УДК 535.51

О 4-СПИНОРАХ ДЖОНСА ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

О.В. Веко[1], **Е.М. Овсиюк**[1], **В.М. Редьков**[2]

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь*
[2]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск*

JONES 4-SPINORS FOR THE PARTIALLY POLARIZED LIGHT

O.V. Veko[1], **E.M. Ovsiyuk**[1], **V.M. Red'kov**[2]

[1]*I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University, Mozyr*
[2]*B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk*

Известное теоретико-групповое описание способов построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора позволяет ввести определение для 4-спиноров Джонса частично поляризованного света и связать этот объект с 4-вектором и 4-тензором Стокса для такого света. Это существенно обобщает известную в литературе ситуацию, когда используется только 2-мерный формализм Джонса, при этом он применяется только для описания полностью поляризованного света.

Ключевые слова: *поляризационная оптика, 4-спиноры Джонса, параметры Стокса.*

The known group-theory based description of constructing of 4-tensors based on the second rank 4-spinor permits to introduce definition for Jones 4-spinor of a partially polarized light and relates this object with Stokes 4-vector and Stokes antisymmetric 4-tensor. It provides us with extension of the known attitude to the problem when only Jones 2-spinors relevant to a completely polarized light are used.

Keywords: *polarization optics, Jones 4-spinors, Stokes parameters.*

Введение

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. В литературе большое внимание уделялось анализу возможных типов матриц Мюллера. В частности, теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [2]–[9]: были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В последние годы много внимания уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [10]–[12], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и др. были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе преобразований, изоморфной группе Лоренца [13]–[20]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, выполнен теоретико-групповой анализ степени неопределенности в нахождении матриц Мюллера оптического элемента из результатов одного поляризационного измерения, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

1 Постановка задачи

Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света. Следует обратить внимание и на то, что 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времениподобных 4-векторов в рамках специальной теории относительности. В настоящей работе известная теоретико-групповая задача о способах построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора переформулируется как задача о связи между

4-спинорным (типа Джонса) и тензорным (типа Стокса) описаниями поляризованного света. Релятивистские 4-спиноры Джонса являются обобщением нерелятивистких 2-мерных спиноров Джонса, которые обычно только и применяются в литературе. В данной работе мы рассматриваем частично поляризованный свет (предварительный анализ проблемы был частично выполнен в [15]).

Исходим из разложения биспинора второго ранга по тензорам (используем обозначения, принятые в [21]):

$$U = \Psi \otimes \Psi =$$

$$= \left(-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b\gamma^5\tilde{\Phi}_b \right) E^{-1}; \qquad (1.1)$$

для матриц Дирака будем использовать спинорный базис. Обратные к (1.1) соотношения имеют вид:

$$\Phi_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma_a U],$$

$$\tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma^5\gamma_a U],$$

$$\Phi = \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,[EU],$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[E\gamma^5 U],$$

$$\Phi^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[E\sigma^{mn}U].$$

Находим явный вид 4-вектора, 4-псевдовектора, двух скаляров:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\,(\xi^1\eta_{\dot{2}} - \xi^2\eta_{\dot{1}}),$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\,(\xi^1\eta_{\dot{1}} - \xi^2\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{2}\,(\xi^1\eta_{\dot{1}} + \xi^2\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{2}\,(\xi^1\eta_{\dot{2}} + \xi^2\eta_{\dot{1}}),$$

$$\tilde{\Phi}_a = 0, \quad \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0,$$

а также антисимметричного тензора:

$$\Phi^{01} = \frac{i}{4}(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2 + \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi^{23} = \frac{1}{4}(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2 - \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi^{02} = -\frac{1}{4}(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 + \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi^{31} = -\frac{1}{4i}\,(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2 - \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}}\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi^{03} = -\frac{i}{2}(\xi^1\xi^2 + \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}}),$$

$$\Phi^{12} = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^2 - \eta_{\dot{1}}\eta_{\dot{2}}).$$

В [15] было показано, что эта возможность пригодна для описания полностью поляризованного света, когда релятивистская длина 4-вектора Стокса равна нулю.

2 4-Спиноры Джонса для частично поляризованного света

Исследуем возможность построения тензоров из двух зарядово-сопряженных спиноров [21]:

$$\Psi \otimes \Psi^c = \begin{vmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} +\eta_{\dot{2}}^* \\ -\eta_{\dot{1}}^* \\ -\xi^{2*} \\ +\xi^{1*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} +D^* \\ -C^* \\ -B^* \\ +A^* \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} +AD^* & -AC^* & -AB^* & +AA^* \\ +BD^* & -BC^* & -BB^* & +BA^* \\ +CD^* & -CC^* & -CB^* & +CA^* \\ +DD^* & -DC^* & -DB^* & +DA^* \end{vmatrix}.$$

Для эквивалентного представлению $\Phi \otimes \Psi^c$ набора тензоров находим следующие явные выражения (знак тильды относится к псевдовеличинам):

– для скаляра и псевдо скаляра (чисто мнимых):

$$\Psi = -\frac{1}{4i}\,(AC^* + BD^* + CA^* + DB^*),$$

$$\tilde{\Psi} = -\frac{1}{4}\,(AC^* + BD^* - CA^* - DB^*);$$

– для (вещественного) 4-вектора и (мнимого) псевдо 4-вектора:

$$\Psi^0 = \frac{1}{4}\,(AA^* + BB^* + DD^* + CC^*),$$

$$\Psi^3 = \frac{1}{4}\,(AA^* - BB^* + DD^* - CC^*),$$

$$\Psi^1 = \frac{1}{4}\,(AB^* + BA^* - CD^* - DC^*),$$

$$\Psi^2 = -\frac{i}{4}\,(-AB^* + BA^* + CD^* - DC^*);$$

$$\tilde{\Psi}^0 = \frac{1}{4i}\,(AA^* + BB^* - DD^* - CC^*),$$

$$\tilde{\Psi}^3 = \frac{1}{4i}\,(AA^* - BB^* - DD^* + CC^*),$$

$$\tilde{\Psi}^1 = \frac{1}{4i}\,(AB^* + BA^* + CD^* + DC^*),$$

$$\tilde{\Psi}^2 = -\frac{1}{4}\,(-AB^* + BA^* - CD^* + DC^*);$$

– для (вещественного) антисимметричного тензора:

$$\Psi^{01} = \frac{i}{4}(AD^* + BC^* - CB^* - DA^*),$$

$$\Psi^{23} = \frac{1}{4}(AD^* + BC^* + CB^* + DA^*),$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{4}(AD^* - BC^* - CB^* + DA^*),$$

$$\Psi^{31} = \frac{i}{4}(AD^* - BC^* + CB^* - DA^*),$$

$$\Psi^{03} = -\frac{i}{4}(-AC^* + BD^* + CA^* - DB^*),$$

$$\Psi^{12} = -\frac{1}{4}(-AC^* + BD^* - CA^* + DB^*),$$

$$s_3 = \frac{i}{2}(AC^* - BD^*),$$
$$s_1 = \frac{i}{2}(AD^* + BC^*), \qquad (2.1)$$
$$s_2 = -\frac{1}{2}(AD^* - BC^*).$$

Легко получаем представление для инварианта 4-вектора Ψ^a:

$$\Phi^a \Phi_a = (AC^* + BD^*)\,(A^*C + B^*D) = \\ = +\,|\,AC^* + BD^*\,|^2 \geq 0.$$

С учетом $\Psi^0 > 0$ это означает, что 4-вектор Ψ^a может рассматриваться как четырехмерный вектор Стокса для частично поляризованного света [1].

Комплексный 3-вектор $\mathbf{s}$ из (2.1) является неизотропным:

$$\mathbf{s}^2 = -\frac{1}{4}(\xi^1\eta_1^* + \xi^2\eta_2^*)^2 = -\frac{1}{4}(AC^* + BD^*)^2 \neq 0.$$

Используя представление для (чисто мнимого) псевдо 4-вектора $\tilde{\Psi}^a$, находим инвариант

$$\tilde{\Psi}^a\tilde{\Psi}_a = \tilde{\Psi}_0^2 - \tilde{\Psi}_1^2 - \tilde{\Psi}_2^2 - \tilde{\Psi}_1^3 = \\ = \frac{1}{4}(AC^* + BD^*)(A^*C + B^*D) > 0,$$

т. е. инвариант вещественного 4-вектора $\tilde{\Psi}^a$ (мнимой части этого вектора) отрицательный, и такой вещественный 4-вектор $-i\tilde{\Psi}^a$ не может рассматриваться как стоксов.

Найдем явные выражения для двух скаляров, двух 4-векторов, а также антисимметричного тензора, который можно описать комплексным 3-вектором s_j, при использовании следующей параметризации 4-спинора:

$$\Psi = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,e^{i\alpha} \\ b\,e^{i\beta} \\ c\,e^{is} \\ d\,e^{it} \end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

Имеем

$$\Psi = \frac{i}{4}\Big(a\,e^{i\alpha}c\,e^{-is} + b\,e^{i\beta}d\,e^{-it} + \\ + c\,e^{is}a\,e^{-i\alpha} + d\,e^{it}b\,e^{-i\beta}\Big) = \\ = \frac{i}{2}[\,ac\cos(\alpha - s) + bd\cos(\beta - t)\,],$$

$$\tilde{\Psi} = -\frac{1}{4}\Big(a\,e^{i\alpha}c\,e^{-is} + b\,e^{i\beta}d\,e^{-it} - \\ - c\,e^{is}a\,e^{-i\alpha} - d\,e^{it}b\,e^{-i\beta}\Big) = \\ = -\frac{i}{2}[ac\sin(\alpha - s) + bd\sin(\beta - t)],$$

$$\Psi^0 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$
$$\Psi^3 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2),$$
$$\Psi^1 = \frac{1}{2}[ab\cos(\alpha - \beta) - cd\cos(s - t)],$$
$$\Psi^2 = \frac{1}{2}[ab\sin(\beta - \alpha) + cd\sin(s - t)],$$
$$\tilde{\Psi}^0 = \frac{1}{4i}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2),$$
$$\tilde{\Psi}^3 = \frac{1}{4i}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2),$$
$$\tilde{\Psi}^1 = \frac{1}{2i}[\,ab\cos(\alpha - \beta) + cd\cos(s - t)\,],$$
$$\tilde{\Psi}^2 = \frac{i}{2}[ab\sin(\alpha - \beta) + cd\sin(s - t)];$$

для (вещественного) антисимметричного тензора

$$\Psi^{01} = -\frac{1}{2}[ad\sin(\alpha - t) + bc\sin(\beta - s)],$$
$$\Psi^{23} = \frac{1}{2}[ad\cos(\alpha - t) + bc\cos(\beta - s)],$$
$$\Psi^{02} = -\frac{1}{2}[ad\cos(\alpha - t) - bc\cos(\beta - s)],$$
$$\Psi^{31} = -\frac{1}{2}[ad\sin(\alpha - t) - bc\sin(\beta - s)],$$
$$\Psi^{03} = \frac{1}{2}[-ac\sin(\alpha - s) + bd\sin(\beta - t)],$$
$$\Psi^{12} = -\frac{1}{2}[-ac\cos(\alpha - s) + bd\cos(\beta - t)].$$

Зависимость тензоров от параметров a, b, c, d, α, β, s, t можно пояснить следующим образом:

$$\Psi^a \quad ----> \quad a, b, c, d, \alpha - \beta, s - t;$$
$$\tilde{\Psi}^a \quad ----> \quad a, b, c, d, \alpha - \beta, s - t;$$
$$\Psi \quad ----> \quad a, b, c, d, \alpha - s, \beta - t;$$
$$\tilde{\Psi} \quad ----> \quad a, b, c, d, \alpha - s, \beta - t;$$
$$\Psi^{ab} \quad ----> \quad a, b, c, d, \alpha - t, \beta - s, \alpha - s, \beta - t.$$

Чтобы установить зависимость 2-мерных блоков от фазовых множителей, запишем в явном виде 4×4 -матрицу:

$$U = \Psi \otimes \Psi^c =$$

$$= \begin{vmatrix} ade^{i(\alpha - t)} & -ace^{i(\alpha - s)} & -abe^{i(\alpha - \beta)} & a^2 \\ bde^{i(\beta - t)} & -bce^{i(\beta - s)} & -b^2 & abe^{-i(\alpha - \beta)} \\ cde^{i(s - t)} & -c^2 & -bce^{-i(\beta - s)} & ace^{-i(\alpha - s)} \\ d^2 & -cde^{-i(s - t)} & -bde^{-i(\beta - t)} & ade^{-i(\alpha - t)} \end{vmatrix}.$$

Исходный 4-спинор (2.2)

$$\Psi = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,e^{i\alpha} \\ b\,e^{i\beta} \\ c\,e^{is} \\ d\,e^{it} \end{vmatrix}$$

можно представить следующим образом:

$$\Psi = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\, e^{i(\alpha-\beta)/2}\; e^{i(\alpha+\beta)/2} \\ b\, e^{-i(\alpha-\beta)/2}\; e^{i(\alpha+\beta)/2} \\ c\;\; e^{i(s-t)/2}\;\; e^{i(s+t)/2} \\ d\; e^{-i(s-t)/2}\; e^{i(s+t)/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ b\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ c\, e^{+i(s-t)/2} \\ d\, e^{-i(s-t)/2} \end{vmatrix}.$$

Введем 4-спинор $\Psi^{(0)}$, который однозначно определяет стоксов 4-вектор $S^a = \Psi^a$:

$$S^0 = \frac{1}{4}(a^2 + d^2 + b^2 + c^2),$$

$$S^3 = \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2),$$

$$S^1 = \frac{1}{2}[ab\cos(\alpha-\beta) - cd\cos(s-t)],$$

$$S^2 = \frac{1}{2}[-ab\sin(\alpha-\beta) + cd\sin(s-t)],$$

$$S^a S_a = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd\cos[(\alpha-\beta)-(s-t)],$$

$$(ac-bd)^2 < S^a S_a < (ac+bd)^2, \qquad (2.3)$$

$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix} a\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ b\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ c\;\; e^{+i(s-t)/2} \\ d\;\; e^{-i(s-t)/2} \end{vmatrix}.$$

Разложение

$$\Psi = \begin{vmatrix} e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} \end{vmatrix} \Psi^{(0)},$$

учитывая тождества

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \left(\frac{\alpha+\beta}{4} + \frac{s+t}{4}\right) + \left(\frac{\alpha+\beta}{4} - \frac{s+t}{4}\right) = \gamma + \Gamma,$$

$$\frac{s+t}{2} = \left(\frac{\alpha+\beta}{4} + \frac{s+t}{4}\right) - \left(\frac{\alpha+\beta}{4} - \frac{s+t}{4}\right) = \gamma - \Gamma,$$

можно представить в виде:

$$\Psi = e^{i\gamma} \begin{vmatrix} e^{i\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma} \end{vmatrix} \Psi^{(0)} =$$

$$= e^{\gamma}\, \exp(i\Gamma\gamma^5)\, \Psi^{(0)}.$$

Очевидно, что общий фазовый множитель $e^{i\gamma}$ никак не сказывается на величинах всех тензорных компонент, поскольку биспинор второго ранга равен $U = \Psi \otimes (-i\Gamma^2\Psi^*)$. Очевидно, также, что величина Γ никак не проявляет себя в выражениях компонент стоксова 4-вектора.

Отмечаем, что в 4-спинор $\Psi^{(0)}$ входит 6 независимых параметров, а 4-вектор Стокса содержит только 4 независимых параметра. Это означает, что 2 параметра в 4-спиноре $\Psi^{(0)}$ лишние – они не сказываются на величине стоксова 4-вектора.

В уравнениях (2.3) компоненты вектора Стокса связаны с 6 параметрами a, b, c, d, $(\alpha-\beta), (s-t)$. Первые два уравнения можно преобразовать в следующие:

$$2(S^0 + S^3) = a^2 + d^2 \quad \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{2(S^0 + S^3)}\,\cos x,$$

$$d = \sqrt{2(S^0 + S^3)}\,\sin x,$$

$$2(S^0 - S^3) = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{2(S^0 - S^3)}\,\cos y,$$

$$c = \sqrt{2(S^0 - S^3)}\,\sin y;$$

$x,\, y \in [0, \pi/2]$. Параметры x, y не задаются измеримыми величинами S_0, S_3, самый простой способ выбора частного решения выглядит как $(x = y = \pi/4)$:

$$a = \sqrt{S^0 + S^3}, \quad d = \sqrt{S^0 + S^3},$$

$$b = \sqrt{S^0 - S^3}, \quad c = \sqrt{S^0 - S^3}.$$

Два оставшихся уравнения из (2.3)

$$S^1 = \frac{1}{2}[ab\cos(\alpha-\beta) - cd\cos(s-t)],$$

$$S^2 = \frac{1}{2}[-ab\sin(\alpha-\beta) + cd\sin(s-t)]$$

при этом принимают вид:

$$\frac{S^1}{\sqrt{S_0^2 - S_3^2}} = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(s-t)}{2} =$$

$$= \sin\frac{(s-t)-(\alpha-\beta)}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)+(s-t)}{2},$$

$$\frac{S^2}{\sqrt{S_0^2 - S_3^2}} = \frac{-\sin(\alpha-\beta) + \sin(s-t)}{2} =$$

$$= \sin\frac{(s-t)-(\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)+(s-t)}{2};$$

отсюда получаем соотношения

$$\sin^2\frac{(s-t)-(\alpha-\beta)}{2} = \frac{S_1^2 + S_2^2}{S_0^2 - S_3^2},$$

$$\cos^2\frac{(s-t)-(\alpha-\beta)}{2} = \frac{S_0^2 - \mathbf{S}^2}{S_0^2 - S_3^2},$$

$$\frac{S^1}{S^2} = \tan\frac{(s-t)+(\alpha-\beta)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\sin^2\frac{(s-t)+(\alpha-\beta)}{2} = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2},$$

$$\cos^2\frac{(s-t)+(\alpha-\beta)}{2} = \frac{S_2^2}{S_1^2 + S_2^2},$$

где $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Зависимость 4-спинора $\Psi^{(0)}$ от физически неизмеряемых параметров x, y может быть описана с помощью разложения

$$\Psi^{(0)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} \cos x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin x \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \sqrt{2(S^0+S^3)}e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ \sqrt{2(S^0-S^3)}e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ \sqrt{2(S^0-S^3)}e^{+i(s-t)/2} \\ \sqrt{(S^0+S^3)}e^{-i(s-t)/2} \end{matrix}\right|.$$

Зависимость компонент 4-тензора Стокса от физически неизмеряемых параметров задается формулами

$$\Psi^{01} = -\frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\sin 2x \sin(\alpha-t) + $$
$$+(S^0-S^3)\sin 2y \sin(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{23} = \frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\sin 2x \cos(\alpha-t) + $$
$$+(S^0-S^3)\sin 2y \cos(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\sin 2x \cos(\alpha-t) - $$
$$-(S^0-S^3)\sin 2y \cos(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{31} = -\frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\sin 2x \sin(\alpha-t) - $$
$$-(S^0-S^3)\sin 2y \sin(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{03} = \sqrt{S_0^2-S_3^2}\,\big[-\cos x \sin y \sin(\alpha-s)$$
$$+\sin x \cos y \sin(\beta-t)\big],$$

$$\Psi^{12} = \sqrt{S_0^2-S_3^2}\,\big[\cos x \sin y \cos(\alpha-s) - $$
$$-\sin x \cos y \cos(\beta-t)\big].$$

При $x = y = \pi/4$ имеем существенно более простые выражения

$$\Psi^{01} = -\frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\sin(\alpha-t) + (S^0-S^3)\sin(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{23} = \frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\cos(\alpha-t) + (S^0-S^3)\cos(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\cos(\alpha-t) - (S^0-S^3)\cos(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{31} = -\frac{1}{2}\Big[(S^0+S^3)\sin(\alpha-t) - (S^0-S^3)\sin(\beta-s)\Big],$$

$$\Psi^{03} = \frac{1}{2}\sqrt{S_0^2-S_3^2}\,[-\sin(\alpha-s)+\sin(\beta-t)],$$

$$\Psi^{12} = \sqrt{S_0^2-S_3^2}\,[\cos(\alpha-s)-\cos(\beta-t)].$$

Заметим, что можно найти простые ограничения, связывающие тензорные величины:

$$S^{ab}S_b = -\tilde{\Psi}\,\Psi^a, \quad S^{ab}\tilde{\Psi}_b = -\tilde{\Psi}S^a.$$

Таким образом, известное теоретико-групповое описание способов построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора позволяет ввести определение для 4-спиноров Джонса для частично поляризованного света и связать этот объект с 4-вектором и 4-тензором Стокса для такого света. Обратим внимание еще раз на то, что в литературе используются, как правило, только 2-мерные спиноры Джонса, описывающие полностью поляризованный свет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снопко, В.Н.* Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.
2. *Lamekin, P.I.* Intrinsic polarization states of corner reflectors / P.I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. – P. 658–661.
3. *Ламекин, П.И.* Необходимые и достаточные условия недеполяризуемости оптических систем / П.И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81, вып. 1. – С. 164–168.
4. *Ламекин, П.И.* Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П.И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
5. *Lamekin, P.I.* Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88, № 5. – P. 737–742.
6. *Lamekin, P.I.* Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91, № 5. – P. 741–748.
7. *Lamekin, P.I.* Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P.I. Lamekin, Yu.V. Sivaev, K.G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
8. *Lamekin, P.I.* Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P.I. Lamekin // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
9. *Ламекин, П.И.* Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П.И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5 (8). – С. 128–132.
10. *Федоров, Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
11. *Березин, А.В.* Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
12. *Bogush, A.A.* On Unique Parametrization of the Linear Group and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

13. *Бикватерионы и матрицы Мюллера* / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.

14. *Богуш, А.А.* Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.

15. *Red'kov, V.M.* Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

16. *Овсиюк, Е.М.* Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілеўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1 (37). – С. 69–75.

17. *Редьков, В.М.* Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.

18. *Овсиюк, Е.М.* О нахождении параметров матриц Мюллера лоренцевского типа по результатам поляризационных измерений / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2012. – № 2 (40). – С. 59–71.

19. *Овсиюк, Е.М.* Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.

20. *Ovsiyuk, E.M.* Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. – 2013. – № 1.

21. *Редьков, В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 495 с.

Поступила в редакцию 12.11.12.