Н. М. Адарченко
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

По теореме Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индексы ее максимальных подгрупп – простые числа или квадраты простых чисел (см. [1], теорема 10.5.7). Согласно теореме Б. Хупперта, конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её максимальных подгрупп – простые числа (см. [1], теорема 10.5.8). В настоящем сообщении предлагается усиление этих результатов.

Лемма 1. *Пусть P – силовская p-подгруппа конечной группы G. Если подгруппа M группы G содержит $N_G(P)$, то число $|G:M|$ сравнимо с 1 по модулю p.*

Лемма 2. *Пусть P – силовская p-подгруппа конечной группы G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Если $N_G(P) \leq M$ и $|G:M| = q$ – простое число, то $p< q$.*

Лемма 3. *Пусть P – силовская p-подгруппа конечной группы G, q – простое число, $p>q$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Если $N_G(P) \leq M$ и $|G:M| = q^2$, то $p=3$, $q=2$.*

Теорема 1. *Пусть для любой не нормальной силовской подгруппы P конечной группы G выполнено следующее условие: если максимальная подгруппа M из G содержит $N_G(P)$, то $|G:M|$ – либо простое число, либо квадрат простого числа. Тогда G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу. В частности, группа G разрешима.*

Напомним, что конечная группа называется дисперсивной по Орэ, если любой её гомоморфный образ содержит нормальную силовскую подгруппу, относящуюся к наибольшему простому делителю порядка.

Теорема 2. *Пусть для любой не нормальной силовской подгруппы P конечной группы G выполнено следующее условие: если максимальная подгруппа M из G содержит $N_G(P)$, то $|G:M|$ – простое число. Тогда G сверхразрешима.*

Литература

1. Холл, М. Теория групп / Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. – 468 с.