Проблемы физики, математики и техники, № 1 (14), 2013

ФИЗИКА

УДК 535.42+537.86.22

СКАЛЯРНЫЕ АСТИГМАТИЧЕСКИЕ *3D* СВЕТОВЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА-ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

KUMMER-GAUSSIAN SCALAR ASTIGMATIC THREE-DIMENSIONAL LIGHT BEAMS

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предложен формализм для описания параксиальных *3D* гауссовоподобных световых пучков Куммера-Гаусса с простым астигматизмом. Сформулированы условия их физической реализуемости. Найдены новые типы пучков Куммера-Гаусса. Такие пучки описываются произведением гауссиана на функции Куммера комплексного аргумента и целочисленного индекса *n*.

***Ключевые слова**: параксиальные пучки, пучки Эрмита-Гаусса, пучки Куммера-Гаусса, гауссовоподобные пучки.*

The formalism for the description of paraxial *3D* Gaussian-like light Kummer-Gaussian beams by a simple astigmatism is offered. Conditions of their physical realizability are formulated. New types of Kummer-Gaussian beams are found. Such beams are presented by Gaussian product on Kummer function of a complex argument and a nonnegative integer index *n*.

***Keywords**: paraxial beams, Hermite-Gaussian beams, Kummer-Gaussian beams, Gaussian-like beams.*

Введение

В настоящее время наблюдается всплеск интереса к поиску новых решений для оптических полей. Наибольший интерес представляют узконаправленные (пучковые) решения, реализуемые экспериментально [1]–[2]. Такие пучки часто можно считать параксиальными. К ним относятся гауссовы пучки [1]–[3], пучки Эрмита-Гаусса ($H-G$) [1]–[3] и многие другие [2]–[8]. Обычно для вывода таких пучков используют различные подходы, что затрудняет установление взаимосвязей между ними.

В работах [7], [8] нами был предложен унифицированный формализм, позволяющий вывести выражения для гауссовоподобных *2D* пучков разных типов и установить взаимосвязи между ними.

В настоящей работе этот формализм распространяется на *3D* астигматические гауссовоподобные пучки, описывается фундаментальная гауссова мода с простым астигматизмом. В разделе 2 получены уравнения для скалярных гауссовоподобных мод высших порядков. В разделе 3 выведены выражения для скалярных параксиальных *3D* пучков Куммера-Гаусса ($K-G$) с простым астигматизмом. Подробно обсуждаются условия физической реализуемости *2D* и *3D* пучков $K-G$ в разделе 4. Наиболее известные частные случаи пучков $K-G$ – стандартные (*standart*) $H-G$ ($sH-G$) пучки и элегантные (*elegant*) $H-G$ ($eH-G$) пучки кратко характеризуются в разделе 5. Наконец, в заключении сформулированы основные результаты и выводы настоящей работы.

1 Фундаментальная астигматическая гауссова мода

Для монохроматических волн вида $f(\mathbf{r},t)=f\exp(-i\omega t)$ скалярное параболическое уравнение, описывающие амплитуду f параксиальных световых пучков, имеет вид [1]

$$(\partial^2_{x,x}+\partial^2_{y,y}+2ik\partial_z)f=0, \qquad (1.1)$$

где $k=k_0 n$, $k_0=\omega/c$.

В работах [7], [8] мы ограничились изучением двумерных (*2D*) пучков, полагая $\partial_y f=0$. В настоящей работе использованный подход обобщается на *3D* световые пучки. Целесообразно перейти к безразмерным переменным

$$X=x/x_0,\quad Y=y/x_0,\quad Z=z/z_0. \qquad (1.2)$$

Здесь x_0 и $z=kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям *0X* и *0Y* соответственно. Теперь параболическое уравнение (1.1) приобретает простейшую форму

$$(\partial^2_{X,X}+\partial^2_{Y,Y}+4i\partial_Z)f=0. \qquad (1.3)$$

Фундаментальным решением последнего уравнения является гауссиан [1]

$$G(X,Y,Z)=\frac{1}{\sqrt{Q_X Q_Y}}exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X}+\frac{Y^2}{Q_Y}\right)\right), \qquad (1.4)$$

где Q_X и Q_Y – введенные безразмерные комплексные параметры пучка:

$$Q_{X,Y}=Z-Q_{0X,0Y}, \qquad (1.5)$$

причем $Q_{0X,0Y}=Q'_{0X,0Y}+iQ''_{0X,0Y}$. Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин. При $Q''_{OX} > 0$ и $Q''_{OY} > 0$ данное решение удовлетворяет физическим принципам: $G(X,Y,Z) \to 0$ при $X \to \pm\infty$, $Y \to \pm\infty$ и квадратично интегрируемо. Гауссиан $G(X,Y,Z)$ является [1] *3D* основной гауссовой модой с простым астигматизмом. Полное поле светового пучка при этом имеет вид $E = E_0 G \exp(kz - \omega t)$.

2 Гауссовоподобные моды высших порядков

Для нахождения более сложных решений параболического уравнения (1.3) (гауссовоподобных мод высших порядков) применим подстановку

$$f(X,Y,Z) = G(X,Y,Z) \cdot h(X,Y,Z). \qquad (2.1)$$

Здесь на некоторую функцию $h(X,Y,Z)$ накладывается гауссова функция $G(X,Y,Z)$. Поэтому пучки, описываемые функциями $f(X,Y,Z)$, будем называть *3D* гауссовоподобными астигматическими световыми пучками.

Новая функция $h(X,Y,Z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\partial^2_{X,X} + \partial^2_{Y,Y} + 4i\left(\frac{X}{Q_X}\partial_X + \frac{Y}{Q_Y}\partial_Y + \partial_Z\right)\right]h = 0. \qquad (2.2)$$

Для его решения выполним нелинейную замену переменных

$$X_1(X,Z) = X \cdot b_X(Z),$$
$$Y_1(X,Z) = Y \cdot b_Y(Z), \qquad (2.3)$$

где $b_X(Z)$, $b_V(Y)$ – некоторые функции от Z. Тогда функция $h(X_1,Y_1,Z)$ удовлетворяет уравнению

$$b_X^2\left(\partial^2_{X_1,X_1} - 2c_1 X_1 \partial_{X_1}\right)h + $$
$$+ b_Y^2\left(\partial^2_{Y_1,Y_1} - 2c_2 Y_1 \partial_{Y}\right)h + 4i\partial_Z h = 0, \qquad (2.4)$$

где $c_{1,2}$ соответственно равны

$$c_{1,2} = -\frac{i}{b^2_{X,Y}}\left(\frac{2}{Q_{X,Y}} + \frac{1}{b^2_{X,Y}} d_Z(b^2_{X,Y})\right). \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.4) при произвольных зависимостях $b_X(Q)$ и $b_Y(Q)$ не имеет известных аналитических решений. Оно решается, если множители c_1 и c_2 в (2.4) не зависят от Z и являются некоторыми комплексными константами. Интегрируя (2.5), находим $b_X(Z)$ и $b_Y(Z)$ при постоянных c_1 и c_2:

$$b^2_{X,Y}(Q) = \frac{is_{X,Y}}{Q_{X,Y}(Q_{X,Y} - c_{1,2}s_{X,Y})}. \qquad (2.6)$$

Здесь $s_{X,Y}$ – некоторые комплексные постоянные интегрирования.

Выполним разделение переменных в (2.4), полагая, что

$$h(X_1,Y_1,Z) = h_1(X_1) \cdot h_2(Y_1) \cdot h_3(Z). \qquad (2.7)$$

Теперь уравнение (2.4) сводится к трем уравнениям:

$$\frac{dh_3}{h_3} = -\frac{i}{2}(\nu_1 b_X^2 + \nu_2 b_Y^2)dZ; \qquad (2.8)$$

$$d^2_{X_1,X_1}h_1 - 2c_1 X_1 d_{X_1}h_1 + 2\nu_1 h_1 = 0; \qquad (2.9)$$

$$d^2_{Y_1,Y_1}h_2 - 2c_2 Y_1 d_{Y_1}h_2 + 2\nu_2 h_2 = 0, \qquad (2.10)$$

где ν_1 и ν_2 – постоянные разделения переменных, в общем случае комплексные.

Решения уравнений (2.8)–(2.10) описывают *3D* астигматические гауссовоподобные моды высших порядков и принципиально различаются при нулевых и ненулевых значениях комплексных параметров c_1 и c_2.

3 3D астигматические пучки Куммера-Гаусса

Если в уравнениях (2.9), (2.10) $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то, без ограничения общности, можно положить $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Целесообразно также обозначить $P_{0X,0Y} = Q_{0X,0Y}, +s_{X,Y}$ и ввести, наряду с Q_X и Q_Y, еще два комплексных безразмерных параметра пучка P_X и P_Y соотношениями

$$P_{X,Y} = Z - P_{0X,0Y}, \qquad (3.1)$$

где $P_{0X,0Y} = P'_{0X,0Y} + iP''_{0X,0Y}$.

При этом функции $b_{X,Y}(Z)$ принимают простую форму [7], [8]

$$b^2_{X,Y} = i\left(1/P_{X,Y} - 1/Q_{X,Y}\right).$$

Все параметры пучка Q_X, Q_Y, P_X, P_Y линейно зависят от Z. В итоге аргументы X_1 и Y_1 функций h_1 и h_2 в (2.9) и (2.10) зависят от поперечных координат X, Y и четырех комплексных параметров пучка Q_X, Q_Y, P_X, P_Y:

$$X_1^2 = i\left(1/P_X - 1/Q_X\right)X^2;$$
$$Y_1^2 = i\left(1/P_Y - 1/Q_Y\right)Y^2. \qquad (3.2)$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид:

$$h_3(Z) = \left(\frac{P_X}{Q_X}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \cdot \left(\frac{P_Y}{Q_Y}\right)^{\frac{\nu_2}{2}}. \qquad (3.3)$$

Общие решения уравнений (2.9) и (2.10) для амплитуд $h_1(X_1)$ и $h_2(Y_1)$ *3D* гауссовоподобного пучка можно выразить через одну конфлюэнтную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$ [11], которая эквивалентна функции Куммера M [9]–[11]:

$$h_1(X_1) = A_1 \cdot X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_1}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) +$$
$$+ B_1 \cdot M\left(-\frac{\nu_1}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right) \equiv h_1^o + h_1^e; \qquad (3.4)$$

$$h_2(Y_1) = A_2 \cdot Y_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_2}{2}, \frac{3}{2}, Y_1^2\right) +$$

$$+B_2 \cdot M\left(-\frac{\nu_2}{2}, \frac{1}{2}, Y_1^2\right) \equiv h_2^o + h_2^e, \qquad (3.5)$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 – некоторые произвольные постоянные. Индексы ^{o} и ^{e} отмечают соответственно четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций h^e и h^o относительно изменения знаков их аргументов.

Общее решение для амплитуды $f(X, Y, Z)$ *3D* скалярного гауссовоподобного пучка имеет вид

$$f(X,Y,Z) = \\ = G(X,Y,Z) \cdot h_1(X_1) \cdot h_2(Y_1) \cdot h_3(Z), \qquad (3.6)$$

где переменные X_1, Y_1 выражаются через X, Y согласно (3.2). Выражения (3.6) зависят от трех переменных (X, Y, Z) и шести комплексных параметров ($\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y}$). Они описывают шестипараметрическое семейство решений для амплитуд гауссовоподобных астигматических *3D* пучков. Зависимости функций $f(X,Y,Z)$ от поперечных координат X и Y характеризуются функциями Куммера и Гаусса, поэтому такие пучки, определяемые формулами (3.1)–(3.6), будем называть пучками $K – G$. Пучки $K – G$ представляют обобщение пучков $H – G$, описываемых функциями Эрмита с комплексным аргументом [2]–[8]. Заметим также, что *3D* скалярные решения для пучков $K – G$ можно построить как произведения соответствующих *2D* решений. При этом возможна любая комбинация четностей функций h_1 и h_2.

Итак, в общем случае, амплитуда скалярного *3D* астигматического пучка $K – G$ зависит от трех координат и шести свободных комплексных параметров.

4 Условия физической реализуемости 2D и 3D пучков Куммера-Гаусса

Мы выяснили, что при заданных значениях переменных и параметров всегда существуют два формальных решения для амплитуд *3D* рассматриваемых световых пучков $K – G$. Однако не все эти решения соответствуют физически реализуемым пучкам с переносимой конечной мощностью [1], [2].

В [7], [8] нами подробно исследованы условия квадратичной интегрируемости (*КИ*) для *2D* пучков $K – G$. Для удобства полученные результаты представим в таблице 4.1, проведем ее анализ и сформулируем основные выводы по условиям *КИ* для *2D* пучков *K-G*.

Чтобы *2D* гауссов пучок был физически реализуем, как отмечалось выше, достаточно одного простого ограничения $Q''_{0X} > 0$. Для *2D* пучков $K – G$, как видно из таблицы 4.1, условия их *КИ* более разнообразны.

Необходимые условия *КИ* для *2D* пучков $K – G$ – $Q''_{0X} > 0$ либо $R''_{0X} > 0$.

При произвольных значениях комплексных параметров ν_1, Q_{0X}, R_{0X} условия *КИ* для *2D* пучков $K – G$, вообще говоря, не выполняются. Однако при определенных ограничениях на свободные параметры возможно удовлетворить условиям *КИ* для обоих пучков, описываемых функциями f^o и f^e, либо только для одного из них.

Условия *КИ* для четных пучков (f^e) и для нечетных (f^o) одинаковы только для пучков с нецелым индексом ν_1.

Ограничений $Q''_{0X} > 0$ и $R''_{0X} > 0$ либо ограничений $Q''_{0X} > 0$, $R''_{0X} = 0$ и $\nu_1' > -1/2$ всегда достаточно для одновременной физической реализации *2D* пучков $K – G$ двух типов (f^o и f^e).

Если ν_1 – целое число, то условия *КИ* для четных и нечетных пучков, вообще говоря, различны.

При четном (нечетном) неотрицательном целочисленном индексе ν_1 пучки $K – G$, сопоставляемые функциям f^e (f^o), редуцируются к обобщенным (*general*) пучкам $H – G$ ($gH – G$). При этом возможны новые типы пучков $K – G$, которые отсутствуют в работах Бандреса [6] и Торре [12]. На такие пучки в таблице 4.1 даются ссылки с пометкой [a].

Остановимся на *2D* пучках $K – G$ с положительным целочисленным индексом ν_1. Пусть $Q''_{0X} > 0$. Тогда при $\nu_1 = 2m+1$, где $m = 0,1,2,...$ (пункты 1 и 2 в таблице 4.1), для пучков $K – G$ имеет место следующая ситуация. Нечетные пучки $K – G$ (f_1^o) редуцируются к пучкам $gH – G$. Последние при $P_X \to \infty$ переходят в в $eH – G$ пучки, а при $P''_{0X} = -Q''_{0X}$ – к обычным $sH – G$ пучкам. Четные же пучки $K – G$ (f_1^o) целочисленного индекса $\nu_1 = 2m+1$ при $P''_{0X} \geq 0$ физически реализуемы и являются новыми.

Аналогичные рассуждения справедливы и при $Q''_{0X} > 0$ и четных неотрицательных индексах $\nu_1 = 2m$.

В работах [7], [8] было отмечено, что любое решение f уравнений для пучков $K – G$ инвариантно относительно преобразований

$$Q_X \leftrightarrow P_X, \; \nu_1 \leftrightarrow (-\nu_1 - 1). \qquad (4.1)$$

Используя соотношения симметрии (4.1), находим, например, что условия *КИ* для пучков $K – G$, представленные под номерами 1 и 2 таблицы 4.1, переходят в условия *КИ* для пучков $K – G$, представленные под номерами 7 и 8 таблицы 4.1. В итоге преобразования (4.1) приводят к следующим взаимосвязям:

Таблица 4.1 – Возможные типы *2D* пучков $K-G$ и их условия физической реализуемости
([a] – новые типы пучков $K-G$)

№ п/п	Ограничения на параметры Q''_{0X}	Ограничения на параметры P''_{0X}	Ограничения на индекс ν_1 $(m=0,1,2,...)$	Типы пучков, описываемые функцией f_1^o	Типы пучков, описываемые функцией f_1^e	Число пучков
1	$Q''_{0X}>0$	$P''_{0X}<0$	$\nu_1=2m+1$	$gH-G$; $sH-G$; $eH-G$;	–	f_1^o
2		$P''_{0X}\geq 0$		$gH-G$; $eH-G$;	$K-G^a$	$f_1^o+f_1^e$
3	$Q''_{0X}<0$	$P''_{0X}>0$	$\nu_1=-2m-1$	–	$gH-G$; $sH-G$; $eH-G$;	f_1^e
4	$Q''_{0X}\geq 0$			$K-G^a$	$gH-G$; $eH-G$;	$f_1^o+f_1^e$
5	$Q''_{0X}>0$	$P''_{0X}<0$	$\nu_1=2m$	–	$gH-G$; $sH-G$; $eH-G$;	f_1^e
6		$P''_{0X}\geq 0$		$K-G^a$	$gH-G$; $eH-G$;	$f_1^o+f_1^e$
7	$Q''_{0X}<0$	$P''_{0X}>0$	$\nu_1=-2m-2$	$gH-G$; $sH-G$; $eH-G$;	–	f_1^o
8	$Q''_{0X}\geq 0$			$gH-G$; $eH-G$;	$K-G^a$	$f_1^o+f_1^e$
9	$Q''_{0X}>0$	$P''_{0X}>0$	ν_1 – произв.	$K-G$	$K-G$	$f_1^o+f_1^e$ f_1^o
10	$Q''_{0X}>0$	$P''_{0X}=0$	$\nu'_1>-1/2$	$K-G$	$K-G$	$f_1^o+f_1^e$
11	$Q''_{0X}=0$	$P''_{0X}>0$	$\nu'_1<-1/2$	$K-G$	$K-G$	$f_1^o+f_1^e$

$$(1,2)\leftrightarrow(7,8);\quad (3,4)\leftrightarrow(5,6);$$
$$(10)\leftrightarrow(11);\quad (9)\leftrightarrow(9). \qquad (4.2)$$

Отсюда следует, что возможны физически реализуемые пучки $K-G$, характеризуемые функциями f с отрицательным целочисленным индексом ν_1.

Амплитуду $f(X,Y,Z)$ общего *3D* скалярного гауссовоподобного пучка с простым астигматизмом можно представить как произведение соответствующих амплитуд *2D* пучков, т. е.

$$f(X,Y,Z)=f_1(X,Z)\cdot f_2(Y_1,Z). \qquad (4.3)$$

Мы характеризовали *2D* пучки $K-G$, распространяющиеся в плоскости *XZ* и описываемые функцией $f_1(X,Z)$. Такие рассуждения справедливы также для *2D* пучков $K-G$, распространяющихся в плоскости *YZ* и описываемых функцией $f_2(Y,Z)$. Поэтому для *2D* пучков $K-G$ в плоскостях *XZ* и *YZ* проявляются аналогичные закономерности, включая условия их физической реализуемости. Отсюда вытекает, что каждая из функций $f_{1,2}^o$, $f_{1,2}^e$ *3D* пучка $K-G$ должна быть ограничена независимо и обладать свойствами *КИ*, которые обсуждались нами выше.

Таким образом, при $c_1\neq 0$ и $c_2\neq 0$ исследуемые нами параксиальные *3D* гауссовоподобные световые пучки в общем случае являются пучками $K-G$, зависящими от двух комплексных аргументов X_1, Y_1 и шести комплексных параметров ν_1, ν_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y}.

Как функции $f_1(X,Z)$, так и функции $f_2(Y,Z)$ описывают соответствующие *2D* пучки $K-G$, которые в частных случаях могут редуцироваться к $gH-G$, $sH-G$ или $eH-G$ пучкам.

В итоге возможна реализация $3\times 3=9$ различных типов астигматических *3D* пучков $K-G$ с различными физическими свойствами в плоскостях *XZ* и *YZ*.

5 Стандартные и элегантные пучки Куммера-Гаусса

Рассмотрим далее некоторые частные случаи обобщенных *3D* пучков $K-G$ с комплексным аргументом. Пусть переменная X_1 будет вещественной при любых Z. Тогда параметр $P_X=Q_X^*$, откуда $P_{0X}''=-Q_{0X}''$ и поэтому

$$X_1=X\frac{\sqrt{2P_{0X}''}}{|Q_X|}=\frac{\sqrt{2}X}{W_X}. \qquad (5.1)$$

Здесь $W_X=\sqrt{1+(Z-Q'_{0X})^2/Q''^{\,2}_{0X}}=w_x/x_0$ – нормированный поперечный размер (радиус) пучка вдоль оси OX. Выражения для вещественных переменных Y_1 аналогичны.

Таким образом, при выполнении условий $P''_{OX} = -Q''_{OX}$, $P''_{OY} = -Q''_{OY}$ *3D* пучки Куммера-Гаусса редуцируются к *3D* астигматическим $sH-G$ пучкам с вещественным аргументом [1], которые можно представить в форме

$$f(X,Z) = \frac{1}{\sqrt{W_X W_Y}} \exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X} + \frac{Y^2}{Q_Y} \right) \right) \times \\ \times H(\nu_1, X_1) \cdot H(\nu_2, Y_1) \times \\ \times \exp\left(-i\Phi_{0X}\left(\nu_1 + 1/2\right)\right) \times \\ \times \exp\left(-i\Phi_{0Y}\left(\nu_2 + 1/2\right)\right), \tag{5.1}$$

где $\Phi_{0X,0Y} = \operatorname{arc\,tg}\left((Z - Q'_{0X,0Y}) / Q''_{0X,0Y}\right)$ – фазы Гуи для соответствующих *2D* пучков [1], а W_X и W_Y – соответствующие нормированные радиусы астигматического пучка. Чтобы $sH-G$ пучки были физически реализуемы, достаточно, чтобы ν_1 и ν_2 были целыми неотрицательными.

Заметим попутно, что все пучки $K-G$, кроме $sH-G$ пучков, – это волновые поля с изменяющейся пространственной геометрией. Распределение амплитуды такого пучка непрерывно изменяется по мере распространения его в пространстве.

При $P_{0X} \to \infty$, $P_{0Y} \to \infty$ пучки $K-G$ комплексного аргумента сводятся к элегантным пучкам $K-G$ ($eK-G$):

$$f(X,Y,Z) = \exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X} + \frac{Y^2}{Q_Y} \right) \right) \times \\ \times h_1\left(\nu_1, \frac{X}{\sqrt{iQ_X}} \right) \times \\ \times h_2\left(\nu_2, \frac{Y}{\sqrt{iQ_Y}} \right) Q_X^{-(\nu_1+1)/2} Q_Y^{-(\nu_2+1)/2}. \tag{5.3}$$

Если ν_1 и ν_2 – целые, то $eK-G$ редуцируются к $eH-G$ пучкам, впервые введенным Сигманом [4].

Заключение

В данной работе формализм для описания *2D* параксиальных световых пучков, предложенный ранее нами в [7], [8], был распространен на *3D* астигматические пучки $K-G$ с простым астигматизмом. Выявлены также взаимосвязи пучков $K-G$ с обобщенными, стандартными и элегантными пучками $H-G$.

Показано, что выражения, характеризующие *3D* астигматические пучки $K-G$, являются произведением функций, описывающих *2D* световые пучки $K-G$. Поэтому число свободных комплексных параметров для *3D* астигматических пучков $K-G$ по сравнению с *2D* пучками $K-G$ удваивается и равно шести.

Обсуждены ограничения на параметры, чтобы полученные решения соответствовали гауссовоподобным *3D* пучкам с конечной переносимой мощностью, или, как говорят, физически реализуемым. Условия физической реализуемости, сводящиеся с *КИ,* должны независимо выполняться для *2D* полей в двух взаимно перпендикулярных плоскостях *XOZ* и *YOZ*.

Найдено, что при целочисленных индексах ν_1, ν_2, наряду с известными решениями, описывающими пучки $H-G$ с комплексным аргументом, существуют также решения с теми же самыми индексами ν_1, ν_2, характеризующие новые *3D* пучки $K-G$ с целочисленными индексами ν_1, ν_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 142 с.

2. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев.– М. : Наука, 1990. – 264 с.

3. *Киселев, А.П.* Новые структуры параксиальных гауссовых пучков / А.П. Киселев // Опт. и спектр. – 2004. – Т. 96, № 4. – С. 533 – 535.

4. *Siegman, A.E.* Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9.– P. 1093–1094.

5. *Pratesi, R.* Generalized gaussian beams in free space / R. Pratesi, L. Ronchi // JOSA.– 1977.– Vol. 17, № 9. – P. 1274–1276.

6. *Bandres, M.A.* Cartesian beams / M.A. Bandres, J.C. Guttierres-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3450–3461.

7. *Гиргель, С.С.* Физические свойства скалярных *2D* пучков Куммера-Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19–23.

8. *Гиргель, С.С.* Свойства скалярных *2D* пучков Куммера-Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

9. *Лебедев, Н.Н.* Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев.– М. : ГИТТЛ, 1953. – 379 с.

10. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М. : Наука, 1979. – 830 с.

11. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке Ф. Эмде, Ф. Леш.– М. : Наука, 1977. – 342 с.

12. *Torre, A.* A note on the general solution of paraxial wave equation: a Lie algebra view / A. Torre // Journ. Opt. A. – 2008, Vol. 10, № 8. – P. 055006–055020.

Поступила в редакцию 07.12.12.