А. В. Астафьева
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

АССИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИАГОНАЛЬНАХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Пусть r– натуральное число, $f = (f_1, f_2, ..., f_r)$ – набор формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j = 1,2,...,r,$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, ..., m_r$ и обозначим $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$, $n_i = m + n - m_i$. Будем считать, что система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^{r}$ является совершенной. Тогда существуют такие многочлены $Q_m, P_{n_i}^i$, что $\deg Q_m \le m$, $\deg P_{n_i}^i \le n_i$ и для $i = 1,2,...,r$ $R_{m,n}^i(z) = Q_m(z) f_i(z) - P_{n_i}^i(z) = c_i z^{n+m+1} + \dots$.

Дроби вида $\pi_i(z) = \frac{P_{n_i}^i}{Q_m}, i = 1,2,...,r$ называются совместными аппроксимациями Паде.

Будем рассматривать систему функций следующего вида $\{e^{\lambda z}, e^{2\lambda z}\}$, где λ – произвольное комплексное число. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{e^{\lambda z}, e^{2\lambda z}\}$ *– набор из двух экспонент с произвольным комплексным числом* λ. *Тогда для любого комплексного числа* z *при* $n = m_1 = m_2$ *и при* $n \to \infty$

$$e^{\lambda z} - \pi_{2n,2n}^1(\xi, e^{\lambda\xi}) = \frac{\lambda^{3n+1} z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})\lambda z}(1 + o(1)),$$

$$e^{2\lambda z} - \pi_{2n,2n}^2(\xi, e^{2\lambda\xi}) = \frac{\lambda^{3n+1} z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{2\lambda z}\left(e^{\frac{\lambda z}{\sqrt{3}}} + (-1)^n e^{-\frac{\lambda z}{\sqrt{3}}}\right)(1 + o(1)),$$

где $B(\bullet,\bullet)$ *– бета-функция Эйлера.*

Литература

1. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент/ А.И. Аптекарев// Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – №1. – С. 68 – 74.
2. Старовойтов, А.П. Об асимптотике совместных аппроксимаций Паде двух экспонент/ А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, А.В. Астафьева// Вестнік Віцебскага дзяржаўнага універсіцета. – 2011. – № 4(64). – С. 5 – 9.