1}\right)}{\partial\hat{y}_{i+1}}\left(\overset{(k+1)}{y}_{i+1}-\overset{(k)}{y}_{i+1}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Тогда относительно $\overset{(k+1)}{y}_{i-1},\ \overset{(k+1)}{y}_{i},\ \overset{(k+1)}{y}_{i+1}$ получается система линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&A_i\overset{(k+1)}{y}_{i-1}-C_i\overset{(k+1)}{y}_{i}+B_i\overset{(k+1)}{y}_{i+1}=-F_i,\quad 1\le i\le N-1\\
&\overset{(k+1)}{y}_{0}=\overline{\mu}_0(t_{j+1}),\quad \overset{(k+1)}{y}_{N}=h\overline{\mu}_1(t_{j+1})+y_{N-1},\\
&A_i=\frac{\partial\overset{(k)}{F}}{\partial\hat{y}_{i-1}},\ B_i=\frac{\partial\overset{(k)}{F}}{\partial\hat{y}_{i+1}},\ C_i=-\frac{\partial\overset{(k)}{F}}{\partial\hat{y}_{i}},\\
&F_i=\overset{(k)}{F}-\overset{(k)}{y}_{i-1}\frac{\partial\overset{(k)}{F}}{\partial\hat{y}_{i-1}}-\overset{(k)}{y}_{i}\frac{\partial\overset{(k)}{F}}{\partial\hat{y}_{i}}-\overset{(k)}{y}_{i+1}\frac{\partial\overset{(k)}{F}}{\partial\hat{y}_{i+1}}.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Условия устойчивости разностной прогонки можно удовлетворить за счет выбора шагов сетки. Счет по k ведется до тех пор, пока $\left|\overset{(k+1)}{y}_{i}-\overset{(k)}{y}_{i}\right|\le\varepsilon$, тогда $\overset{(k+1)}{y}_{i}=\hat{y}_i=y_i^{j+1}$.

3. Рассмотрим *методы итерации и Ньютона* для задачи

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((U^2+xt+1)\frac{\partial U}{\partial x}\right)+Ux,\quad 0<x<1,\quad t>0\\
&U(x,0)=x+1,\quad 0\le x\le 1,\\
&U(0,t)=1+t^2,\quad \frac{\partial U(1,t)}{\partial x}=1-t^2,\quad t\ge 0.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Неявная разностная схема для задачи (7.7) имеет вид

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[\frac{(y_{i+1}^{j+1})^2+x_{i+1}t_{j+1}+1+(y_i^{j+1})^2+x_it_{j+1}+1}{2}\cdot\frac{y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}}{h}-\right.$$

$$\left.-\frac{(y_i^{j+1})^2+x_it_{j+1}+1+(y_{i-1}^{j+1})^2+x_{i-1}t_{j+1}+1}{2}\cdot\frac{y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}}{h}+y_i^{j+1}x_i\right],$$

$$1\le i\le N-1, \qquad (7.8)$$

$$y_0^{j+1}=1+t_{j+1}^2,\quad \frac{y_N^{j+1}-y_{N-1}^{j+1}}{h}=1-t_{j+1}^2,\quad j=0,1,\ldots j^*$$

$$y_i^0=x_i+1,\quad i=\overline{0,N}.$$

Метод итерации для нахождения значений $y_i^{j+1}, i=\overline{0,N}$ приводит к системе, решаемой по методу прогонки, с коэффициентами, которые находятся по формулам:

$$A_i=\frac{\overset{(k)}{y}{}_i^2+x_it_{j+1}+\overset{(k)}{y}{}_{i-1}^2+x_{i-1}t_{j+1}+1}{2h^2},\ (A_i>0),$$

$$B_i=\frac{\overset{(k)}{y}{}_{i+1}^2+x_{i+1}t_{j+1}+1+\overset{(k)}{y}{}_i^2+x_it_{j+1}+1}{2h^2},\ (B_i>0) \qquad (7.9)$$

$$C_i=A_i+B_i+1/\tau,\ (C_i>A_i+B_i),$$

$$F_i=\frac{y_i^j}{\tau}+\overset{(k)}{y}_i x_i,\quad 1\le i\le N-1,$$

$$\chi_1=0,\quad \mu_1=1+t_{j+1}^2,\quad \chi_2=1,\quad \mu_2=h(1-t_{j+1}^2).$$

Применим для реализации нелинейной разностной схемы (7.8) итерационный процесс *Ньютона*. Записав разностную схему (7.8) в форме (7.4), получим

$$F\left(\overset{j+1}{y}_{i-1},\overset{j+1}{y}_i,\overset{j+1}{y}_{i+1}\right)=\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}+\frac{1}{h}\left[\frac{(y_{i+1}^{j+1})^2+x_{i+1}t_{j+1}+1+(y_i^{j+1})^2+x_it_{j+1}+1}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}}{h}-\frac{(y_i^{j+1})^2+x_it_{j+1}+1+(y_{i-1}^{j+1})^2+x_{i-1}t_{j+1}+1}{2}\cdot\frac{y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}}{h}\right]+y_i^{j+1}x_i=0.$$

Тогда для прогонки коэффициенты системы будут равны:

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{\overset{(k)}{y}{}_i^2 + x_i t_{j+1} + 1 + \overset{(k)}{y}{}_{i-1}^2 + x_{i-1} t_{j+1} + 1}{2h^2} - \overset{(k)}{y}_{i-1} \frac{\overset{(k)}{y}_i - \overset{(k)}{y}_{i-1}}{h^2}, \\
B_i &= \frac{\overset{(k)}{y}{}_{i+1}^2 + x_{i+1} t_{j+1} + 1 + \overset{(k)}{y}{}_i^2 + x_i t_{j+1} + 1}{2h^2} + \overset{(k)}{y}_{i+1} \frac{\overset{(k)}{y}_{i+1} - \overset{(k)}{y}_i}{h^2}, \\
C_i &= \frac{\overset{(k)}{y}{}_{i+1}^2 + x_{i+1} t_{j+1} + 1 + \overset{(k)}{y}{}_i^2 + x_i t_{j+1} + 1}{2h^2} - \overset{(k)}{y}_i \frac{\overset{(k)}{y}_{i+1} - \overset{(k)}{y}_i}{h^2} + \\
&+ \frac{\overset{(k)}{y}{}_i^2 + x_i t_{j+1} + 1 + \overset{(k)}{y}{}_{i-1}^2 + x_{i-1} t_{j+1} + 1}{2h^2} + \overset{(k)}{y}_i \frac{\overset{(k)}{y}_i - \overset{(k)}{y}_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{\tau} - x_i .
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Величина F_i после сокращений будет иметь значение

$$
\begin{aligned}
F_i &= \frac{y_i^j}{\tau} + \overset{(k)}{y}{}_{i-1}^2 \frac{\overset{(k)}{y}_i - \overset{(k)}{y}_{i-1}}{h^2} + \overset{(k)}{y}{}_i^2 \frac{-\overset{(k)}{y}_{i+1} + 2\overset{(k)}{y}_i - \overset{(k)}{y}_{i-1}}{h^2} - \\
&- \overset{(k)}{y}{}_{i+1}^2 \frac{\overset{(k)}{y}_{i+1} - \overset{(k)}{y}_i}{h^2} - x_i \overset{(k)}{y}_i, \quad \chi_1 = 0,\ \mu_1 = 1 + t_{j+1}^2,\ \chi_2 = 1,\ \mu_2 = h(1 - t_{j+1}^2).
\end{aligned}
$$

В обоих случаях в качестве начального приближения берется значение решение на нижнем временном слое $\overset{(0)}{y}_i = y_i^j, i = \overline{0, N}$.

Алгоритм решения задачи (7.1) можно описать следующим образом:

1) вводятся постоянные τ, h, j^*, N;

2) заполняется нулевой слой $y_i = U_0(x_i),\ x_i = ih,\ i = \overline{0, N};$

3) начало цикла по j;

4) вычисление величин

$$t_{j+1} = (i+1)\tau,\ \mu_1 = \overline{\mu}_0(t_{j+1}) = 1 + t_{j+1}^2,\ \mu_2 = \overline{\mu}_1(t_{j+1}) = h(1 - t_{j+1}^2);$$

5) заполнение массива значений для $\overset{(k)}{y}_i$ при $k = 0$ $\overset{(k)}{y}_i = y_i^j,\ i = \overline{0, N}$;

6) начало цикла по k;

7) в цикле $i = \overline{1, N-1}$вычисляются массивы значений A_i, B_i, C_i, F_i, для метода простой итерации по формулам (7.9), а для метода Ньютона по формулам (7.10);

8) решение системы уравнений методом прогонки и определение массива значений $\overset{(k+1)}{y}_i, i = \overline{0, N}$;

9) сравнение на точность двух соседних итераций $|\overset{(k+1)}{y_i} - \overset{(k)}{y_i}| < \varepsilon$, если неравенство выполняется, то осуществляется выход из цикла по k, если неравенство не выполняется, то осуществляется пересылка значений $\overset{(k+1)}{y_i}$ на место $\overset{(k)}{y_i}$ и переход на начало цикла по k;

10) конец цикла по k с печатью количества итераций и точности $\max\limits_i \left|\overset{(k+1)}{y_i} - \overset{(k)}{y_i}\right|$;

11) печать значений $y_i^{j+1} = \overset{(k+1)}{y_i}$ и пересылка y_i^{j+1} на место y_i^j;

12) конец цикла по j.

Вопросы для самоконтроля

1. Определить порядок аппроксимации дифференциальной задачи (7.1) разностной схемой (7.2).
2. Описать метод итерации для реализации нелинейных разностных схем.
3. Описать метод Ньютона для реализации нелинейных разностных схем.
4. Какой из методов прогонки можно использовать для решения системы уравнений (7.6) и почему?

Тема 8. Численные решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области сложной формы

Найти приближенное решение уравнения:

$$-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = f(x, y), \tag{8.1}$$

удовлетворяющее на границе краевым условиям

$$U\big|_{\Gamma} = \mu(x, y). \tag{8.2}$$

Исследовать сходимость разностной схемы. Дать оценку сходимости в аппроксимации. Получить решение задачи с использованием математического обеспечения ЭВМ.

Чтобы найти функцию $U(x,y)$, заменяем область $\overline{G}$ непрерывного изменения аргументов дискретной областью $\overline{w_h}$. Тогда область определения сеточных функций будет

$$\overline{w_h} = \left\{ \begin{array}{l} x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, \ \ j = 1, 2, ..., M, \ \ i = \alpha_j, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_j + \beta_j + 1, \\ h_1 = \dfrac{H}{N-1}, \ h_2 = \dfrac{H_2}{M-1}, \end{array} \right\}$$

где α_j – индекс левой граничной точки j-й строки,

β_j – количество внутренних точек j-й строки;

h_1, h_2 – соответственно шаги по осям координат x,y, причем прямые, параллельные координатным осям пересекают границу Г области только в двух точках. Следовательно, область произвольной формы заменяем областью, составленной из прямоугольников.

Область определения сеточных функций будет равномерной по каждому направлению. На сетке $\overline{w_h}$ дифференциальной задачи (8.1), (8.2) поставим в соответствие разностную задачу:

$$-\left(\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h_2^2} \right) = \varphi_{i,j}, \tag{8.3}$$

$$V_{i,j}\Big|_{\gamma_n} = \mu_{i,j} \tag{8.4}$$

(i, j – индексы только граничных точек).

Получаем систему алгебраических уравнений, порядок которой равен числу внутренних узлов сеточных области $\overline{w_h}$. При решении поставленной задачи возможны два подхода в зависимости от сложности формы области $\overline{G}$. Одним из методов решения разностной задачи (8.3) является метод верхней релаксации с выбором оптимального параметра и применением прогонки.

На каждой внутренней строке j (j = 2, 3, … , M–1) сеточной области $\overline{w_h}$ методом прогонки решают уравнения

$$V_{i-1,j}^{k+1/2} - 2\left(1 + \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) V_{i,j}^{k+1/2} + V_{i+1}^{k+1/2} = -h^2 \varphi_{i,j} - \frac{h_1^2}{h_2^2}\left(V_{i,j-1}^{k+1} + V_{i,j+1}^{k}\right),$$

где k – номер итерации.

Итерационный параметр τ находят по формуле $\tau = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}$, где $\lambda = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{M_1+1}}{1+\dfrac{2}{C}\sin^2\dfrac{\pi}{2(N_1+1)}}, \quad c = \left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2.$

Здесь N_1 – максимальное количество внутренних точек в столбце, M_1 – максимальное количество внутренних точек в строке.

Затем вычисляется пригоночные коэффициенты p_i по формулам:

$$p_1 = 0;\ p_i = \frac{1}{2\left[1+\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2\right] - p_{i-1}}; (i = \alpha_j + 1, \ldots, \alpha_j + \beta_j).$$

На каждой внутренней строке j = 1,2, … , M–1, сеточной области $\overline{w_h}$ вычисляются прогоночные коэффициенты $Q_{i,j} = V_{\alpha_j, j}$,

$$Q_{i,j} = p_i\left(Q_{i-1,j} + h_1^2\varphi_{i,j} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\left(V_{i,j+1}^k + V_{i,j-1}^{k+1}\right)\right),$$
$$i = \alpha_j + 1, \ldots, \alpha_j + \beta_j.$$

Обратную прогонку осуществляют по формуле:

$$V_{i,j}^{k+1/2} = p_i V_{i+1,j}^{k+1/2} + Q_{i,j}, (i = \alpha_j + \beta_j, \ldots, \alpha_j + 1),$$

где $V_{i,j}^{k+1/2}$ значение функции $V_{i,j}$ на промежуточной $k + \dfrac{1}{2}$ итерации.

На каждой j-й строке промежуточное решение $V_{i,j}^{k+1/2}$ уточняется по формуле верхней релаксации

$$V_{i,j}^{k+1} = V_{i,j}^k + \tau\left(V_{i,j}^{k+1/2} - V_{i,j}^k\right), \left(k = 1, 2, \ldots; i = \alpha_j + \beta_j, \ldots, \alpha_j + 1\right).$$

После этого вычисляют погрешность

$$\zeta_j^{k+1} = \max_{\alpha_j + 1 \le i \le \alpha_j + \beta_j}\left[V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^k\right], \quad j = 2, 3 \ldots, M - 1.$$

Если выполняется условие

$$\max_j \zeta_j^{k+1} \le \varepsilon \max_j \zeta_j^1, \tag{8.5}$$

то (k+1)-е приближение считается решением системы разностных уравнений. Процесс продолжается до выполнения условия (8.5).

Для равномерной сходимости разностной схемы со вторым порядком аппроксимации имеет место оценка

$$\|V\|_w \le \|\mu\|_\gamma + \frac{R^2}{2P}\|\varphi^0\|_w + \sum_{\alpha=1}^{p}\|\delta_\alpha^*\varphi_\alpha^*\|_{w_\alpha^*},$$

где *V*– решение задачи $\Lambda V + \varphi(x) = 0$ и $\Lambda^* V + \varphi(x) = 0$ в регулярных и нерегулярных узлах соответственно, *R* – радиус *p*-мерного шара с центром в начале координат, целиком содержащего область *G* (при *p* = 2 – окружность).

Для решения задачи Дирихле в области сложной формы можно значение $V\big|_\gamma = \mu$ для граничных узлов получить путем переноса значения $U\big|_\Gamma = \mu$ из точки на границе.

Рассмотрим метод Либмана на примере решения уравнения Лапласа.

Пример. Найти приближённое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее на окружности $x^2 + y^2 = 16$ условию $u(x, y)\big|_\Gamma = x^2 y^2$.

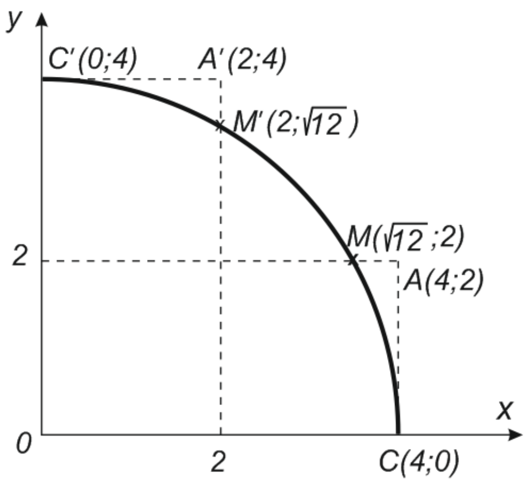


Рисунок 8.1 – Заданная область

Область Г, симметричная относительно осей координат (граничные условия также симметричны), поэтому рассмотрим I-ю четверть круга (Рисунок 8.1). Для применения конечно-разностных методов необходимы начальные приближения.

Полагаем, значения искомой функции в узлах сетки, близких к границе (приграничные узлы) равным значениям этой функции на границе. Рассмотрим сетку с шагом $h = 2$. Для узла A при $h = 2$ из уравнения окружности найдём A(4;2). Ближайшей к узлу A точкой границы является точка M($\sqrt{12}$;2). Из граничного условия находим $u(A) \approx (M) = 12 \times 2^2 = 48$.

Аналогично для узлов C и C′ при $x = 0$ и $y = 0$ значения функции на границе обращается в нуль, поэтому в узлах C(4;0) и C′(0;4), $u(\text{C}) = u(\text{C}') = 0$.

Для определения значений функции в регулярных узлах имеем систему конечно-разностных уравнений, полученных заменой частных производных в данном уравнении конечно-разностными отношениями и использованием пятиточечного шаблона «крест» с нумерацией 1-2-3-4 против часовой стрелки:

$$u_0 = \frac{1}{4}\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right).$$

Тогда в примере имеем

$$u_1 = \frac{1}{4}\left(2u_2 + 2u(M)\right) = \frac{1}{4}\left(96 + 2u_2\right),$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\left(2u_1 + u_0 + 0\right) = \frac{1}{4}\left(48 + u_2 + u_0\right),\ u_0 = \frac{1}{4}4u_2 = u_2.$$

Откуда $u_0 = 24;\ u_2 = 24;\ u_1 = 36.$

Для повышения точности вычислений уменьшаем шаг в два раза и снова рассматриваем четверть круга, учитывая симметрию решения.

Начальные значения искомой функции определяем, зная значения, полученные в узлах крупной сетки, и принимая значения в приграничных узлах равными значениям функции на границе.

При ручном счёте решение целесообразно записывать в виде таблицы. На практике для оценки точности решения используют двойной пересчёт решения с шагом h и $2h$. Если соответствующие результаты совпадают с заданной точностью, то считают, что искомое решение найдено правильно. В качестве решения берется значение, полученное с шагом h. В противном случае расчёт повторяют с шагом $\frac{h}{2}$.

Литература

1. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
3. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
4. Крылов, В. И. Вычислительные методы : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.
5. Крылов, В. И. Вычислительные методы : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т. 2. – 400 с.
6. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – 2-е изд. – М. : Наука, 1983. – 656 с.
7. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1971. – 550 с.
8. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 584 с.
9. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
10. Турчак, Л. И. Основы численных методов / Л. И. Турчак. – М. : Наука, 1987. – 364 с.

Приложение А

(обязательное)

Варианты заданий

Лабораторная работа 1. Решить заданную систему уравнений методом правой (слева) и немонотонной (справа) прогонки

$$\begin{cases} 2y_0 - y_1 = 3 \\ y_0 + 2ky_1 - y_2 = 1 + 2k \\ y_1 + 2ky_2 - y_3 = 3 + 2k \\ 3y_2 - 4y_3 = -5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = 1 - k \\ x_2 + kx_3 - 2x_4 = k - 4 \\ 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

где k – номер варианта, согласно журнальному списку.

Лабораторная работа 2. Используя явную разностную схему, найти в заданной области численное решение следующих дифференциальных задач:

1. $$(x^2+1)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+\sqrt{t}+2)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - 2Uk + \sin t + x,$$

$$1 < x < 2, \qquad 0 < t < 1$$

$$U(x,0) = \sqrt{kx}, \qquad 1 \le x \le 2,$$

$$U - (t+3)\frac{\partial U}{\partial x} = \cos t, \quad x = 1, \qquad tU + \frac{\partial U}{\partial x} = k\sin t, \quad x = 2.$$

2. $$(\sqrt{tx}+1)\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((\cos x + 2 + t)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - xtU + 2k,$$

$$0 < x < 1, \qquad 0 < t < 2$$

$$U(x,0) = x^2\cos x, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$U - t\frac{\partial U}{\partial x} = t^2 e^{tk}, \quad x = 0. \qquad tU + \sin t\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{tk}, \quad x = 1.$$

3. $$((x+t)e^t + k)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x\sqrt{t}+1)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - e^x U + \sin t,$$

$$0 < x < 1, \qquad 0 < t < 1.5,$$

$$U(0,x) = x+1, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$\sin tU - t\frac{\partial U}{\partial x} = ke^t, \quad x=0, \qquad U + kt^2\frac{\partial U}{\partial x} = 1, \quad x = 1.$$

4. $$e^t\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((2+\sqrt{t}x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - tkU + x\sin t,$$

$$1 < x < 2, \qquad 0 < t < 1,$$

$$U(x,0) = x, \qquad 1 \le x \le 2,$$

$$\sin tU - \frac{\partial U}{\partial x} = tk, \quad x=1, \qquad U + \frac{\partial U}{\partial x} = kt^2, \quad x = 2.$$

Лабораторная работа 3. Используя разностную схему с опережением, найти в заданной области численное решение следующих дифференциальных задач:

1. $$(1+kt)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((2+x^2t^3)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - xU + x^2t,$$

$$0 < x < 1, \qquad 0 < t < 2.5$$

$$U(x,0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$tU - (1+t^2)\frac{\partial U}{\partial x} = k\sin t, \quad x = 0, \qquad U + t^2\frac{\partial U}{\partial x} = k\cos t, \quad x = 1.$$

2. $$(x^2+1)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+t)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - k(t+x)U + te^x,$$

$$0 < x < 1, \qquad 0 < t < 2$$

$$U(x,0) = x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$t^2U - (1-\sin t)\frac{\partial U}{\partial x} = k, \quad x = 0, \qquad \frac{t}{1+t^2}U + t\frac{\partial U}{\partial x} = \sin kt, \quad x = 1.$$

3. $$(xt+1)\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+t+2)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - kU + 1,$$

$$0 < x < 1, \qquad 0 < t \le 1{,}5$$

$$U(x,0) = x, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$U - e^t\frac{\partial U}{\partial x} = kt, \quad x = 0, \qquad (1-kt)U + \sin t\frac{\partial U}{\partial x} = 1, \quad x = 1.$$

4. $$(1+\cos^2 t)\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((1+xt)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-txU+ke^t,$$

$$0<x<1, \qquad 0<t<1$$
$$U(x,0)=\sin x, \quad 0\le x\le 1$$
$$tU-(\cos t+1)\frac{\partial U}{\partial x}=k,\ x=0, \qquad kU+t\frac{\partial U}{\partial x}=1, \quad x=1.$$

Лабораторная работа 4. Используя продольно-поперечную разностную схему, в области

$$\overline{D}=\overline{\Omega}\times[0\le t\le 3],\overline{\Omega}=\{x=(x_1,x_2),0\le x_\alpha\le 1,\alpha=1,2\}$$

найти решение $U=U(x_1,x_2,t)$ уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1^2+x_2^2+1)\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left((x_1x_2^2+2)\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+kx_2+2x_2^2t,$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$U(x,t)=\mu(x,t),x\in\Gamma,\ 0\le t\le 3, \qquad U(x,0)=U_0(x),\ x\in\Omega,$$

1) $\mu(x,t)=kt(x_1+x_2+4), \qquad U_0(x)=0;$

2) $\mu(x,t)=x_1^2+\sin t, \qquad U_0(x)=kx_1^2;$

3) $\mu(x,t)=tx_1x_2^2+3k, \qquad U_0(x)=3k;$

4) $\mu(x,t)=e^t x_1+x_2^2+k, \quad U_0(x)=x_1+2k.$

Лабораторная работа 5. Используя симметричную разностную схему, найти в заданной области численное решение следующих дифференциальных задач:

1. $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left((x^2t+1)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-tU+k\sin x, \quad 1\le x\le 2,\ 0\le t\le 3,$$

$$U(x,0)=1,\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=0,\ 1\le x\le 2,$$

$$U-t\frac{\partial U}{\partial x}=ke^{-t},\ x=1; \qquad \mathrm{k}\sin U+t^2\frac{\partial u}{\partial x}=\cos t,\ x=2.$$

2. $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x(x+t)\frac{\partial U}{\partial x} \right) - U + \sqrt{tk} + x^2,\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le t \le 2,$$

$$U(x,0) = x^2 + 2,\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0,\ 1 \le x \le 2,$$

$$3Uk - \sin t\frac{\partial U}{\partial x} = 1,\ x = 1, \qquad \cos U + t\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{tk},\ x = 2.$$

3. $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+2)\frac{\partial U}{\partial x} \right) - (x^2 + 2k)U - 2t,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 2,$$

$$U(x,0) = \sqrt{x},\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 4,\ 0 \le x \le 1,$$

$$Ukt - \sqrt{t}\frac{\partial U}{\partial x} = 1,\ x = 0, \qquad 2U + k\sin t\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{t+1},\ x = 1.$$

4. $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((\sin^2 t + 1)\frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{kU}{x^2+1} + 4t - 5,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 3,$$

$$U(x,0) = 0,\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \ln(x+1),\ 0 \le x \le 1,$$

$$\ln(t+2)U - k\frac{\partial U}{\partial x} = 1,\ x = 0, \qquad U + k\frac{\partial U}{\partial x} = \cos t,\ x = 1.$$

Лабораторная работа 6. Используя локально-одномерную разностную схему в области

$$\overline{D} = \overline{\Omega} \times [0 \le t \le 3], \qquad \overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2), 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 1\},$$

найти решение *U=U(x,t)* уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1 + kt + 1)\frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left((x_1^2 + tx_2 + 3)\frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \sqrt{x_1 x_2 + t} - \mathrm{const},$$

удовлетворяющего следующим граничным и начальным условиям:

$$U(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \le 3,$$

$$U(x,0) = U_0(x), \ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \overline{U_0}(x), \qquad x \in \overline{\Omega},$$

1) $\mu(x,t) = ktx_1 + x_2 - 1,\qquad u_0(x) = x_2 - 1,\quad \overline{u_0}(x) = x_1.$

2) $\mu(x,t) = 5kx_1 + x_2 \sin t,\qquad u_0(x) = 5x_2,\qquad \overline{u_0}(x) = x_1.$

3) $\mu(x,t) = e^t(x_1 + x_2) + k,\ u_0(x) = x_1 + x_2,\ \overline{u_0}(x) = x_1 + x_2.$

4) $\mu(x,t) = \sqrt{x_1} + tkx_2,\ u_0(x) = \sqrt{x_1},\ \overline{u_0}(x) = \sqrt{x_1} + x_2.$

Лабораторная работа 7. Для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{kxt+U}\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + \dfrac{1}{k}tU^2,\ 0 < x < 1,\ t > 0. \\ U(x,0) = e^x,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ U(0,t) = 1 + t,\ \ \dfrac{\partial U}{\partial x}(1,t) = e - \sin t, t \ge 0. \end{cases}$$

Построить разностную схему и реализовать ее методами итераций и Ньютона; k – номер варианта.

Лабораторная работа 8. Найти приближённое решение уравнения $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = k,$ удовлетворяющее на окружности $x^2 + y^2 = 25$ условию $U(x,y)\big|_\Gamma = kx^2y^2 - 1.$

При решении задачи применить метод Либмана для сглаживания решения на границе области.

Производственно-практическое издание

Жадан Михаил Иванович,
Березовская Елена Михайловна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Коректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 01.06.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25. Заказ 518.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.