МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О ТЕОРЕМЕ ПОСТА-ГЛУСКИНА-ХОССУ

А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

ON POST-GLUSKIN-HOSSZU THEOREM

A.M. Gal'mak, G.N. Vorobiev

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

Теоремой Поста-Глускина-Хоссу мы называем теорему, которую обычно называют теоремой Глускина-Хоссу или теоремой Хоссу-Глускина. В формулировке этой теоремы присутствуют n-арная группа $< A, [\ ] >$ и некоторая бинарная группа $< A, \circ >$, имеющие общий носитель A. Э. Пост сформулировал и доказал эту теорему, рассматривая вместо группы $< A, \circ >$ ее изоморфную копию A_0 (associated group). На наш взгляд, отсутствие имени Э. Поста в названии указанной теоремы является досадным недоразумением, которое должно быть устранено. По-видимому, М. Хоссу не знал о результате Э. Поста. Отметим, что Л.М. Глускин, вообще, специально n-арными группами не занимался. Он изучал более широкий класс алгебраических систем – позиционные оперативы, для которых получил ряд важных результатов. Среди многочисленных следствий одного из таких результатов находится и теорема Поста-Глускина-Хоссу.

***Ключевые слова**: группа, n-арная группа, автоморфизм.*

Post-Gluskin-Hosszu theorem is known as Gluskin-Hosszu or Hosszu-Gluskin theorem. In the formulation of this theorem there is an n-ary group $< A, [\ ] >$ and some binary group $< A, \circ >$. These groups have a common carrier A. E. Post formulated and proved this theorem considering isomorphous copy of A_0 (associated group) instead of group $< A, \circ >$. In our opinion the absence of the name of E. Post in the title of the theorem is an embarrassing mistake which must be corrected. Apparently, M. Hosszu didn't know anything about the results of E. Post. It is necessary to note that L.M. Gluskin was not engaged in the study of n-ary groups. He investigated a large class of algebraic systems – positional operatives, and achieved a series of important results. Post-Gluskin-Hosszu theorem is among numerous consequences of these results.

***Keywords**: group, n-ary group, automorphism.*

Введение

Согласно В. Дёрнте [1], универсальная алгебра $< A, [\ ] >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $[\ ]: A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если операция $[\ ]$ ассоциативна, то есть в A для любого $i = 1, 2, ..., n - 1$ выполняются тождества ассоциативности

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = $$
$$= [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}],$$

и для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимы уравнения

$$[a_1 \ldots a_{i-1}x_ia_{i+1} \ldots a_n] = b.$$

Полагая в определении В. Дернте $n = 2$, получаем определение бинарной группы.

Распознавать n-арные группы в классе всех универсальных алгебр можно различными способами. Один из них, наиболее естественный, состоит в том, что вначале из всех универсальных алгебр выделяют универсальные алгебры с одной ассоциативной n-арной операцией. Затем применяют следующую теорему.

***Теорема* 0.1.** *Для универсальной алгебры* $< A, [\ ] >$ *с ассоциативной n-арной операцией* $[\ ]$ *следующие утверждения эквиваленты*:

1) $< A, [\ ] >$ – *n-арная группа*;

2) (**E. Post** [2], 1940) *для любых* $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ *в A разрешимы уравнения*

$$[xa_2 \ldots a_n] = b,\ [a_1 \ldots a_{n-1}y] = b;$$

3) (**E. Post** [2], 1940) *для любых* $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ *и некоторого* $i \in \{2, ..., n - 1\}$, *где* $n \geq 3$, *в A разрешимо уравнение*

$$[a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n] = b;$$

4) (**А.Н. Скиба, В.И. Тютин** [3], 1985) *для любых* $a, b \in A$ *в A разрешимы уравнения*

$$[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = b,\ [\underbrace{a \ldots a}_{n-1}y] = b;$$

5) (**А.Н. Скиба, В.И. Тютин** [3], 1985) *для любых* $a, b \in A$ *и некоторого* $i \in \{2, ..., n - 1\}$, *где* $n \geq 3$, *в A разрешимо уравнение*

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1}x\underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b;$$

6) (**А.М. Гальмак** [4], [5], 1991) *для любых* $a, b \in A$ *в A разрешимы уравнения*

$$[x_1 \ldots x_{n-1}a] = b,\ [ay_1 \ldots y_{n-1}] = b$$

с $n - 1$ *неизвестными*;

7) (**А.М. Гальмак** [4], [5], 1991) *для любых* $a, b \in A$ *в A разрешимо уравнение*

$$[ax_1 \ldots x_{n-2}a] = b$$

с $n - 2$ *неизвестными, где* $n \geq 3$.

Необходимые сведения из теории n-арных групп можно найти в книгах [5]–[7].

Теоремой Глускина-Хоссу или теоремой Хоссу-Глускина обычно называют следующую теорему.

***Теорема* 0.2 (Л.М. Глускин [8], M. Hosszu [9]).** *На всякой n-арной группе* $< A, [\ ] >$ *можно определить бинарную операцию* $\circ$, *отображение* β, *а также выбрать элемент* $d \in A$ *так, что* $< A, \circ >$ *– группа,* β *– ее автоморфизм, и выполняются следующие условия*:

$$[x_1x_2 \ldots x_n] =$$

$$= x_1 \circ x_2^{\beta} \circ \ldots \circ x_n^{\beta^{n-1}} \circ d, x_1, \ldots, x_n \in A; \quad (0.1)$$

$$d^{\beta} = d; \quad (0.2)$$

$$x^{\beta^{n-1}} = d \circ x \circ d^{-1},\ x \in A. \quad (0.3)$$

Верна и обратная теорема Глускина-Хоссу.

***Теорема* 0.3 (Л.М. Глускин [8], M. Hosszu [9]).** *Если элемент d группы* $< A, \circ >$ *и ее автоморфизм* β *удовлетворяют условиям* (0.2) *и* (0.3), *то* $< A, [\ ] >$ *– n-арная группа* с *n-арной операцией* (0.1).

Краткое и красивое доказательство теоремы 0.2 нашел Е.И. Соколов [10]. Он доказал эту теорему, полагая

$$x \circ y = [x \underbrace{a \ldots a}_{n-2} y],$$

$$\beta: x \to x^{\beta} = [\ \overline{a}\ x \underbrace{a \ldots a}_{n-2}\ ],$$

$$d = [\underbrace{\overline{a}\ \ldots\ \overline{a}}_{n}],$$

где $\overline{a}$ *– косой элемент* для *a*, то есть решение уравнения $[x \underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = a$.

Если в *n*-арной группе $< A, [\ ] >$ зафиксировать элемент $a \in A$, то в качестве операции $\circ$, отображения β и элемента *d* можно взять операцию

$$x \circ_a y = [xa_1 \ldots a_{n-2}y], \quad (0.4)$$

отображение

$$\beta = \beta_a: x \to [axa_1 \ldots a_{n-2}] \quad (0.5)$$

и элемент

$$d = d_a = [\underbrace{a\ \ldots\ a}_{n}], \quad (0.6)$$

где $a_1 \ldots a_{n-2}$ *– обратная последовательность* в *n*-арной группе $<$ A, [ ] $>$ для элемента *a*.

Теперь теорему 0.2 можно переформулировать следующим образом (см., например, [5]).

***Теорема* 0.4.** *В любой n-арной группе* $< A, [\ ] >$ *для любого* $a \in A$ *выполняются следующие условия:*

$$[x_1x_2 \ldots x_n] =$$

$$= x_1 \circ_a x_2^{\beta_a} \circ_a \ldots \circ_a x_n^{\beta_a^{n-1}} \circ_a d_a,\ x_1, \ldots, x_n \in A; \quad (0.7)$$

$$d_a^{\beta_a} = d_a; \quad (0.8)$$

$$x^{\beta_a^{n-1}} = d_a \circ_a x \circ_a d_a^{-1},\ x \in A, \quad (0.9)$$

где $< A, \circ_a >$ *– группа,* β_a *– её автоморфизм.*

При определении операции $\circ_a$ и отображения β_a в качестве обратной последовательности $a_1 \ldots a_{n-2}$ можно взять любую из последовательностей

$$\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i-2},\ i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

в частности, одну из последовательностей

$$\underbrace{a \ldots a}_{n-3}\ \overline{a},\ \ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-3}.$$

***Замечание* 0.1.** Единицей группы $< A, \circ_a >$ является элемент *a*. Так как

$$d_a \circ_a \overline{a} = [[\underbrace{a\ \ldots\ a}_{n}]\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-3}\ \overline{a}] = a,$$

то $d_a^{-1} = \overline{a}$ – обратный элемент в группе $< A, \circ_a >$ для элемента d_a.

Если в (0.4)–(0.6) элемент *a* заменить элементом $\overline{a}$, то получится конструкция Е.И. Соколова.

Согласно Э. Посту [2], группа *G* называется *обертывающей* для *n*-арной группы $< A, [\ ] >$, если множество *A* порождает группу *G*, а *n*-арная операция [ ] связана с бинарной операцией в группе *G* равенством:

$$[x_1x_2 \ldots x_n] = x_1x_2 \ldots x_n,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n \in A.$$

Последнее равенство означает, что *n*-арная операция [ ] совпадает на множестве *A* с *n*-арной операцией, производной от операции в группе *G*. Для краткости будем говорить, что *n*-арная операция [ ] является *производной* от операции в группе *G*. Подмножество

$$A_0 = \{x_1x_2 \ldots x_{n-1} \mid x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A\} \subseteq G$$

является нормальной подгруппой группы *G* [2] и называется *соответствующей группой* [6] (*associated group* [2]) для *n*-арной группы $< A, [\ ] >$.

Если зафиксировать элемент $a \in A$, то несложно убедиться [2] в том, что

$$A_0 = Aa^{-1} = \{xa^{-1} | x \in A\},$$

где символ a^{-1} обозначает обратный элемент в группе *G* к элементу *a*. Сам элемент a^{-1} может быть представлен в группе *G* в виде произведения

$$a^{-1} = a_1a_2 \ldots a_{n-2},\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \in A,$$

где $a_1 \ldots a_{n-2}$ – любая обратная последовательность в *n*-арной группе $< A, [\ ] >$ для элемента *a*.

Отображение

$$\varphi_a: u \to ua,\ u \in A_0$$

является изоморфизмом группы A_0 на группу $< A, \circ_a >$, а отображение

$$\psi_a: x \to xa^{-1}, x \in A$$

является изоморфизмом группы $< A, \circ_a >$ на группу A_0. Отсюда, в частности, следует, что для любых $a, b \in A$ группы $< A, \circ_a >$ и $< A, \circ_b >$ изоморфны. Например, изоморфизм $< A, \circ_a >$ на $< A, \circ_b >$ осуществляется по правилу

$$\tau = \psi_a\varphi_b: x \to xa^{-1}b = [xa_1 \ldots a_{n-2}b], x \in A.$$

Ясно, что φ_a и ψ_a – взаимно обратные отображения.

***Замечание* 0.2.** Так как равенства

$$[\underbrace{a\ \ldots\ a}_{n-1}\overline{a}] = a, \quad a^{n-1}\overline{a} = a$$

равносильны, то $\overline{a} = (a^{-1})^{n-2}$, где a^{-1} – обратный элемент к элементу a в группе G.

Приведем оригинальную формулировку результата Э. Поста.

Теорема 0.5 (**E. Post** [2], с. 245). *Given any abstract* 2*-group* G_0 *to serve as associated group, an abstract element* s_0 *subject to the condition* $s_0^{m-1} = t_0$, t_0 *in* G_0, *and any automorphism* T *of* G_0, *which carries* t_0 *into itself, and whose* $(m-1)$*-st power is the automorphism of* G_0 *under* t_0, *to serve as the automorphism of* G_0 *under* s_0, *then there is one and only one corresponding abstract* m*-group* G; *conversely every* m*-group can be thus determined.*

При доказательстве прямого утверждения теоремы 0.5 [2, с. 246] (Э. Пост называет его первой частью) для любых элементов

$$s_{i_j} = t_{i_j} s_0,\ t_{i_j} \in G_0,\ j = 1, \ldots, m$$

из смежного класса $G = G_0 s_0$ вначале определяется элемент

$$c(s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}) = t_{i_1} s_0 t_{i_2} s_0 \ldots t_{i_m} s_0.$$

Затем доказывается равенство

$$c(s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}) = (t_{i_1} \cdot T^{-1} t_{i_2} \ldots T^{-(m-1)} t_{i_m} \cdot t_0) s_0, \quad (0.10)$$

где T – автоморфизм из условия теоремы 0.5, действующий по правилу

$$T : Tt \to s_0^{-1} t s_0,\ t \in G_0,$$

а символом $T^{-(j-1)} t_{i_j}$ обозначается образ элемента t_{i_j} при действии отображения $T^{-(j-1)}$. После этого устанавливается, что смежный класс $G = G_0 s_0$ является m-арной группой относительно m-арной операции c.

Если для обозначения образа элемента t при отображении T^{-1} вместо символа $T^{-1} t$ использовать символ $t^{T^{-1}}$ и положить $T^{-1} = \beta$, то равенство Э. Поста (0.10) примет вид

$$c(s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}) = (t_{i_1} t_{i_2}^{\beta} \ldots t_{i_m}^{\beta^{m-1}}\ t_0) s_0. \quad (0.11)$$

Равенство (0.11) отличается от равенств (0.1) и (0.7) только обозначениями и множителем s_0, с помощью которого осуществляется переход от элемента $t_{i_1} t_{i_2}^{\beta} \ldots t_{i_m}^{\beta^{m-1}}\ t_0$ множества G_0 к элементу $c(s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m})$ множества $G = G_0 s_0$.

В следующих разделах мы подробно рассмотрим прямое и обратное утверждения теоремы 0.5 и покажем эквивалентность равенств из теоремы 0.4 соответствующим равенствам из теоремы 0.5.

1 Обратное утверждение теоремы 0.5

Для доказательства обратного утверждения теоремы 0.5 (Э. Пост называл его второй частью) нам понадобится следующая

***Лемма* 1.1**. *Пусть* $< A, [\ ] >$ *–* n*-арная группа,* G *и* A_0 *– ее обертывающая и соответствующая группы,* a *– фиксированный элемент из* A,

$$\gamma : u \to aua^{-1},\ u \in G,$$

$$d_i = a^i,\ i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда:

1) *сужение* γ *на* A *является автоморфизмом* n*-арной группы* $< A, [\ ] >$;

2) *сужение* γ *на* A_0 *является автоморфизмом группы* A_0;

3) *отображение* γ *оставляет неподвижным элемент* d_i *для любого* $i = 1, 2, \ldots$;

4) i*-ая степень автоморфизма* γ *действует на* G *как внутренний автоморфизм, определяемый элементом* d_i, *то есть*

$$u^{\gamma^i} = d_i u d_i^{-1},\ u \in G.$$

Доказательство. 1) Так как γ – внутренний автоморфизм группы G, A_0 – нормальная подгруппа в G, то сужение γ на A_0 является автоморфизмом группы A_0.

2) Ясно, что сужение γ на A является биекцией. А так как

$$[x_1 x_2 \ldots x_n]^{\gamma} = a(x_1 x_2 \ldots x_n)a^{-1} =$$
$$= (ax_1a^{-1})(ax_2a^{-1}) \ldots (ax_na^{-1}) = [x_1^{\gamma} x_2^{\gamma} \ldots x_n^{\gamma}]$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, то γ – автоморфизм n-арной группы $< A, [\ ] >$.

3) Так как $d_i^{\gamma} = a(a^i)a^{-1} = a^i = d_i$, то $d_i^{\gamma} = d_i$.

4) Так как $u^{\gamma^i} = a^i u (a^{-1})^i = a^i u (a^i)^{-1} = d_i u d_i^{-1}$, то $u^{\gamma^i} = d_i u d_i^{-1}$. Лемма доказана.

Если в теореме 0.5 словесные формулировки записать в виде формул, то обратное утверждение этой теоремы может принять следующий вид.

***Теорема* 1.1** (**E. Post** [2]). *Пусть* $< A, [\ ] >$ *–* n*-арная группа,* G *и* A_0 *– ее обертывающая и соответствующая группы,* a *– фиксированный элемент из* A,

$$b = a^{n-1} \in A_0, \quad (1.1)$$

γ *– сужение на* A_0 *автоморфизма* γ *из леммы* 1.1, *то есть*

$$u^{\gamma} = aua^{-1},\ u \in A_0. \quad (1.2)$$

Тогда γ *является автоморфизмом группы* A_0, *и для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $u \in A_0$ *выполняются следующие условия*:

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_2^{\gamma^{n-1}} ba, \quad (1.3)$$

где $u_i = x_i a^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$$b^{\gamma} = b; \quad (1.4)$$

$$u^{\gamma^{n-1}} = bub^{-1}. \quad (1.5)$$

Доказательство. То, что γ – автоморфизм группы A_0, доказано в 1) леммы 1.1.

Так как

$$u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} ba =$$
$$=(xa^{-1})a(x_2a^{-1})a^{-1}aa(x_3a^{-1})a^{-1}a^{-1} \ldots$$
$$\ldots a^{n-2}(x_{n-1}a^{-1}) \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{n-2} \underbrace{a \ldots a}_{n-1} (x_n a^{-1}) \underbrace{a^{-1} \ldots a^{-1}}_{n-1} a^{n-1} a =$$
$$= x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n = [x_1 x_2 \ldots x_n],$$

то верно (1.3).

Полагая в 3) леммы 1.1 $b = d_{n-1}$, получим (1.4).

Полагая в 4) леммы 1.1 $i = n - 1$, $b = d_{n-1}$, получим (1.5). Теорема доказана.

Пусть $< A, [\ ] >$, G, A_0, a, b и γ – те же, что и в теореме 1.1. Во введении отмечалось, что обратный элемент a^{-1} в группе G совпадает с произведением элементов $a_1a_2 \dots a_{n-2}$, где $a_1 \dots a_{n-2}$ – обратная последовательность для элемента a в n-арной группе $< A, [\ ] >$. Поэтому, учитывая, что n-арная операция [ ] является производной от операции в группе G, равенства (0.4)–(0.6) могут быть переписаны следующим образом:

$$x \circ_a y = xa^{-1}y, \tag{1.6}$$

$$\beta_a\colon x \to axa^{-1} \tag{1.7}$$

$$d_a = a^n, \tag{1.8}$$

где в правых частях записанных равенств присутствует произведение элементов в группе G.

Покажем, что из равенств (1.3), (1.4) и (1.5) теоремы 1.1 следуют соответственно равенства (0.7), (0.8) и (0.9) теоремы 0.4.

Отображение γ, являясь внутренним автоморфизмом группы G, определяемым элементом a, оставляет на месте элементы a и a^{-1}, то есть $a^\gamma = a$, $(a^{-1})^\gamma = a^{-1}$. Кроме того, как уже отмечалось, элемент a^{-1} совпадает с произведением элементов $a_1a_2 \dots a_{n-2}$, где $a_1 \dots a_{n-2}$ – обратная последовательность для элемента a в n-арной группе $< A, [\ ] >$. Будем использовать также равенства (1.6) и (1.8), а также тот факт, что γ – автоморфизм группы G. Тогда из (1.3) последовательно получаем цепочку равенств

$$[x_1x_2 \dots x_n] = (x_1a^{-1})(x_2a^{-1})^\gamma \dots (x_na^{-1})^{\gamma^{n-1}} a^{n-1}a,$$

$$[x_1x_2 \dots x_n] = (x_1a^{-1})\, x_2^\gamma (a^{-1})^\gamma \dots x_n^{\gamma^{n-1}} (a^{-1})^{\gamma^{n-1}} a^n,$$

$$[x_1x_2 \dots x_n] = x_1a^{-1}\, x_2^\gamma a^{-1} \dots x_n^{\gamma^{n-1}} a^{-1} a^n,$$

$$[x_1x_2 \dots x_n] = x_1 \circ_a x_2^\gamma \circ_a \dots \circ_a x_n^{\gamma^{n-1}} \circ_a d_a.$$

Ввиду (1.7), сужение отображения γ на A совпадает с отображением β_a. Поэтому, заменяя в последнем равенстве γ на β_a, получим равенство (0.7). Таким образом, из (1.3) следует (0.7).

Из (1.4) последовательно получаем

$$b^\gamma a = ba,\ b^\gamma a^\gamma = ba,$$

$$(ba)^\gamma = ba,\ (a^{n-1}a)^\gamma = a^{n-1}a,\ (a^n)^\gamma = a^n,$$

откуда, из (1.8) и из отмеченного выше совпадения на множестве A отображений γ и β_a вытекает справедливость равенства (0.8). Таким образом, из (1.4) следует (0.8).

Аналогично, из (1.5) для $u = xa^{-1}$ последовательно получаем

$$(xa^{-1})^{\gamma^{n-1}} = a^{n-1}xa^{-1}(a^{-1})^{n-1},$$

$$x^{\gamma^{n-1}} (a^{-1})^{\gamma^{n-1}} = a^na^{-1}xa^{-1}(a^{-1})^{n-1},$$

$$x^{\gamma^{n-1}} a^{-1} = a^na^{-1}xa^{-1}(a^{-1})^{n-1},$$

$$x^{\gamma^{n-1}} = a^n \circ_a x \circ_a (a^{-1})^{n-2}.$$

Так как, ввиду замечаний 0.1 и 0.2, $(a^{-1})^{n-2} = d_a^{-1}$, то из последнего равенства и совпадения на множестве A отображений γ и β_a вытекает справедливость равенства (0.9). Таким образом, из (1.5) следует (0.9).

Теперь мы можем утверждать, что теорема 0.2 является следствием теоремы 1.1. На самом деле обе эти теоремы являются эквивалентными утверждениями, так как, проведя все рассуждения в обратном порядке, можно убедиться в том, что теорема 1.1 является следствием теоремы 0.2.

2 Прямое утверждение теоремы 0.5

Если в теореме 0.5 словесные формулировки записать в виде формул, то прямое утверждение этой теоремы может принять следующий вид.

***Теорема* 2.1** (**E. Post** [2]). *Пусть в группе G имеются подгруппа A_0 и элемент a такие, что верно* (1.1)*; пусть также подгруппа A_0 обладает таким автоморфизмом γ, что верны* (1.2), (1.4) и (1.5). *Тогда смежный класс $A = A_0a$ является n-арной группой с n-арной операцией* [ ], *производной от операции в группе G, и верно* (1.3); *кроме того, множество A_0 может быть представлено в виде*

$$A_0 = \{x_1x_2 \dots x_{n-1} \mid x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A\}. \tag{2.1}$$

Мы докажем более общую версию теоремы 0.5.

***Теорема* 2.2** (**E. Post** [2]). *Пусть в группе G имеются подгруппа A_0 и элемент a такие, что верно* (1.1)*; пусть также подгруппа A_0 обладает таким автоморфизмом γ, что верны* (1.4) *и* (1.5). *Тогда $< A = A_0a, [\ ] >$ – n-арная группа с n-арной операцией* (1.3). *Если действие автоморфизма γ определяется правилом* (1.2), *то n-арная операция* [ ] *является производной от операции в группе G; кроме того, множество A_0 может быть представлено в виде* (2.1).

Доказательство. Сразу же отметим, что из равенства $A = A_0a$ вытекает $a \in A$, $A_0 = Aa^{-1}$. Тогда для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ имеем

$$u_1 = x_1a^{-1},\ u_2 = x_2a^{-1},\ \dots,\ u_n = x_na^{-1} \in A_0.$$

Так как A_0 – группа, γ – ее автоморфизм, то

$$u_1u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} b \in A_0,$$

откуда следует $u_1u_2^\gamma \dots u_n^{\gamma^{n-1}} ba \in A.$ Так как n-арная операция [ ] определяется равенством (1.3), то $[x_1x_2 \dots x_n] \in A$. Следовательно, множество A замкнуто относительно n-арной операции [ ].

Используя (1.3), (1.4) и (1.5), будем иметь для любого $i = 0, 1, \dots, n - 1$

$$[x_i \dots x_{\mathrm{i}}[x_{i+1} \dots x_{i+n}]x_{i+n+1} \dots x_{2n-1}] =$$

$$= u_1u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} ([x_{i+1} \dots x_{i+n}]a^{-1})^{\gamma^i} u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$

$$= u_1u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} (u_{i+1}u_{i+2}^\gamma \dots u_{i+n}^{\gamma^{n-1}} baa^{-1})^{\gamma^i} u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$

$$= u_1u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} (u_{i+1}u_{i+2}^\gamma \dots u_{i+n}^{\gamma^{n-1}} b)^{\gamma^i} u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$

$$= u_1u_2^\gamma \dots u_i^{\gamma^{i-1}} (u_{i+1}^{\gamma^i}u_{i+2}^{\gamma^{i+1}} \dots u_n^{\gamma^{n-1}} u_{n+1}^{\gamma^n} \dots$$

$$\dots u_{i+n}^{\gamma^{n-1+i}} b^{\gamma^i})u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \dots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$

$$= u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} (u_{n+1}^{\gamma} \ldots u_{i+n}^{\gamma^i})^{\gamma^{n-1}} b u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \ldots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$
$$= u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} (b u_{n+1}^{\gamma} \ldots u_{i+n}^{\gamma^i} b^{-1}) b u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \ldots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$
$$= u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} b u_{n+1}^{\gamma} \ldots u_{i+n}^{\gamma^i} u_{i+n+1}^{\gamma^{i+1}} \ldots a_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba =$$
$$= u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} b u_{n+1}^{\gamma} \ldots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba,$$

то есть

$$[x_1 \ldots x_i[x_{i+1} \ldots x_{i+n}]x_{i+n+1} \ldots x_{2n-1}] =$$
$$= u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} b u_{n+1}^{\gamma} \ldots u_{2n-1}^{\gamma^{n-1}} ba.$$

Следовательно,

$$[x_1 \ldots x_i[x_{i+1} \ldots x_{i+n}]x_{i+n+1} \ldots x_{2n-1}] =$$
$$= [x_1 \ldots x_j[x_{j+1} \ldots x_{j+n}]x_{j+n+1} \ldots x_{2n-1}]$$

для любых $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, что означает ассоциативность n-арной операции [ ].

Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и любых $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n, h \in A$ рассмотрим в $< A, [\ ] >$ уравнение

$$[g_1 \ldots g_{i-1} t g_{i+1} \ldots g_n] = h. \qquad (2.2)$$

Так как

$$g_1 = u_1 a, \ldots, g_{i-1} = u_{i-1} a,$$
$$g_{i+1} = u_{i+1} a, \ldots, g_n = u_n a, h = wa,$$

для некоторых $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n, w \in A_0$, и, кроме того, γ – автоморфизм группы A_0, то

$$u_2^{\gamma}, \ldots, u_{i-1}^{\gamma^{i-2}}, u_{i+1}^{\gamma^i}, \ldots, u_n^{\gamma^{n-1}} \in A_0.$$

В группе A_0 разрешимо уравнение

$$u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} s\, u_{i+1}^{\gamma^i} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} b = w,$$

то есть существует $v \in A_0$ такой, что

$$u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} v u_{i+1}^{\gamma^i} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} b = w.$$

Обозначив через δ автоморфизм, обратный для автоморфизма γ, и положив $u_i = v^{\delta^{i-1}}$, последнее равенство можно переписать в виде

$$u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^{\gamma^i} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} b = w,$$

откуда

$$u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^{\gamma^i} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} ba = wa,$$

то есть

$$u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^{\gamma^i} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} ba = h.$$

Из последнего равенства, полагая $g_i = u_i a$ и учитывая (1.3), получим

$$[g_1\, g_2 \ldots g_{i-1} g_i\, g_{i+1} \ldots g_n] =$$
$$= u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_{i-1}^{\gamma^{i-2}} u_i^{\gamma^{i-1}} u_{i+1}^{\gamma^i} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} ba = h.$$

Следовательно, g_i – решение уравнения (2.2). Таким образом, согласно определению В. Дернте, $< A, [\ ] >$ – n-арная группа.

Используя (1.2) и (1.3), получим

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = u_1 u_2^{\gamma} \ldots u_n^{\gamma^{n-1}} ba =$$
$$= x_1 a^{-1}(a x_2 a^{-1} a^{-1})(a^2 x_3 a^{-1} a^{-2}) \ldots$$
$$\ldots (a^{n-2} x_{n-1} a^{-1} a^{-(n-2)})(a^{n-1} x_n a^{-1} a^{-(n-1)}) a^{n-1} a =$$
$$= x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n,$$

то есть

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Следовательно, n-арная операция [ ] является производной от операции в группе G.

Используя этот факт, а также замкнутость множества A относительно n-арной операции [ ], получим

$$x_1 \ldots x_{n-1} a = [x_1 \ldots x_{n-1} a] \in A$$

для любых $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$, откуда и из равенства $A_0 = Aa^{-1}$ следует

$$x_1 \ldots x_n = [x_1 \ldots x_n a] a^{-1} \in Aa^{-1} = A_0.$$

Следовательно,

$$\{x_1 \ldots x_{n-1} \mid x_1, \ldots, x_{n-1} \in A\} \subseteq A_0.$$

Так как $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, то существуют $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$ такие, что

$$[aaa_1 \ldots a_{n-2}] = a,$$

откуда и из производности n-арной операции [ ] от операции в группе G, вытекает

$$aaa_1 \ldots a_{n-2} = a.$$

Из последнего равенства следует

$$a^{-1} = a_1 \ldots a_{n-2}.$$

А так как $A_0 = Aa^{-1}$, то

$$A_0 = Aa_1 \ldots a_{n-2} \subseteq \{x_1 \ldots x_{n-1} \mid x_1, \ldots, x_{n-1} \in A\}.$$

Из доказанных включений следует равенство (2.1). Теорема доказана.

***Замечание* 2.1.** Так как n-арная операция [ ] n-арной группы $< A = A_0 a, [\ ] >$ из теорем 2.1 и 2.2 является производной от операции в группе G, то подгруппа группы G, порожденная смежным классом $A = A_0 a$, является обертывающей группой для n-арной группы $< A = A_0 a, [\ ] >$. Если непосредственно в условия теорем 2.1 и 2.2 включить требование, чтобы группа G порождалась смежным классом $A = A_0 a$, то получим еще две версии прямого утверждения теоремы 0.5.

***Теорема* 2.3 (E. Post** [2]). *Пусть в группе G имеются подгруппа A_0 и элемент a такие, что группа G порождается смежным классом $A = A_0 a$ и верно* (1.1); *пусть также подгруппа A_0 обладает таким автоморфизмом γ, что верны* (1.2), (1.4) и (1.5). *Тогда $< A = A_0 a, [\ ] >$ – n-арная группа с n-арной операцией, которая определяется с помощью* (1.3); *обертывающей группой для этой n-арной группы является группа G, а соответствующей группой – ее подгруппа A_0.*

***Теорема* 2.4 (E. Post** [2]). *Пусть в группе G имеются подгруппа A_0 и элемент a такие, что группа G порождается смежным классом $A = A_0 a$ и верно* (1.1); *пусть также подгруппа A_0 обладает таким автоморфизмом γ, что верны* (1.4) *и* (1.5). *Тогда $< A = A_0 a, [\ ] >$ – n-арная группа с n-арной операцией, которая определяется с помощью* (1.3). *Если действие автоморфизма γ определяется правилом* (1.2), *то обертывающей группой для этой n-арной группы является группа G, а соответствующей группой – ее подгруппа A_0.*

Проведенный выше сравнительный анализ теоремы Глускина-Хоссу и соответствующего результата Э. Поста (теорема 0.5) показывает, что речь идет не просто об эквивалентных утверждениях, а фактически об одном и том же результате. Небольшие отличия, существующие между сравниваемыми результатами, объясняются тем, что Э. Пост в своей теореме использовал группу A_0, а в теореме Глускина-Хоссу фигурирует некоторая изоморфная копия этой группы, например, группа $< A, \circ_a >$, как в теореме 0.4. Замена группы A_0 ее изоморфной копией приводит к тому, что в теореме Глускина-Хоссу, в отличие от теоремы Поста, в равенстве, устанавливающем связь между n-арной и бинарной операциями, отсутствует множитель, с помощью которого определяется изоморфизм указанных групп.

Таким образом, по нашему мнению, включение в название теоремы Глускина-Хоссу фамилии Э. Поста не должно вызывать возражений, так как является обоснованным и восстанавливает историческую справедливость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dörnte, W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

2. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

3. *Тютин, В.И.* К аксиоматике n-арных групп / В.И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

4. *Гальмак, А.М.* Об определении n-арной группы / А.М. Гальмак // Междунар. конф. по алгебре. – Тез. докл. – Новосибирск, 1991. – С. 30.

5. *Гальмак, А.М.* n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.

6. *Русаков, С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. *Гальмак, А.М.* n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. Центр БГУ, 2007. – 323 с.

8. *Глускин, Л.М.* Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат.сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 444–472.

9. Hosszu, M. On the explicit form of n-group operations / M. Hosszu // Publ. Math. – 1963. – Vol. 10, № 1–4. – P. 88–92.

10. Соколов, Е.И. О теореме Глускина-Хоссу для n-групп Дёрнте / Е.И. Соколов // Мат. исследования. – Вып. 39. – С. 187–189.

Поступила в редакцию 30.05.12.