**А.В.Бузланов, В.С.Монахов**

# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по курсу "Алгебра и теория чисел"
для студентов 1 курса математического факультета

Первое издание было опубликовано в 1991 году. Настоящее издание расширено и дополнено.

Гомель, 2004

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

## ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И СРАВНЕНИЯ.

### Вопросы для самоконтроля:

**1. Группы**

Бинарная алгебраическая операция, её запись. Ассоциативность, коммутативность, нейтальный и симметричный элементы. Полугруппа. Аддитивная и мультипликативная записи. Определение группы в аддитивной и мультипликативной записи. Примеры групп.

**2. Кольца и поля**

Определение кольца, тела и поля. Примеры колец, не являющихся полями, примеры полей.

**3. Делимость в кольце целых чисел**

Кольца целых чисел. Делимость целых чисел и её свойства. Теорема о делении с остатком.

**4. Алгоритм Евклида для целых чисел**

Алгоритм Евклида для целых чисел. Наибольший общий делитель (НОД) целых чисел и его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Линейное выражение НОД через исходные числа.

**5. Взаимно простые числа**

Определение взаимно простых чисел и связь с НОД. Теорема о делимости произведения двух чисел на число, взаимно простое с одним из сомножителей.

**6. Простые числа**

Определение простого числа. Делимость целого числа на простое. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Основная теорема арифметики.

**7. Каноническое разложение числа**

Каноническое разложение числа. Наименьшее общее кратное (НОК) чисел. Связь между НОД и НОК. Нахождение НОД и НОК при канонической записи чисел.

**8. Сравнения**

Сравнение целых чисел и остаток от деления на модуль. Свойства сравнений, не зависящие от модуля. Свойства сравнений, связанные с модулем.

**9. Построение кольца классов вычетов**

Классы вычетов и их свойства. Операции на классах вычетов. Проверка аксиом кольца.

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.*Доказать, что целое число $a = n^3 + 17n + 12$ делится на 6 при любом натуральном $n$.*

Решение. Число а можно преобразовать следующим образом:
$a = n^3 + 17n + 12 = n^3 - n + 18n + 12 = n(n^2 - 1) + 6(3n + 2) =$
$= (n - 1)n(n + 1) + 6(3n + 2)$.

Из трёх последовательных натуральных чисел одно обязательно делится на 2, другое на 3. Следовательно, произведение $(n-1)n(n+1)$ делится на 6. Поэтому и сумма $(n - 1)n(n + 1) + 6(3n + 2) = a$ делится на 6.

Для решения задач такого типа можно использовать метод математической индукции.

Пример 2.*Доказать, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел делится на 4! .*

Решение. Возьмём произведение четырёх последовательных натуральных чисел, начиная с n:

$p_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

1. При n=1 имеем $p_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$, которое делится на 4! .

2. Предположим, что утверждение выполнено для любого $n \leq k$.

3.Покажем, что утверждение верно при $n = k + 1$. Преобразуем произведение $p_{k+1} = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$, полученное при подстановке $n = k+1$, следующим образом:

$p_{k+1} = (k + 1)(k + 2)(k + 3)k + 4(k + 1)(k + 2)(k + 3) = p_k + 4(k + 1)(k + +2)(k + 3)$.

По предположению индукции $p_k = k(k + 1)(k + +2)(k + 3)$ делится на 4! Произведение трёх последовательных натуральных чисел $(k+1)(k++2)(k+ + 3)$ делится на 6. Следовательно, $4(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ делится на 24=4! . Значит, произведение $p_{k+1}$ делится на 4! . Утверждение доказано.

Пример 3.*Вычислить НОД(96,165) и выразить его через исходные числа.*

Решение. Применим алгоритм Евклида, последовательно выполняя деление с остатком:

$165 = 96 \cdot 1 + 69$
$96 = 69 \cdot 1 + 27$
$69 = 27 \cdot 2 + 15$
$27 = 15 \cdot 1 + 12$
$15 = 12 \cdot 1 + 3$
$12 = 3 \cdot 4$

Последний, не равный нулю остаток в алгоритме Евклида, является НОД, т. е. НОД(96,165)=3. Чтобы выразить НОД(96,165) через исходные числа 96 и 165, двигаемся в алгоритме Евклида снизу вверх, выражая последовательно остатки:

$3 = 15 - 12 = 15 - (27 - 15) = 2 \cdot 15 - 27 =$
$= 2(69 - 27 \cdot 2) - 27 = 2 \cdot 69 - 5 \cdot 27 =$
$= 2 \cdot 69 - 5(96 - 69) = 7 \cdot 69 - 5 \cdot 96 =$
$= 7(165 - 96) - 5 \cdot 96 = 7 \cdot 165 - 12 \cdot 96.$

Итак, НОД(96,165)=$7 \cdot 165 - 12 \cdot 96$.

Пример 4.*Найти целые числа a и b, если изкестны НОД(a,b)=24 и НОК(a,b)=2496.*

Решение. Пусть a=24m, b=24n. Так как 24=НОД(a,b)=1, то НОД(m,n)=1. Пусть для определённости m<n. Используя связь НОД и НОК двух чисел, имеем

$\frac{24m \cdot 24n}{24} = 24mn.$

Тогда $mn = 104 = 2^3 \cdot 13$. Так как m и n взаимно просты и m<n, то возможны два случая:

1.$m = 1, n = 104$. Тогда$a = 24, b = 2496$.

2.$m = 2^3, n = 13$. Тогда $a = 192, b = 312$.

Итак, либо a=24, и=2496, либо a=192, b=312.

Пример 5.*Вычислить НОК(-275,126,60).*

Решение. Запишем канонические разложения исходных чисел

$-275 = -5^2 \cdot 11, 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7, 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$

Выберм наибольшие степени всех встречающихся в разложениях простых чисел и перемножим их. Это произведение даст НОК. Итак, НОК $= (-$ $-275, 126, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300$.

Пример 6.*Найти все целые решения уравнения:*

$18x - 42y = -18$

Решение. Выделим несколько этапов в решении этой задачи.

1.Уравнение имеет целые решения, когда число -18 делится на НОД(52,42). Так как НОД(54,42)=6, то данное уравнение имеет целые решения.

2. Разделив обе части уравнения на НОД(54,42), получим равносильное уравнение $9x - 7y = -3$. Заметим, что НОД(9,7)=1.

3. Подберём целые числа u и v таким образом, чтобы $9u - 7v = 1$. Нетрудно заметить, что $u = -3, v = -4$.

4.Запишем одно из решений, умножив u и v на правую часть уравнения $9x - 7y = -3$. Получим$x_0 = u \cdot (-3) = 9, y_0 = v \cdot (-3) = 12$.

5. Все целые числа решения исходного уравнения имеют вид: $x = x_0 -$ $- -bt, y = y_0 + at$, где $t \in Z$, a - коэффициент при x, b - коэффициент при

у в уравнении $9x - 7y = -3$. Итак, x=9+7t , y=12+9t - все целые решения исходного уравнения.

ПРИМЕР 7.*Найти остаток от деления на 31 числа* $29^{2929} + 6^{231}$.

РЕШЕНИЕ. Необходимо найти число $\gamma$, удовлетворяющее двум условиям: $0 \leq \gamma < 31$ и $29^{2929} + 6^{231} \equiv \gamma(31)$. Так как $29 \equiv -2(31)$ и $6^2 = 36 \equiv 5(31)$, то $29^{2929} + 6^{231} \equiv (-2)^{2929} + 6 \cdot 5^{115}(31)$.Поскольку $(-2)^5 = -32 \equiv (-1)(31)$ и $5^3 = 125 \equiv 1(31)$, то $(-2)^{2929} + 6 \cdot 5^{115} \equiv (-1)^{585} \cdot (-2)^4 + 1^{38} \cdot 6 \cdot 5(31)$. Так как $(-1)^{585} \cdot (-2)^4 + 1^{38} \cdot 5 \cdot 6 = -16 + 30 = 14$, то $29^{2929} + 6^{231} \equiv 14(31)$.

Итак, $\gamma = 14$.

### ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Последняя цифра числа а равна остатку от деления $| a |$ на 10.
2. Две последние цифры числа а - это цифры остатка от деления $| a |$ на 100.

## ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

**1.***Показать, что целое число a делится на целое число b.*

1.1. $a = n^2 - 1$, $b = 8$, $n-$ нечётное натуральное число.
1.2. $a = n(n+1)(2n-1)$, $b = 6$, n-натуральное число.
1.3. $a = n(n^2+5)$, $b = 6$, n - натуральное число.
1.4. $a = n(n^3 + 2n^2 - n + 22)$, $b = 24$, n- натуральное число.
1.5. $a = (n+1)(n+3)$, $b = 8$, n - нечётное натуральное число.
1.6. $a = (n+2)(n^2+4n+9), b = 6$, n - натуральное число.
1.7. $a = (n^2-1)(n^2+2n+12), b = 12$, n - натуральное число.
1.8. $a = (n+2)(n^3-n+12), b = 24$, n - чётное натуральное число.
1.9. $a = (n1)(n2+n+12), b = 6$, n - натуральное число.
1.10. $a = (n+2)(n^3-n+12), b = 12$, n - нечётное натуральное число.
1.11. $a = (n^2+4n-5), b = 8$, n - нечётное натуральное число.
1.12. $a = (n+2)(n^3-n+24), b = 24$, n - натуральное число.
1.13. $a = n^2+20n+3, b = 8$, n - нечётное натуральное число.
1.14. $a = n^3+5n+12, b = 6$,n - натуральное число.
1.15. $a = (n^2-1)(n+1)^2, b = 8$,n - нечётное натуральное число.

2.*Найти неполное частное и остаток от деления a на b.*

2.1. $a = \pm 761, b = \pm 13$.
2.2. $a = \pm 652, b = \pm 21$.
2.3. $a = \pm 529, b = \pm 15$.
2.4. $a = \pm 632, b = \pm 18$.
2.5.$a = \pm 437, b = \pm 24$.
2.6. $a = \pm 356, b = \pm 17$.

2.7. $a = \pm 543, b = \pm 19.$
2.8. $a = \pm 458, b = \pm 27.$
2.9. $a = \pm 591, b = \pm 12.$
2.10. $a = \pm 653, b = \pm 14.$
2.11. $a = \pm 729, b = \pm 11.$
2.12. $a = \pm 478, b = \pm 26.$
2.13 $a = \pm 825, b = \pm 13.$
2.14. $a = \pm 751, b = \pm 22.$
2.15. $a = \pm 562, b = \pm 16.$

3.*Известно делимое $f$ и неполное частное $q$. Найти делитель и остаток.*

3.1. f=-43251 , q=243.
3.2. f=31564 , q= –263.
3.3. f=-40201 , q= –194.
3.4. f=53262 , q= –280.
3.5. f=-46707 , q=525.
3.6. f=61796 , q= –325.
3.7. f=27829 , q= –567.
3.8. f=-37654 , q=236.
3.9. f=-46524 , q=512.
3.10. f=43264 , q= –363.
3.11. f=-51067 , q=198.
3.12. f=-35266 , q= –203.
3.13. f=40053 , q= –426.
3.14. f=-36248 , q= –159.
3.15. f=-56728 , q=163.

4.*С помощью алгоритма Евклида найти НОД(a,b) и выразить его через исходные числа. Используя связь НОД и НОК двух чисел, вычислить НОК(a,b).*

4.1. a=5544 , b=7644.
4.2. a=2585 , b=7975.
4.3. a=1188 , b=5080.
4.4. a=4704 , b=9100.
4.5. a=1296 , b=6600.
4.6. a=6188 , b=4709.
4.7. a=6125 , b=1190.
4.8. a=3069 , b=1881.
4.9. a=4968 , b=6678.
4.10. a=3120 , b=2325.

4.11. a=6252 , b=777.
4.12. a=2975 , b=9996.
4.13. a=1368 , b=7056.
4.14. a=1716 , b=1540.
4.15. a=5796 , b=5187.

5.*Известны НОД(a,b) и НОК(a,b). Найти a и b.*

5.1. НОД(a,b)=16 , НОК(a,b)=1584.
5.2. НОД(a,b)=15 , НОК(a,b)=630.
5.3. НОД(a,b)=22 , НОК(a,b)=3630.
5.4. НОД(a,b)=19 , НОК(a,b)=5187.
5.5. НОД(a,b)=14 , НОК(a,b)=2856.
5.6. НОД(a,b)=15 , НОК(a,b)=6900.
5.7. НОД(a,b)=30 , НОК(a,b)=15660.
5.8. НОД(a,b)=27 , НОК(a,b)=5589.
5.9. НОД(a,b)=36 , НОК(a,b)=6480.
5.10. НОД(a,b)=12 , НОК(a,b)=1872.
5.11. НОД(a,b)=21 , НОК(a,b)=756.
5.12. НОД(a,b)=26 , НОК(a,b)=4914.
5.13. НОД(a,b)=35 , НОК(a,b)=8925.
5.14. НОД(a,b)=18 , НОК(a,b)=4896.
5.15. НОД(a,b)=14 , НОК(a,b)=4410.

6.*Решить в целых числах уравнения.*

6.1. 3x + 4y= –13 , 10x - 15y=25.
6.2. 2x – 7y= –8 , 14x + 21y= -49.
6.3. 5x + 6y=9 , 12x-8y= -24.
6.4. x – 7y= 5 , 15x-18y=21.
6.5. 13x + 4y= 20 , 22x + 4y= -16.
6.6. 14x + 3y= -10 , 12x - 20y= -24.
6.7. 15x – 11y= 9 , 6x + 42y= -12.
6.8. 10x – 3y= –8 , 26x + 28y= -4.
6.9. 16x + 9y= –6 , 27x - 12y= -15.
6.10. 29x – 19y= 3 , 30x + 55y= -10.
6.11. 17x + 3y= 20 , 8x - 20y= -16.
6.12. 13x + 8y= –4 , 21x - 36y= 9.
6.13. 4x – 9y= 30 , 24x + 14y= -18.
6.14. 6x + 13y= –22 , 15x - 21y= 42.
6.15. 7x – 16y= –12 , 32x + 44y= -16.

7.*Найти конические разложения целых чисел a, b, c, а затем НОД(a,b,c) и НОК(b,c).*

7.1. a= 6188 , b=88 , c= -320.
7.2. a= 4704 , b=96 , c= -154.
7.3. a= 1716 , b=56 , c= -204.
7.4. a= –3069, b=112, c= 84.
7.5. a= 9100 , b=–114 , c= 92.
7.6. a= 7056 , b=190 , c= -68.
7.7. a= –1368, b=99 , c= 150.
7.8. a= –1540, b=105 , c= 215.
7.9. a= 1296 , b=230 , c= -78.
7.10. a= 1188 , b= –132 , c= -64.
7.11. a= –3120 , b=85 , c= 100.
7.12. a= 4968 , b=104 , c= -56.
7.13. a= –7644, b=196 , c= -76.
7.14. a= 1716 , b=–72, c= 124.
7.15. a= 1288 , b= -144 , c= -66.

8.*Используя свойства сравнений, найти остаток от деления на $b$.*

8.1.$a = 178^{274}, b = 22.$
8.2.$a = 5^{50} + 13^{100}, b = 18.$
8.3. $a = 5^{70} + 7^{50}, b = 12.$
8.4.$a = 439^{291}, b = 60.$
8.5.$a = 383^{175}, b = 45.$
8.6. $a = 178^{52}, b = 11.$
8.7. $a = 34^{374}, b = 26.$
8.8.$a = 22^{234}, b = 14.$
8.9. $a = 5^{80} + 7^{100}, b = 13.$
8.10. $a = 293^{175}, b = 48.$
8.11. $a = 196^{198}, b = 11.$
8.12.$a = 12^{40} + 3^{100}, b = 5.$
8.13. $a = 123^{253}, b = 15.$
8.14.$a = 274^{100}, b = 21.$
8.15. $a = 264^{90}, b = 17.$

9.*Найти последнюю цифру числа а из задания 8.*

10.*Используя свойства сравнений, доказать, что число с делится на число $d$.*

10.1. $c = 27^{30} + 7, d = 16.$
10.2. $c = 26^{15} + 1, d = 21.$
10.3. $c = 60^{45} + 72^{45}, d = 11.$
10.4. $c = 16^{302} + 9^{302} + 1, d = 13.$

10.5. $c = 14^{100} + 5, d = 9.$
10.6. $c = 3^{803} - 16, d = 11.$
10.7. $c = 24^{21} \cdot 21^{12} - 3^{12} \cdot 17^{21}, d = 9.$
10.8. $c = 32^{143} + 136, d = 13.$
10.9. $c = 103^{51} + 162, d = 14.$
10.10. $c = 29^{47} + (-17)^{47} + 1, d = 13.$
10.11. $c = (-17)^{91} + 28^{91}, d = 11.$
10.12. $c = 3^{126} - 15, d = 14.$
10.13. $c = 48^{153} + 24, d = 22.$
10.14. $c = 4^{325} + 26, d = 15.$
10.15. $c = 519^{20} - 27, d = 13.$

11.*Найти две последние цифры числа с из задания 10.*

12.*Составить таблицу умножения и сложения в кольце классов вычетов* $Z_m$, *где*

$$m = \begin{cases} n + 2 \text{при} n \leq 5, \\ n - 3 \text{при} 6 \leq n \leq 10, \\ n - 8 \text{при} 11 \leq n \leq 15, \end{cases}$$

*где n-номер варианта.*

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 .

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### Вопросы для самоконтроля

**1. Построение поля комплексных чисел**

Пары действительных чисел, их сложение и умножение. Свойства этих операций, нулевой, единичный, противоположный и обратный элементы. Поле комплексных чисел. Действительные числа как подполе поля комплексных чисел.

**2. Действия над комплексными числами в алгебраичной форме**

Число i. Алгебраическая форма комплексного чисела.Сложение, вычетание, умножение и деление. Извлечение квадратного корня из комплексного чисела в алгебраической форме.

**3. Тригонометрическая форма комплексного чисела**

Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент. Умножение и деление комплексных чисел. Формула Муавра.

**4. Извлечение корня из комплексного чисела**

Определение корня n-й степени. Формула корней n-й степени из комплексного чисела. Корень из единицы. Корень n-й степени из единицы для $n \leq 4$.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1.*Изобразить на плоскости и записать в тригонометрической форме числа:* $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

РЕШЕНИЕ. Для каждого комплексного числа, откладывая действительную часть по оси OX, а мнимую по оси OY, получим четыре точки $P_1(1;1), P_2(-1;1), P_3(-1;-1), P_4(1;-1)$.

Все четыре числа имеют равные модули: $\mid OP_1 \mid = \mid OP_2 \mid =$
$= \mid OP_3 \mid = \mid OP_4 \mid = \sqrt{(\pm1)^2+(\pm1)^2} = \sqrt{2}$. Модуль комплексного числа a+bi вычисляется по формуле $\gamma = \sqrt{a^2+b^2}$,т.е. равен длине радиус-вектора, проведённого из начала координат в точку, изображающую комплексное число. Аргумент комплексного числа равен величине угла, отсчитанного то оси OX против часовой стрелки до радиус-вектора, изображающего данное число. Находим аргументы остальных комплексных чисел:

$arg(-1+i) = \widehat{XOP_2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$,
$arg(-1-i) = \widehat{XOP_3} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$,
$arg(1-i) = \widehat{XOP_4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$,

Используя найденные значения модулей и аргументов комплексных чисел, получаем ОТВЕТ:

$1+i = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$,
$-1+i = \sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})$,
$-1-i = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4})$,
$1-i = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$.

ПРИМЕР 2.*Вычислить* $(-1+i\sqrt{3})^6$, $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

РЕШЕНИЕ. Представим число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме
$\gamma = \mid \bar{OA} \mid = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$,
$arg(-1+i\sqrt{3}) = \varphi$.
Но из чертежа видим, что $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$.
Тогда $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
Таким образом, $-1+i\sqrt{=}2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$.
Пл формуле Муавра имеем: $(-1+i\sqrt{3})^6 = (2(cos\frac{2\pi}{3}+$
$+isin\frac{2\pi}{3}))^6 = 2^6(cos\frac{6\cdot2\pi}{3} + isin\frac{6\cdot2\pi}{3}) =$
$= 2^6(cos4\pi + isin4\pi) = 64$.
Для вычисления корня из комплексного числа используем формулу
$\sqrt[n]{\gamma(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{\gamma}(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+$
$+isin\varphi + 2\pi kn), k = 0, 1, ..., n-1$. Имеем $z_k = \sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}} =$
$= \sqrt[4]{2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[4]{2}(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + isin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}), k = 0, 1, 2, 3.$

Полагая $k=0,1,2,3$,получаем
$z_0=\sqrt[4]{2}(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$,
$z_1=\sqrt[4]{2}(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3})=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$,
$z_2=\sqrt[4]{2}(cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6})=-\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$,
$z_3=\sqrt[4]{2}(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3})=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$,

Пример 3.*Вычислить* $\sqrt{1-i}$ *в алгебраической форме.*

Решение. Пусть $\sqrt{1-i}=x+iy$, где x,y - действительные числа. Тогда, возводя обе части равенства в квадрат, получим
$1-i=x^2-y^2+2xyi.$

Из условия равенства комплексных чисел имеем систему уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ 2xy=-1, \end{cases}$$

Из этого уравнения выразим y и подставим в первое уравнение:
$y=-\frac{1}{2x}$, $(*)$
$x^2-\frac{1}{4x^2}=1$ или $\frac{4x^4-4x^2-1}{4x^2}=0.$
Решая последнее уравнение, найдём два значения для x:
$x_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, x_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$
Подставляя найденные значения в $(*)$ , получим
$y_1=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, y_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$
Итак, $\sqrt{1-i}$ имеет два значения:
$z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$,
$z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$

Пример 4.*Найти действительные числа x и y из уравнения*
$\frac{x+iy}{x-iy}=\frac{-1+2i}{2i+x}$

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:
$\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{-1+2i}{2i+x}=0$
$\frac{x^2+x-4y+i(xy-y)}{(x-yi)(2i+x)}=0.$
Отсюда получаем систему:
$$\begin{cases} x^2+x-4y=0, \\ xy-y=0, \end{cases}$$
Из второго уравнения следует, что либо y=0, либо x=1. Если y=0, то из первого уравнения либо x=0, либо x=-1.Но из области определения уравнения

следует, что x и y не могут одновременно равняться нулю. Значит, остаётся решение x=-1, y=0. Если x=1, то из первого уравнения $y = \frac{1}{2}$. Ответ: x=-1, y=0 или x=1, $y = \frac{1}{2}$.

Пример 5. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 1+i, \\ (1-i)x + (1+i)y = 1+3i, \end{cases}$$

Решение. *Выразим $x$ из первого уравнения системы*
$x = \frac{(1+i)-(1-i)y}{1+i} = 1 - \frac{1-i}{1+i}y = 1 + iy.$
*Подставим найденное значение во второе уравнение системы и найдём $y$:*
$(1-i)(1+iy) + (1+i)y = 1+3i,$
$y(1+i) = 2i,$
$y = \frac{2i}{1+i} = 1+i.$
*Тогда*
$x = 1 + i(1+i) = 1 + i + i^2 = i$

Проверка. *Подставляя в исходную систему x=i, y=1+i, получим верные равенства*
$(1+i)i + (1-i)(1+i) = i + i^2 + 1 - i^2 = 1+i,$
$(1-i)i + (1+i)(1+i) = i - i^2 + 1 + 2i + i^2 = 1+3i.$

Ответ: *x=i, y=1+i.*

## Задание к лабораторной работе

**1.** *Найти* $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2 - \bar{z}_1}{z_1 + \bar{z}_2}$.

| | $z_1$ | $z_2$ |
|---|---|---|
| *1.1.* | $2+i,$ | $-3+2i.$ |
| *1.2.* | $-1+3i,$ | $2-i.$ |
| *1.3.* | $4-i,$ | $1-3i.$ |
| *1.4.* | $-1+4i,$ | $2-3i.$ |
| *1.5.* | $3-i,$ | $-2+i.$ |
| *1.6.* | $-4+i,$ | $2-i.$ |
| *1.7.* | $1+3i,$ | $-3+i.$ |
| *1.8.* | $4-i,$ | $-3+5i.$ |
| *1.9.* | $2-4i,$ | $3+i.$ |
| *1.10.* | $-3+2i,$ | $5-i.$ |

*1.11.* $-2+5i,\qquad -1+i.$
*1.12.* $-4+3i,\qquad 3-i.$
*1.13.* $5-2i,\qquad 3+4i.$
*1.14.* $-1-2i,\qquad 4-3i.$
*1.15.* $3-4i,\qquad 2+i.$

**2.** *Изобразить на плоскости комплексные числа* $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$, $z_1+\bar{z}_2, z_2-\bar{z}_1$, *где* $z_1$ *и* $z_2$ *- числа из задания 1.*

**3.** *Вычислить* $\sqrt{z}_1$ *и* $\sqrt{z}_2$ *в алгебраической форме для чисел* $z_1$ *и* $z_2$ *из задания 1.*

**4.** *Вычислить*

*4.1.* $5(cos10^\circ + isin10^\circ)\cdot 2(cos80^\circ - isin280^\circ)$
*4.2.* $3(cos50^\circ - isin670^\circ)\cdot 4(cos290^\circ + isin70^\circ)$
*4.3.* $\frac{(cos220^\circ + isin140^\circ)}{(cos50^\circ - isin310^\circ)}$
*4.4.* $\frac{(cos130^\circ - isin130^\circ)}{(cos40^\circ + isin40^\circ)}$
*4.5.* $\frac{2(cos\frac{\pi}{7} + isin\frac{\pi}{7})}{6(cos\frac{8\pi}{7} - isin\frac{6\pi}{7})}$
*4.6.* $(cos\frac{5\pi}{4} - isin\frac{5\pi}{4})\cdot 7(cos\frac{17\pi}{12} - isin\frac{17\pi}{12})$
*4.7.* $5(cos109^\circ + isin109^\circ)\cdot 3(cos319^\circ - isin319^\circ)$
*4.8.* $3(cos20^\circ + isin20^\circ)\cdot 2(cos200^\circ - isin200^\circ)$
*4.9.* $\frac{(cos80^\circ - isin80^\circ)}{(cos250^\circ + isin110^\circ)}$
*4.10.* $5(cos\frac{4\pi}{3} - isin\frac{4\pi}{3})\cdot 4(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$
*4.11.* $\frac{6(cos42^\circ - isin42^\circ)}{5(cos82^\circ + isin82^\circ)}$
*4.12.* $(cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4})\cdot 3(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$
*4.13.* $\frac{3(cos110^\circ - isin110^\circ)}{3(cos140^\circ - isin140^\circ)}$
*4.14.* $7(cos130^\circ - isin130^\circ)\cdot 3(cos320^\circ - isin320^\circ)$
*4.15.* $\frac{3(cos160^\circ - isin160^\circ)}{(cos230^\circ - isin230^\circ)}$

**5.** *Вычислить*

*5.1.* $(1+i)^{25},\ \sqrt[3]{2-i\sqrt{12}},\ \sqrt[4]{-4},\ \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

*5.2.* $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20},\ \sqrt[4]{-\sqrt{3}+i},\ \sqrt[5]{-32},\ \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$

*5.3.* $(\sqrt{3}-i)^{10},\ \sqrt[3]{i},\ \sqrt[4]{-1+i},\ \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$

*5.4.* $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{100},\ \sqrt[6]{2},\ \sqrt[4]{1-i},\ \sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$

*5.5.* $(-1+i\sqrt{3})^{20},\ \sqrt[3]{-27},\ \sqrt[6]{\sqrt{12}-2i},\ \sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$

*5.6.* $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i})^{12},\ \sqrt[5]{-1},\ \sqrt[3]{2-2i},\ \sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$

*5.7.* $(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[4]{i-1}$, $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$

*5.8.* $(2-i\sqrt{12})^{20}$, $\sqrt[4]{8i}$, $\sqrt[3]{3-3i}$, $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}i-1}{1+i}}$

*5.9.* $(\frac{i-1}{2-i\sqrt{12}})^{45}$, $\sqrt[3]{-27i}$, $\sqrt[5]{i-1}$, $\sqrt[8]{\frac{i-\sqrt{3}}{1-i}}$

*5.10.* $(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i})^{4}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[4]{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$, $\sqrt[6]{\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}}$

*5.11.* $(\sqrt{2}i-\sqrt{2})^{24}$, $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt[5]{-3+3i}$, $\sqrt[4]{\frac{i\sqrt{3}-1}{i-1}}$

*5.12.* $(2i-\sqrt{12})^{16}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{\frac{3+i}{4-12i}}$

*5.13.* $(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})^{20}$, $\sqrt[3]{-6i}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{12}-2i}$, $\sqrt[5]{\frac{16}{1-i\sqrt{3}}}$

*5.14.* $(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i)^{10}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[5]{-5-5i}$, $\sqrt[3]{\frac{2-i}{1+2i}}$

*5.15.* $(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}i)^{12}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{2}}i-\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\sqrt[5]{-\frac{20}{1+i}}$

**6.** *Решить уравнения:*

*6.1.* $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0, x^2-4x+5=0.$
*6.2.* $x^2-3x+4=0, x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0.$
*6.3.* $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0, 2x^2-3x+5=0.$
*6.4.* $x^2+(2i-7)x+(13-i)=0, x^2+3x+6=0.$
*6.5.* $x^2-(1+i)x+6+3i=0, 3x^2-2x+3=0.$
*6.6.* $x^2-5x+4+10i=0, -x^2+x-1=0.$
*6.7.* $-x^2+2x-2=0, (1-i)x^2+(5-i)x+4+2i=0.$
*6.8.* $(3+i)x^2+(1-i)x-6i)=0, x^2+x+2=0.$
*6.9.* $3x^2-2x+4=0, 4x^2+(4-3i)x-4-3i=0.$
*6.10.* $-2x^2+3x-2=0, x^2+2ix-1-i=0.$
*6.11.* $4x^2+12x+8-i=0, 3x^2+5x+3=0.$
*6.12.* $4x^2-4x+1+i=0, 2x^2-4x+5=0.$
*6.13.* $x^2-2x+5=0, 2x^2+(2+2i)x+2+i=0.$
*6.14.* $x^2+3x+5=0, x^2+(2-i)x+1-i=0.$
*6.15.* $x^2+(2+i)x+1+i)=0, x^2+5x+7=0.$

**7.** *Составить квадратные уравнения с действительными коэффициентами, корнями которых являются комплексные числа $z_1$ и $\bar{z}_1$, $z_2$ и $\bar{z}_2$, где $z_1$ и $z_2$ - числа из задания 1.*

**8.** *Найти действительные числа $x$ и $y$ из уравнения $\mid x+iy\mid+x+yi=$ $=1+(n-7)i$, где $n$- номер варианта.*

**9.** *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} (3-i)x+(4+i)y=n-6+6i, \\ (n+2i)x-(2+3i)y=5+4i, \end{cases}$$

*где n - номер варианта.*

*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1*

## ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

### Вопросы теории

*1. Бинарная алгебраическая операция.*

*2. Ассоциативность и коммутативность операции.*

*3. Нейтральный и симметричный элементы.*

*4. Полугруппа, моноид и их примеры.*

*5. Определение группы.*

*6. Абелева группа. Конечная группа, ее порядок. Бесконечная группа.*

*7. Мультипликативная группа.*

*8. Аддитивная группа, примеры.*

*9. Подгруппы и их примеры.*

*10. Определение кольца, примеры колец.*

*11. Аддитивная группа кольца, мультипликативная полугруппа кольца. Кольцо с единицей. Коммутативное кольцо.*

*12. Свойства колец.*

*13. Определение поля, примеры полей.*

*14. Делители нуля.*

*15. Характеристика поля.*

*16. Конечные и бесконечные поля и их примеры.*

### Примеры решения задач

Пример 1. *Будет ли группой множество ненулевых действительных чисел с операцией $a * b = 2ab$ ?*

Решение. *Для любых чисел $a, b \in R^{\#}$ элемент $a * b = 2ab$ также принадлежит $R^{\#}$ т.е. операция * во множестве $R^{\#}$ является алгебраической. Проверим выполнение условий в определении группы.*

*1) Ассоциативность операции:*

$$(a * b) * c = (2ab) * c = 2(2ab)c = 4abca * (b * c) = a * (2bc) = 2a(2bc) = 4abc,$$

*т.е.* $(a * b) * c = a * (b * c)$

*2) Пусть $\in R^{\#}$ и является нейтральным элементом в $R^{\#}$ относительно операции *. Тогда для любого элемента $a \in R^{\#}$ $a * n = n * a = a$, откуда*

$$\begin{cases} 2an = a, & \text{если } x < k; \\ 2na = a, & \text{если } x \geqslant k. \end{cases}$$

5

*Нетрудно заметить, что решением системы будет число $n = \frac{1}{n}$.*

*3) Пусть $b \in R^{\#}$ и является симметричным элементом для элемента $a \in R^{\#}$. Тогда $a * b = b * a = \frac{1}{2}$, откуда*

$$\begin{cases} 2ab = \frac{1}{2}, & \textit{если } x < k; \\ 2ba = \frac{1}{2}, & \textit{если } x \geqslant k. \end{cases}$$

*Решением этой системы будет число $b = \frac{1}{4a}$, т.е. элементом симметричным элементу $a \in R^{\#}$ в алгебраической системе $(R^{\#}, *)$ будет элемент $\frac{1}{4a}$.*

*Таким образом, множество $R^{\#}$ с данной операцией * является группой. Более того, так операция * коммутативна $a * b = 2ab = 2ba = b * a$, то группа абелева.*

Пример 2. *Будет ли множество $M = \{a = b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел кольцом, полем?*

Решение. *Покажем прежде всего, что в множестве $M$ сложение и умножение являются бинарными алгебраическими операциями:*

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + b) + (b + d)\sqrt{2} \in M,$$

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in M$$

*для любых чисел $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in M$.*

*Проверим выполнение условий в определениях кольца и поля.*

*1) Ассоциативность сложения во множестве $\mathbb{R}$ следует из ассоциативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.*

*2) Нулевым элементом во множестве $M$ будет число $0 + 0\sqrt{2} \in M$.*

*3) Элементом, противоположным элементу $(a + b\sqrt{2})$ во множестве $M$ будет элемент $(-a - b\sqrt{2})$.*

*4) Коммутативность сложения во множестве $M$ следует из коммутативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.*

*5) Ассоциативность умножения во множестве $M$ следует из ассоциативности умножения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.*

*6) Коммутативность умножения и выполнение законов дистрибутивности также следуют из выполнения соответствующих свойств во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.*

*Тем самым доказано, что множество $M$ является кольцом.*

*7) Единичным элементом во множестве $M$ является число $1 + 0\sqrt{2}$ . так как*

$(a+b\sqrt{2}),(1+0\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2})$.

*8) Пусть* $(a+b\sqrt{2})\in M^{\#}$. *Это означает, что* $a^2+b^2\neq 0$ , *т.е.* $a$ *и* $b$ *одновременно не равны нулю. Пусть* $x+y\sqrt{2}\in M$ *и является элементом, обратным для элемента* $a+b\sqrt{2}$. *Тогда*

$$(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1+0\sqrt{2},(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1,$$

*откуда* $(x+y\sqrt{2})=\frac{1}{(a+b\sqrt{2})}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2}\in M$, *так как* $\frac{a}{a^2-2b^2},\frac{b}{2b^2-a^2}\in Q$, *и* $a^2-2b^2\neq 0$.

*Таким образом, каждый ненулевой элемент* $(a+b\sqrt{2})$ *из множества* $M$ *имеет в* $M$ *обратный элемент* $\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2}$.

*Следовательно, множество* $M$ *является полем.*

## ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

**1.***Будет ли множество* $A$ *с операцией* $*$ *полугруппой, моноидом?*

*1.1.* $A=\mathbb{N}$, $a*b=2(a+b)$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

*1.2.* $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a-b+1$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

*1.3.* $A=\mathbb{Q}$, $a*b=2a+b$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

*1.4.* $A=\mathbb{R}$, $a*b=4ab$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

*1.5.* $A=\mathbb{N}$, $a*b=a^b$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

*1.6.* $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a+b-2$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

*1.7.* $A=\mathbb{Q}$, $a*b=3(a+b)$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

*1.8.* $A=\mathbb{R}$, $a*b=\frac{a+b}{3}$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

*1.9.* $A=\mathbb{N}$, $a*b=\sqrt{a}b$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

*1.10.* $A=\mathbb{Z}$, $a*b=-(a+b)$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

*1.11.* $A=\mathbb{Q}$, $a*b=(a+b)^2$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

*1.12.* $A=\mathbb{R}$, $a*b=-2ab$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$

*1.13.* $A=\mathbb{N}$, $a*b=a^2+b^2$ $\forall a,b\in\mathbb{N}$

*1.14.* $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a+b^2$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

*1.15.* $A=\mathbb{Q}$, $a*b=\frac{ab}{2}$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$

**2.** *Будет ли множество - с указанной операцией - группой, абелевой группой?*

*2.1.* $M = \mathbb{Q}^{\#}, \quad a * b = 5ab \forall a, b \in M$

*2.2.* $M = \{-1; 1\}, \quad a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

*2.3.* $M = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}, \quad a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

*2.4.* $M = \{2k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}, \quad a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

*2.5.* $M = \{\frac{m}{2^k+1} | m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}, \quad a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

*2.6.* $M = \{\frac{m}{2^k+1} | m \in \mathbb{Z}^{\#}, k \in \mathbb{N}\}, \quad a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

*2.7.* $M = \{c + d\sqrt{3} | c, d \in \mathbb{Z}\}, \quad a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

*2.8.* $M = \mathbb{Q}^{\#}, \quad a * b = 3ab \quad \forall a, b \in M$

*2.9.* $M = \{c + d\sqrt{3} | c \in \mathbb{Q}^{\#} d \in \mathbb{Q}\}, \quad a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

*2.10.* $M = \mathbb{Z}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad (a * b) * (c * d) = (a + c, b + d) \quad \forall (a, b), (c, d) \in M$

*2.11.* $M = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}^{\#}, b \in \mathbb{R}\}, \quad (a * b) * (c * d) = (ac, bd) \quad \forall (a, b), (c, d) \in M$

*2.12.* $M = \mathbb{Q}^{\#}, \quad a * b = -2ab \quad \forall a, b \in M$

*2.13.* $M = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}, \quad a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

*2.14.* $M = \{c - d\sqrt{2} | c, d \in \mathbb{Z}\} \quad a * b = a + b \quad \forall a, b \in M$

*2.15.* $M = \{c - d\sqrt{2} | c \in \mathbb{Q}^{\#}, d \in \mathbb{Q}\} \quad a * b = ab \quad \forall a, b \in M$

**3.** *Являются ли следующее множество аддитивной или мультипликативной группой?*

*3.1.* $M = \{\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$

*3.2.* $M = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$

*3.3.* $M = \{a + b\sqrt{3} | a \in \mathbb{Q}^{\#}, b \in \mathbb{Q}\}$

*3.4.* $M = \{\frac{a}{3^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$

*3.5.* $M = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$

*3.6.* $M = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$

*3.7.* $M = \{\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}^{\#}, k \in \mathbb{N}\}$

*3.8.* $M = \{a - b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

*3.9.* $M = \{-\frac{a}{3^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}^{\#}, k \in \mathbb{N}\}$

*3.10.* $M = \{-a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

*3.11.* $M = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$

*3.12.* $M = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$

*3.13.* $M = \{-a + b\sqrt{3} | a \in \mathbb{Q}^{\#}, b \in \mathbb{Q}\}$

*3.14.* $M = \{2k + 1 | k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$

*3.15.* $M = \{2k - 1 | k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$

**4.** *Будет ли множество - с указанными операциями сложения и умножения кольцом?*

*4.1.* $K = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.2.* $K = \{(a+b) | a, b \in \mathbb{R}\}$*,* $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

*4.3.* $K = \{\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$*, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.4.* $K = \mathbb{R}$ *, сложение действительных чисел, умножение:* $a * b = 2ab$.

*4.5.* $K = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.6.* $K = \{a - b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.7.* $K = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Q}\}$*,* $(a, b) + (c, d) = (ad), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

*4.8.* $K = \{\frac{a}{3^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$*, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.9.* $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$*,* $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

*4.10.* $K = \{-\frac{a}{4^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.11.* $K = \{a - b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.12.* $K = \{a - b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.13.* $K = \{(0, b) | b \in \mathbb{R}\}$*,* $(0, a) + (0, b) = (0, a + b), (0, a)(0, b) = (0, ab)$.

*4.14.* $K = \{\frac{a}{5^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*4.15.* $K = \{-\frac{a}{2^{k-1}} | a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

**5.** *Является ли множество $P$ с указанными операциями сложения и умножения полем?*

*5.1.* $P = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}, (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d), (a,b)(c,d) = (ac, bd)$.

*5.2.* $P = \{\frac{a}{2^{k+1}} \mid \ a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.3.* $P = \mathbb{R}$ *, сложение действительных чисел, умножение:* $a * b = 2ab$.

*5.4.* $P = \{a + b\sqrt{5} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.5.* $P = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}, \ (a,0)+(b,0) = (a+b,0), \ (a,0)(b,0) = (ab,0)$.

*5.6.* $P = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}, \ (0,a)+(0,b) = (0,a+b), \ (0,a)(0,b) = (0,ab)$.

*5.7.* $P = \mathbb{Q}$ *, сложение рациональных чисел, умножение:* $a * b = -3ab$.

*5.8.* $P = \{a + b\sqrt{2} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.9.* $P = \{\frac{a}{4^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.10.* $P = \{a + b\sqrt{3} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.11.* $P = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.12.* $P = \{\frac{a}{5^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.13.* $P = \{-\frac{a}{2^{k-1}} \mid \ a \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

*5.14.* $P = \{(a,b) \mid a, \ b \in \mathbb{R}\}, \ (a,b)+(c,d) = (a,d), \ (a,b)(c,d) = (ac,bd)$.

*5.15.* $P = \{a - b\sqrt{3} \mid \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ *, сложение и умножение действительных чисел.*

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**1.** *Приведите пример полугруппы, которая не является моноидом.*

**2.** *Приведите пример кольца, которое не является полем.*

**3.** *Построить поле из трех элементов. Какова характеристика этого поля.*

**4.** *Докажите, что множество* $H = \{f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{x-1}{x+1},\ f_3(x) = -\frac{1}{x},\ f_4(x) = -\frac{x+1}{x-1}\}$ *с операцией умножения* $*$ *,является группой, если* $(f_i * f_j)(x) = f_i(f_j(x))\ \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, \},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

**5.** *Докажите, что множество функций* $H = \{x,\ 1-x,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{1-x},\ -\frac{x}{1-x},\ -\frac{1-x}{x}\}$*, определенных на* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *, является группой относительно композиции функций, (см. предыдущую задачу).*

**6.** *Пусть* $P(X)$ *- множество всех подмножеств заданного множества* $X$*. Определим операции сложения и умножения следующим образом:* $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),\ A * B = A \cap B\ \ \forall A, B \in P(X)$*. Будет ли множество* $P(X)$ *кольцом, полем?*

*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.*

## Перестановки.

### Вопросы для самоконтроля.

**1.Симметрическая группа.**

*Взаимно однозначное отображение (биекция) множества. Перестановка. Умножение перестановок и его свойства. Обратная перестановка и её нахождение. Число перестановок из n символов.*

**2.Разложение перестановок в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций.**

*Цикл длины k, его запись. Зависимые и независимые циклы. Умножение циклов. Разложение перестановки в произведение независимых циклов. Транспозиция. Разложение цикла в произведение транспозиций. Разложение перестановки в произведение транспозиций.*

**3.Знак перестановки.**

*Формула знака перестановки. Четные и нечетные перестановки. Знак транспозиции и тождественной перестановки. Мультипликативность знака. Знак обратной перестановки. Вычисление знака перестановки.*

**4. Знакопеременная группа.**

*Чётные перестановки и свойства их умножения. Число чётных перестановок степени n.*

### Примеры решения и оформления задач.

Пример 1.*Даны перестановки*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, *принадлежащие симметрической группе $S_6$ степени 6. а) Вычислить $\alpha^{-1}$,$\beta^{-2}$,$\alpha\beta$. б) Разложить $\alpha\beta$ в произведение транспозиций. в) Вычислить знак перестановки $(\alpha\beta)^{-1}$.*

Решение. *а) Для нахождения $\alpha^{-1}$ необходимо в перестановке $\alpha$ поменять местами строки, а затем переставить столбцы так, чтобы первая строка была упорядочена по возрастанию*

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

*Чтобы вычислить* $\beta^{-2}$, *перейдём к табличной записи перестановки* $\beta$. *Так как* $\beta \in S_6$, *то*

$$\beta = (1234) = (1234)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Теперь вычислим* $\beta^{-2}$ :

$$\beta^{-2} = (\beta^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 = \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

*Вычислим* $\alpha\beta$ :

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

*б) Перестановка* $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *переводит* $1 \to 1$, $2 \to 5 \to 4 \to 2$, $3 \to 3$, $6 \to 6$, *поэтому* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1)(254)(3)(6)-$ $-$*разложение перестановки* $\alpha\beta$ *в произведение независимых циклов.*

*Чтобы представить перестановку* $\alpha\beta$ *в виде произведения транспозиций, каждый цикл длины больше 2 разложим в произведение транспозиций:* $(254) = (24)(25)$ *и* $\alpha\beta = (1)(24)(25)(3)(6)$.

*Опуская циклы длины 1, получим разложение* $\alpha\beta$ *в произведение транспозиций, т.е.*

$$\alpha\beta = (24)(25).$$

*в) Знак перестановки вычислим по формуле*

$$sgn\tau = (-1)^n - c,$$

*где n - степень перестановки* $\tau$, *а c - число её независимых циклов.*

*Так как* $(\alpha\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1)(245)(3)(6)$, *то* $c$=*4. Поскольку перестановки* $\alpha$ *и* $\beta$ *принадлежат* $S_6$, *то* $(\alpha\beta)^{-1} \in S_6$, *т.е.* $n$=*6.*

*Таким образом,* $sgn(\alpha\beta)^{-1} = (-1)^{6-4} = (-1)^2 = 1$, *т.е. перестановка* $(\alpha\beta)^{-1}$ *чётная.*

Пример 2.*Не прибегая к табличной записи, вычислить* $\beta^{-1}$, $\beta^{-2}$, $\beta^{-2}\tau$, *где* $\beta = (1234) \in S_6$ *и* $\tau = (2356) \in S_6$.

Решение. *Возьмём перестановку* $\alpha = (4321)$, *в которой цифры из перестановки* $\beta$ *расположены в обратном порядке. Покажем, что* $\beta^{-1} = \alpha$.

*Действительно,* $\beta\alpha = [(1234)(5)(6)][(4321)(5)(6)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} =$ $= (1)(2)(3)(4)(5)(6) = \varepsilon$, $\alpha\beta = [(4321)(5)(6)][(1234)(5)(6)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} =$ $= (1)(2)(3)(4)(5)(6) = \varepsilon$, *т.е.* $\beta\alpha = \alpha\beta = \varepsilon$, *где* $\varepsilon-$*тождественная перестановка. Поэтому* $\alpha = \beta^{-1}$.

*Вычислим* $\beta^{-2}$. *Так как* $\beta^{-2} = (\beta^{-1})^2$, *то имеем*

$$\beta^{-2} = [(4321)(5)(6)][(4321)(5)(6)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} = (13)(24)(5)(6).$$

*Найдём* $\beta^{-2}\tau$

$$\beta^{-2}\tau = [(13)(24)(5)(6)][(2356)(1)(4)] = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{array} = (135642).$$

Ответ: $\beta^{-1} = (4321)(5)(6)$, $\beta^{-2} = (13)(24)(5)(6)$, $\beta^{-2}\tau = (135642)$.

Пример 3. *Найти* $\alpha^{50}$, *если* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. *Найдём наименьшее натуральное число n такое, что* $\alpha^n = \varepsilon$, *где* $\varepsilon$*—тождественная перестановка.*

$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$
$= \varepsilon$.

*Значит, n=4 . Тогда*

$$\alpha^{50} = \alpha^{4\cdot 12+2} = (\alpha^4)^{12} \cdot \alpha^2 = \varepsilon^{12} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *При каких i, j, k перестановка* $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & k & 3 & 6 & 1 \\ i & j & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *нечётная?*

Решение. *Заметим, что в каждой строке перестановки все цифры должны быть различными. Так как* $\alpha$*—перестановка степени 6, то в первой строке k=4, а во второй строке для i и j возможны два случая.*

1-й случай: *i=2, j=6. Тогда перестановка* $\alpha$ *имеет вид*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Так как* $\alpha = (14356)$ *цикл длины 5, то* $\alpha$*—чётная перестановка.*

*sc 2-й случай: i=6, j=2. Тогда*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (143526).$$

*Следовательно, перестановка* $\alpha$ *нечётная.*

Ответ: *i=6, j=2, k=4.*

Пример 5. *Найти перестановку* $\alpha$ *из равенства*

$$(135)(23)\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. *Перестановка* $(135)(23)$ *является произведением зависимых циклов. Представим эту перестановку в табличной записи. Для этого прежде перемножим циклы.*

$$(135)(23) = (1325) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Итак,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Тогда*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

*откуда*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Задание к лабораторной работе.

**1.** *Вычислить* $\alpha^{-1}$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\beta^{-2}$, $(\alpha\beta)^2$, $(\beta\alpha)^{-1}$.

*1.1.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

*1.2.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

*1.3.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

*1.4.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

*1.5.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

*1.6.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

*1.7.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

*1.8.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

*1.9.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

*1.10.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

*1.11.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

*1.12.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

*1.13.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 1 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

*1.14.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 9 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

*1.15.* $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

**2.** *Записать перестановки $\alpha$, $\beta$, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ из задания 1 в виде произведения независимых циклов и в виде произведения транспозиций. Какова чётность этих перестановок?*

**3.** *Записать в виде таблицы перестановки $\sigma$ и $\tau$.*

*3.1.* $\sigma = (143)(25)(679)$, $\tau = (214)(345)(56)(13)$.

*3.2.* $\sigma = (13245)(15)(246)$, $\tau = (137)(65)(49)$.

*3.3.* $\sigma = (235)(147)(68)$, $\tau = (3567)(15)(364)$.

*3.4.* $\sigma = (31)(14)(2561)$, $\tau = (357)(62)(18)$.

*3.5.* $\sigma = (12356)(479)$, $\tau = (4356)(627)(145)$.

*3.6.* $\sigma = (32)(257)(4316)$, $\tau = (431)(267)(89)$.

*3.7.* $\sigma = (146)(245)(36)$, $\tau = (3564)(127)$.

*3.8.* $\sigma = (125)(439)(68)$, $\tau = (143)(3526)(125)$.

*3.9.* $\sigma = (26)(6371)(145)$, $\tau = (25)(437)(69)$.

*3.10.* $\sigma = (139)(27)(64)$, $\tau = (2594)(142)(659)$.

*3.11.* $\sigma = (12)(25)(5437)(13)$, $\tau = (14)(357)(62)$.

*3.12.* $\sigma = (156)(4392)$, $\tau = (172)(289)(7814)$.

*3.13.* $\sigma = (4513)(279)$, $\tau = (1354)(324)(672)$.

*3.14.* $\sigma = (157)(645)(213)$, $\tau = (124)(387)(65)$.

*3.15.* $\sigma = (263)(17)(89)$, $\tau = (145)(3467)(562)$.

**4.** *Вычислить $\sigma^{-1}$, $\tau^{-1}$, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $(\tau\sigma)^{-1}$, не прибегая к табличной записи.*

**5.** *Найти наименьшие натуральные числа $n$ и $m$, при которых $\alpha^n = \beta^m = \varepsilon$, где $\alpha$, $\beta$– перестановки из задания 1, $\varepsilon$– тождественная перестановка. Найти $\alpha^{100}$ и $\beta^{150}$.*

**6.** *Определить чётность перестановок $\sigma$, $\tau$, $\sigma^{-1}$, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$, $\tau\sigma\tau$.*

**7.** *При каких значениях i, j, k перестановка $\gamma$ чётная? При каких значениях i.j,k перестановка $\chi$ нечётная?*

*7.1.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & 12 & 6 & k \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & 4 & 3 & k & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & j & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

*7.2.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & i & 1 & j & k & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} i & 3 & 4 & 5 & j & 6 & 5 \\ 7 & 1 & k & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

*7.3.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ j & k & 1 & 3 & i & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & i & k & 2 & 4 \\ j & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

*7.4.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ i & 2 & 5 & 3 & j & k & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & j & 6 & 4 & 1 \\ k & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

*7.5.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ k & i & 1 & 7 & j & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 3 & k & 4 & i & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & j \end{pmatrix}$.

*7.6.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & i & 4 & 8 & j & k & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 1 & k & j & 2 & 4 & 7 & 5 \\ i & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

*7.7.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & i & 2 & j & 1 & 4 & k \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & 2 & k & 3 & 1 \\ 1 & j & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

*7.8.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ i & 3 & j & k & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & k & 1 & i & 3 \\ j & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

*7.9.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ j & 3 & 1 & i & k & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & j & 1 & 4 & 3 \\ i & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

*7.10.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & i & j & 2 & k & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & j & k & 1 & 3 & 7 \\ i & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

*7.11.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 2 & 1 & j & 4 & 5 & k \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & 4 & i & 1 & 2 \\ 1 & j & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

*7.12.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & k & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & i & k & 1 & 7 & 6 \\ j & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

*7.13.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 1 & k & 7 & 6 & j & 4 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & j & 1 & 3 & 2 \\ k & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

*7.14.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & i & 1 & 3 & k & j & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 6 & i & k & 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & j & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

*7.15.* $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & j & i & 1 & k & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & i & k & 1 & 5 \\ j & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

**8.** *Найти перестановки $\lambda$ и $\mu$ из равенств $\alpha\lambda\beta = \sigma$, $\sigma\mu\alpha = tau$, где $\alpha$ и $\beta$– перестановки из задания 1, $\sigma$, $\tau$– перестановки из задания 3.*

*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.*

## Матрицы и действия над ними.

Вопросы для самоконтроля.

**1. Матрицы и действия над ними.**

*$k \times l$ - Матрица. Строки и столбцы, их запись. Равенство двух матриц. Квадратная матрица, диагонали. Единичная матрица. Сложение матриц и умножение матриц на число, основные свойства. Нулевая матрица. Противоположная матрица.*

**2. Умножение матриц.**

*Произведение строки на столбец. Умножение матриц и его свойства. Умножение на единичную матрицу. Дистрибутивность умножения матриц относительно сложения.*

**3.Транспонирование.**

*Транспонирование матриц и его свойства.*

**4. Элементарные преобразования матриц.**

*Элементарные преобразования матриц 1-го и 2-го рода. Перестановка строк матрицы. Ступенчатая матрица и приведение произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.*

**5. Системы линейных уравнений и метод Гаусса.**

*Системы линейных уравнений, её неизвестные, коэффициенты и свободные члены. Матрица системы, расширенная матрица. Матричная запись системы, столбец неизвестных, столбец свободных членов. Решения системы линейных уравнений. Совместная и несовместная система. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Равносильные системы. Ступенчатая система. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.*

Примеры решения и оформления задач.

Пример 1.*Вычислить*

$$2A - BC,$$

*если*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. *Перемножим матрицы $B$ и $C$*

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 3\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Так как*

$$2A = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix},$$

*то*

$$2A - BC = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $2A - BC = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

Пример 2.*Решить систему матричных уравнений*

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Решение. *Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым*

$$4X - 2Y + 3X + 2Y = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7X = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

*Из первого уравнения системы*

$$Y = 2X - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. *Найти матрицы*

$$X = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

*удовлетворяющие уравнению* $f(X) = 0$, *если* $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Решение. *Найдём значение трёхчлена* $f(x)$ *от* $X$

$f(X) = X^2 - 4X^1 + 3X^0 = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} +$
$+ 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & -xy \\ -xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & -4y \\ -4y & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} x^2+y^2-4x+3 & -2xy+4y \\ -2xy+4y & x^2+y^2-4x+3 \end{pmatrix}$, *Тогда из равенства*

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2-4x+3 & -2xy+4y \\ -2xy+4y & x^2+y^2-4x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*получаем систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+3 = 0, \\ -2xy+4y = 0 \end{cases}$$

*Из второго уравнения* $y(-2x + 4 = 0)$ *следует, что либо* $y = 0$, *либо* $x = 2$.

*Если* $y = 0$, *то из первого уравнения системы получаем*

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

*откуда* $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

*Если* $x = 2$, *то из первого уравнения*

$$y^2 = 1$$

*или* $y_1 = 1, y^2 = -1$.

Ответ:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3ix_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + (1-i)x_2 + ix_3 = i - 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2ix_3 = 4 - 2i \end{cases}$$

Решение. *Выпишем расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований строк приведём её к ступенчатому виду*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3i & 1 & 3 \\ -3 & 1-i & i & i-3 \\ 4 & 1 & -2i & 4-2i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3i & 1 & 3 \\ 0 & 2-11i & 3+2i & 3+2i \\ 0 & 1+6i & -2-2i & -2-2i \end{array}\right).$$

*Мы ко второй строке, умноженной на 2, прибавили первую, умноженную на 3; к третьей строке прибавили первую, умноженную на -2.*

*Теперь к третье строке, умноженной на -2+11i, прибавили вторую, умноженную на 1+6i. Получим матрицу*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3i & 1 & 3 \\ 0 & 2-11i & 3+2i & 3+2i \\ 0 & 0 & 17+2i & 17+2i \end{array}\right),$$

*которая является матрицей ступенчатого вида. Запишем систему, соответствующую этой матрице.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3ix_2 + x_3 = 3, \\ (2-11i)x_2 + (3+2i)x_3 = 3+2i, \\ (17+2i)x_3 = 17+2i \end{cases}$$

*Преобразованная система имеет три уравнения с тремя неизвестными и, значит, единственное решение.*

*Из третьего уравнения системы* $x_3 = 1$. *Подставляя* $x_3 = 1$ *во второе уравнение, найдём* $x_2 = 0$. *Из первого уравнения* $x_1 = 1$.

Проверка.

$$2 \cdot 1 - 3i \cdot 0 + 1 = 3, (-3) \cdot 1 + (1-i) \cdot 0 + i \cdot 1 = i - 3, 4 \cdot 1 + 0 - 2i \cdot 1 = 4 - 2i.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

## Задание к лабораторной работе.

**1.** *Вычислить* $AB, BA, CB, CAB$ *и значение многочлена* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ *от матрицы* $B$.

*1.1.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ -1 & 2 & 3 \\ 2i & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*1.2.*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & i-1 \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 6 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*1.3.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ i & -1 & 4 \\ 2 & -2 & i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*1.4.*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2i & 1 \\ 1 & 2 & i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

*1.5.*

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1-i \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -i & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

*1.6.*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & i \\ 2 & i & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

*1.7.*

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

*1.8.*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & i \\ 0 & 2 & -1 \\ i & -2 & -8 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

*1.9.*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1-i & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

*1.10.*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & i \\ 1 & 2 & 0 \\ -i & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*1.11.*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ i & 0 & 5 \\ -1 & 1 & i-1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*1.12.*

$$A=\begin{pmatrix} i & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*1.13.*

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ i & 3 & 2 \\ -2 & 4i & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

*1.14.*

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ i & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1-i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*1.15.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3i \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & i & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.** *Решить матричное уравнение*

$$5X+3A-2^tB=(2A-3B)^t,$$

*где $A, B$ — матрицы из задания 1.*

**3.** *Найти $2\times 2$ — матрицы $X=\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix}$ над полем $C$, удовлетворяющие уравнению $f(X)=0$.*

*3.1.* $f(x)=x^2+x+1.$
*3.2.* $f(x)=2x^2-x+2.$
*3.3.* $f(x)=x^2+2x+5.$
*3.4.* $f(x)=3x^2+x+1.$
*3.5.* $f(x)=-2x^2+3x-2.$
*3.6.* $f(x)=-x^2+x-2.$
*3.7.* $f(x)=5x^2+3x+2.$
*3.8.* $f(x)=x^2+3x+4.$
*3.9.* $f(x)=2x^2-3x+5.$
*3.10.* $f(x)=3x^2-2x+1.$
*3.11.* $f(x)=4x^2+3x+2.$
*3.12.* $f(x)=-2x^2+3x-4.$
*3.13.* $f(x)=6x^2+2x+1.$
*3.14.* $f(x)=5x^2-2x+2.$
*3.15.* $f(x)=-3x^2+x-2.$

**4.** *Привести матрицы $A, B, C$ из задания 1 к ступенчатому виду.*

**5.** *Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.*

5.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + x_3 = 1 - i \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (1-2i)x_2 = 1 - i \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (i-4)x_3 = 1 \\ x_1 + ix_2 + x_3 = i + 2 \\ 3x_1 + (i-1)x_2 + ix_3 = i + 3 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2ix_3 = 4 - 2i \\ 2x_1 - 2ix_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (4-2i)x_2 + (4-2i)x_3 = 4 - 2i \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + ix_2 - (1+i)x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 3ix_3 = i \\ x_1 + (1+i)x_2 + (2i-1)x_3 = 2 + i \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - ix_3 = 4 \\ -2x_1 + (i-2)x_2 + x_3 = 4i \\ x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 1 + 4i \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2ix_3 = i + 4 \\ -3x_1 - ix_2 + 2x_3 = 4 - i \\ -2x_1 + (2-i)x_2 + (2-2i)x_3 = 5 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = -2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2ix_3 = 4 \\ 2x_1 + ix_2 - x_3 = -4 + 2i \\ x_1 - (1+i)x_2 + (1+2i)x_3 = 8 - 2i \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + ix_2 + (3-3i)x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = i - 2 \\ x_1 + (1+i)x_2 - 3ix_3 = i \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - (2-3i)x_3 = i \\ 2x_1 - ix_2 - 3ix_3 = 1 \\ x_1 + (2-i)x_2 - 2x_3 = 1 + i \end{cases}$

*5.10.* $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 2i \\ x_1 - x_2 - (1+i)x_3 = 5 - 2i \end{cases}$

*5.11.* $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 3ix_2 + 2x_3 = 2 - i \\ -2x_1 + 3x_2 - ix_3 = 1 \\ -x_1 + (3-3i)x_2 + (2-i)x_3 = 3 - i \end{cases}$

*5.12.* $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ -3x_1 + ix_2 + 2x_3 = 4 - i \\ -x_1 + (i-1)x_2 + (3-i)x_3 = 6 - i \end{cases}$

*5.13.* $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x_1 + 2ix_2 + ix_3 = 1 + 2i \\ 2x_1 - ix_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 2 + 2i \end{cases}$

*5.14.* $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + (1+2i)x_3 = 3i \\ 4x_1 - 2ix_2 - 2ix_3 = 1 + i \\ 3x_1 + (1-2i)x_2 + x_3 = 1 + 4i \end{cases}$

*5.15.* $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + ix_3 = 2 - 3i \\ -4x_1 + ix_2 - (1+i)x_3 = -2 \\ -2x_1 + (i-3)x_2 - x_3 = -3i \end{cases}$

**6.** *Матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными, если $AB = BA$. Найти все матрицы с действительными элементами, перестановочные с матрицей $A$.*

*6.1.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.2.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.3.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*6.4.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.5.*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.6.*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.7.*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.8.*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.9.*
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.10.*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*6.11.*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.12.*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

*6.13.*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*6.14.*
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

*6.15.*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*ЛАБРАТОРНАЯ РАБОТА № 5*
**Определители**

Вопросы для самоконтроля

**1.Формула определителя**

*Формула определителя: число слагаемых в правой части формулы, число сомножителей в каждом слагаемом, представители строк и столбцов, знак слагаемого. Определители второго и третьего порядка. Определитель треугольной матрицы. Определитель матрицы с нулевой строкой или столбцом.*

**2.Свойства определителей**

*Действия над матрицей, не меняющее её определитель (транспонирование, умножение строки на число и прибавление к другой строке). Свойства определителей, связанные с пропорциональными строками, перестановкой строк, умножение строки на число, разложение строки в сумму.*

**3.Определитель клеточных матриц**

*Вычисление определителей клеточных матриц* $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$, *где $A$ и $B$ — квадратные матрицы порядков $n$ и $m$.*

**4. Определитель произведения матриц**

*Доказательство мультипликативности определителя.*

**5. Миноры и алгебраические дополнения**

*Минор элемента матрицы и алгебраическое дополнение. Лемма об определителе матрицы, у которой все элементы – строки, кроме может быть одного, равны нулю. Вычисление определителя разложением по строке. Равенство нулю суммы произведений элементов строки на алгебраические дополнения к элементам другой строки.*

**6.Формула обратной матрицы**

*Определения обратной и обратимой матрицы. Единственность обратной матрицы. Матрица, обратная к произведению обратимых матриц. Присоединённая матрица. Произведение матрицы и присоединённой. Формула обратной матрицы. Невырожденная матрица. Критерий обратимости квадратной матрицы.*

**7.Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований**

*Элементарные матрицы. Связь элементарных преобразований с умножением на элементарные матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.*

**8.Определитель Вандермонда**

*Определение определителя Вандермонда и способ его вычисления.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР1 *Выбрать i, j, k таким образом, чтобы слогаемое* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{4j}$ *входило в развёрнутое выражение определителя четвёртого порядка со знаком "минус".*

РЕШЕНИЕ *Так как слагаемое развёрнутого выражения определителя представляет собой произведение элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, то в слагаемом* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{4j}$ *первые индексы исчерпываются четырьмя цифрами: 1,2,3,4. Поскольку цифры 1,2,3,4 присутствуют, то j=1.*

*Знак слагаемого* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{4j}$ *равен знаку перестановки*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ i & k & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & k & 2 & i \end{pmatrix}$$

*так как цифры нижней строки перестановки не превышает 4 и все различны, то имеет место два случая:*

$1)k = 3; i = 1; 2)k = 1; i = 3.$

*Рассмотрим эти случаи.*

$$1)\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)$$

$$sgn\alpha = (-1)^{4-2} = (-1)^2 = 1$$

*т.е. перестановка* $\alpha$ *имеет знак "плюс".*

$$2)\alpha = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1432)$$

$$sgn\alpha = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$$

*т.е. перестановка* $\alpha$ *имеет знак "минус".*

*Таким образом, при* $j = 1, i = 3, k = 1$ *слагаемое* $a_{4i}, a_{2k}, a_{32}, a_{j4}$ *входят в развёрнутое выражение определителя четвёртого порядка со знаком со знаком "минус".*

ОТВЕТ: $i = 3, j = 1, k = 1$

Пример 2.*Вычислить определители*

*a)* $\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}$, *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Решение. *a) Вычтем из первой строки определителя вторую. Тогда* $\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} =$ $1000(-22251 + 56823) = 1000 \cdot 34572 = 34572000$

*b) Данный определитель является определителем Вандермонда, так как*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \end{vmatrix}$$

*Поэтому* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \end{vmatrix} = (5-2)(-1-2)(-1-5) = 54$

Пример 3*Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду.*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. *Поменяем местами первую и вторую строки определителя. От этого преобразования знак определителя изменится на противоположный, т.е.*

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

*Известно, что если все элементы некоторой строки умножить на число и сложить с элементами другой строки, то значение определителя не изменится. Применяя только это преобразование, приведём определитель к треугольному виду.*

$-\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

*Мы во второй строке прибавили первую, умноженную на 2, а к третьей прибавили первую, умноженную на (-1). Затем к третьей строке прибавили вторую, умноженную на* $\frac{3}{5}$, *и получили определитель треугольного вида.*

*Так как определитель треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)(-5)\cdot 1 = -5.$$

Ответ: $-5$.

Замечание. *Часто бывает полезно при вычислении определителя привести его к определителю клеточной матрицы с помощью преобразований из примера 3.*

Пример 4. *Найти матрицу, обратную к матрице $A$ с помощью алгебраических дополнений.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Решение. *Для нахождения обратной матрицы воспользуемся формулой*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

*Вычислим $detA$ и алгебраические дополнения $A_{ij}$ и подставим их в формулу.*

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot(-1) + (-1)(-1)(-1) - (-$$

$-1)\cdot 2\cdot(-1) - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2(-1)) + (1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot(-$
$-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot(-1) - -2\cdot 1\cdot 1) = -5 + 6 = 1.$

*Здесь определитель четвёртого порядка мы разложим по элементам третьего столбца, так как в этом столбце наибольшее число нулей. Определители третьего порядка вычислены по правилу Саррюса.*

$$A^{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A^{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$A_{13} = 5$, $A_{14} = 3$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -9$, $A_{24} = -5$,$A_{31} = 1$, $A_{32} = -1$,$A_{33} = 6$, $A_{34} = 3$, $A_{41} = -2$, $A_{42} = 3$, $A_{43} = -13$, $A_{44} = -7$.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -9 & 6 & -13 \\ 3 & -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

.

*Нетрудно проверить, что* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, *т.е.* $A^{-1}$*— обратная матрица для матрицы* $A$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -9 & 6 & -13 \\ 3 & -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

Пример 5.*С помощью элементарных преобразований найти матрицу, обратную матрице* $A$. *Сделать проверку.*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. *Запишем матрицу* $A|E$, *где* $E$*— единичная матрица, и преобразовав её с помощью элементарных преобразований строк таким образом, чтобы получилась матрица вида* $E|B$. *матрица* $B$ *будет обратной к матрице* $A$.

$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

*Мы оставим первую строку без изменений, ко второй прибавили первую, умноженную на* $(-2)$, *к третьей прибавили первую. Теперь к третьей строке прибавим вторую. Получим матрицу*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

*В этой матрице умножим третью строку на* $\frac{1}{2}$. *Затем прибавим третью строку, умноженную на* $(-2)$, *ко второй, а также сложим первую и третью строки.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$ *Остаётся к первой строке прибавить вторую, а вторую строку умножить на* $(-1)$. *Получим матрицу*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E|B).$$

*Следовательно,*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Проверка. *Покажем, что* $B = A^{-1}$, *т.е. B является матрицей, обратной к матрице* $A$. *для этого нужно проверить выполнение равенств* $AB = BA = E$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+1-\frac{1}{2} \\ -1+1+0 & 1+0+0 & -1+1+0 \\ \frac{-1}{2}+0-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}+0 & \frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} \\ 1+0-1 & 1+0+0 & -1+0+1 \\ \frac{-1}{2}+1-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}+0 & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## Задание к лабораторной работе

**1.** *Выбрать значения i,j,k так, чтобы произведение m входило в развёрнутое выражение определителя шестого порядка со знаком "минус".*

*1.1.* $m = a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$.

*1.2.* $m = a_{j3}a_{14}a_{5i}a_{k1}a_{26}a_{45}$.

*1.3.* $m = a_{32}a_{i1}a_{46}a_{1j}a_{2k}a_{63}$.

*1.4.* $m = a_{62}a_{i1}a_{4j}a_{25}a_{5k}a_{34}$.

*1.5.* $m = a_{4i}a_{j2}a_{36}a_{k5}a_{61}a_{53}$.

*1.6.* $m = a_{ij}a_{13}a_{4k}a_{62}a_{54}a_{31}$.

*1.7.* $m = a_{2i}a_{32}a_{j6}a_{k5}a_{51}a_{63}$.

*1.8.* $m = a_{16}a_{i3}a_{4j}a_{k1}a_{25}a_{32}$.

*1.9.* $m = a_{44}a_{2j}a_{k3}a_{65}a_{i6}a_{31}$.

*1.10.* $m = a_{26}a_{3j}a_{1k}a_{55}a_{64}a_{i1}$.

*1.11.* $m = a_{11}a_{2i}a_{63}a_{4k}a_{j6}a_{34}$.

*1.12.* $m = a_{i6}a_{2j}a_{3k}a_{13}a_{34}a_{62}$.

*1.13.* $m = a_{15}a_{i2}a_{j4}a_{51}a_{36}a_{2k}$.

*1.14.* $m = a_{23}a_{4k}a_{j6}a_{5i}a_{11}a_{34}$.

*1.15.* $m = a_{42}a_{i5}a_{66}a_{3j}a_{1k}a_{51}$.

**2.** *Вычислить определители матриц A,B,C.*

*2.1.* $A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3i & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3-i \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

*2.2.* $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 23528 & 43621 \\ 24528 & 44621 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} i-1 & 2 & 2 \\ -3 & 4i & 0 \\ 1 & -2 & -i \end{pmatrix}$

*2.3.* $A = \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 10159 & 6523 \\ 11259 & 7623 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} i & 2 & i-1 \\ 3 & 5 & 4i \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

*2.4.* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 3i & i+1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 12253 & 17829 \\ 12363 & 17839 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4-i & 2 & 3+i \\ -3 & -2 & 1-i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$

*2.5.* $A = \begin{pmatrix} 6-i & 8 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 21351 & -22351 \\ 16273 & -17273 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4i & 3+i & 1 \\ -5 & 2-i & 1 \\ 7i & -1 & -1 \end{pmatrix}$

*2.6.*

$A = \begin{pmatrix} 4i & 3+2i \\ 5 & -5+i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -13297 & 26153 \\ -13397 & 26253 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 7i & -1+i \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & i & 1-i \end{pmatrix}$

*2.7.*

$$A = \begin{pmatrix} 8i & 9-i \\ -1 & 3i+2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 17324 & -11526 \\ 27324 & -21526 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 4i & -3 & 5+2i \\ 1 & 2 & 6-i \\ -1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

*2.8.*

$$A = \begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ 1 & i+6 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 14326 & 15326 \\ -95623 & -96623 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 0 & -2-i & 1+i \\ -i & 1 & 2+i \\ -1 & i & 2+3i \end{pmatrix}$$

*2.9.*

$$A = \begin{pmatrix} 4+i & 6-i \\ 9i & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -35201 & 26731 \\ 35211 & -26741 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 3i & 2+i & 0 \\ 2-3i & 1 & 6-i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

*2.10.*

$$A = \begin{pmatrix} -7+i & 6i \\ 6-i & 7 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 27802 & 28802 \\ 11935 & 12935 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -4 & 3+2i & 2i \\ -i & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

*2.11.*

$$A = \begin{pmatrix} 5-2i & -2 \\ -i & 4+3i \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 17932 & 25113 \\ 13932 & 21113 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -i & 2 & 3+2i \\ 2 & 0 & -i \\ 2i & 2 & 2-i \end{pmatrix}$$

*2.12.*

$$A = \begin{pmatrix} 6-i & 7+2i \\ 8i & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 33253 & -16821 \\ 31253 & -14821 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} -1-2i & 2i & 0 \\ 0 & 1-3i & 3 \\ i & -1 & 1+i \end{pmatrix}$$

*2.13.*

$$A = \begin{pmatrix} -4i & 2+3i \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 71815 & -23526 \\ 71805 & -23516 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 1-3i \\ 1 & 2 & 2i \\ 1 & 3+i & 3-i \end{pmatrix}$$

*2.14.*

$$A = \begin{pmatrix} 3i-1 & 2 \\ i & 2i+3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 84434 & -84534 \\ 12796 & -12896 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 1-i \\ 3 & 2 & -1+i \\ 2 & 6i & -i \end{pmatrix}$$

*2.15.*

$$A = \begin{pmatrix} -4+3i & 2i \\ 5-i & -3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 66437 & 41432 \\ -66337 & -41332 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} i & i+1 & 2-3i \\ 1 & -2 & 0 \\ 4i & -3 & 5+i \end{pmatrix}$$

**3.** *Вычислить определители матриц F и H приведением их к треугольному виду.*

$$3.1.\ F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3.2.\ F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.3.\ F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.4.\ F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.5.\ F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3.6.\ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3.7.\ F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*3.8.* $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

*3.9.* $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

*3.10.* $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*3.11.* $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

*3.12.* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

*3.13.* $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

*3.14.* $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

*3.15.* $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

**4.** *Вычислить:*

*а) определитель матрицы $C$ из задания 2 разложением по элементам второго столбца;*

*б) определитель матрицы $F$ из задания 3 разложением по элементам третьей строки.*

**5.***Найти члены определителя, содержащие $x^2$ и $x^3$.*

*5.1* $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ *5.2.* $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$

*5.3.* $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ *5.4.* $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$

*5.5.* $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$ *5.6.* $\begin{vmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{vmatrix}$

*5.7.* $\begin{vmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{vmatrix}$ *5.8.* $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix}$

*5.9.* $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$ *5.10.* $\begin{vmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$

*5.11.* $\begin{vmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{vmatrix}$ *5.12.* $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{vmatrix}$

*5.13.* $\begin{vmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -112 & 4 & 1 & \\ x & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ *5.14.* $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}$

*5.15.* $\begin{vmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$

**6.** *Вычислить определитель порядка n.*

*6.1.* $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

*6.2.* $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

*6.3.* $$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

*6.4.* $$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

*6.5.* $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

*6.6.* $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

*6.7.* $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

*6.8.* $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

*6.9.* $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 \end{vmatrix}$$

*6.10.* $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

*6.11.* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \end{vmatrix}$ *6.12.* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & & 11 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

*6.13.* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ *6.14.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

*6.15.* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

**7.** *Используя формулы определителей клеточных матриц, решить уравнение*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & j & j \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ i & i & 5 & 5 \\ -i & -i & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0$$

*где $i$,$j$ — числа, вычисленные в задании 1.*

**8.** *Вычислить определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n-1 & n & n+1 \\ (n-1)^2 & n^2 & (n+1)^2 \end{vmatrix}$$

*где $n$— номер варианта.*

**9.***Найти матрицы, обратные матрицам $A$, $C$ из задания 2 и матрице $F$ из задания 3, с помощью алгебраических дополнений.*

**10.** *Найти матрицы, обратные матрицам $A$ из задания 2 и $F$ из задания 3 с помощью элементарных преобразований.*

*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6*

## Системы линейных уравнений.

### *Вопросы для самоконтроля.*

**1. Правило Крамера**

*Определение крамеровской системы линейных уравнений, число её решений. Правило Крамера нахождения решения систем линейных уравнений. Матричный способ нахождения систем линейных уравнений.*

**2. Ранг матрицы**

*Минор r-го порядка. Лемма о минорах $(r+1)$-го порядка. Определение ранга матрицы. Элементарное преобразование матрицы и её ранг. Ранг ступенчатой матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.*

**3. Теорема Кронекера-Капелли.**

*Доказательство теоремы Кронекера-Капелли. Главные и свободные неизвестные. Алгоритмы нахождения решений систем линейных уравнений.*

**4. Однородные системы линейных уравнений.**

*Определение однородной системы линейных уравнений, её совместность. Теорема о существований ненулевых решений однородной системы и её следствия.*

Примеры решений и оформления задач.

Пример 1 *Дана система линейных уравнений.*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

*Проверить, совместна ли эта система и в случае совместности решить её: а) матричным методом, б) методом Гаусса.*

Решение. *Совместность данной системы проверим по теоремы Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдём ранг матрицы.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*данной системы и ранг расширенной матрицы*

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

*Будем преобразовывать расширенную матрицу*

$$B \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Так как число ненулевых строк в ступенчатом виде матриц $A$ и $B$ равно 3, то ранги матриц $A$ и $B$ равны ($rangA = rangB = 3$). Значит, исходная система совместна. Так*

*как ранги матриц $A$ и $B$ равны числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

*а) Для решения системы матричным методом выделим в системе число уравнений, равное рангу матрицы, таким образом, чтобы определитель из коэффициентов при неизвестных в выбранных уравнениях был отличен от нуля. Этим условиям удовлетворяют уравнения*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

*так как определитель*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

*Эту систему можно записать в матричном виде $AX = B$, где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение системы в матричной форме имеет вид $X = A^1B$.*

*Так как*

$$A^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

*то*

$A^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

*Значит* $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0.$

*б) Для решения системы методом Гаусса воспользуемся полученной ступенчатой матрицей*

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

.

*Запишем систему, соответствующую этой матрице.*

$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$

*Из третьего уравнения найдём* $x_3 = 0$. *Подставляя его во второе уравнение, получим* $x_2 = 2$. *Из первого уравнения* $x_1 = -1$.

Проверка .

$\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 = 4 \\ 2 \cdot (-1) + 2 + 3 \cdot 0 = 0 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 = 1 \\ -1 - 2 = -3 \end{cases}$

*Ответ:* $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0.$

Пример 2.*Дана система линейных уравнений*

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$

*Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить:*

*а) методом Гаусса б)по правилу Крамера.*

Решение. *Вычислим ранг расширенной матрицы*

$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

*Следовательно,* $rangA = rangB = 2$. *Система совместна. Так как число неизвестных больше ранга матриц* $A$ *и* $B$, *то система имеет бесконечно* *много решений.*

*а) Для решения системы методом Гаусса воспользуемся ступенчатой матрицей. Запишем систему, соответствующую этой матрице.*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

*В ступенчатой матрице*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Выбираем ненулевой минор $D$ порядка, равного рангу матрицы $A$. В качестве $D$ можно взять минор*

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$

*составленный из коэффициентов при $x_2, x_1$. Тогда $x_1, x_2$— главные неизвестные, которые мы выразим через остальные— свободные неизвестные. Для этого оставим главные неизвестные слева, а свободные перенесём вправо.*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 + 2 \\ -x_2 = -3x_3 + x_4 + 7 \end{cases}$$

*Тогда*

$$\begin{cases} x_1 = -5 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -7 + 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

$x_3, x_4$— *любые числа.*

*б) В матрице системы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

*выберем ненулевой минор $D$ порядка 2=rang$A$. Пусть минор*

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

.

*составлен из коэффициентов при $x_2, x_4$ в первом и втором уравнениях. Тогда $x_2, x_4$ — главные неизвестные. Оставим в системе уравнения, соответствующие строкам минора $D$, и оставим в левой части уравнений главные неизвестные. Получим крамеровскую систему*

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 2 - x_1 - 2x_3 \\ x_2 + 3x_4 = 3 + 2x_1 + x_3 \end{cases}$$

*По формулам Крамера*

$x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, *где* $\Delta = D = -2$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 - x_1 - 2x_3 & -1 \\ 3 + 2x_1 + x_3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - x_1 - 5x_3.$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 - x_1 - 2x_3 \\ 1 & 3 + 2x_1 + x_3 \end{vmatrix} = -5 - x_1 + x_3.$

*находим*

$x_2 = \frac{-9}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_3$, $x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$,

$x_1, x_2$ *—любые числа.*

Пример 3.*Исследовать систему на совместность и найти решения в зависимости от значений* $\lambda$*:*

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ -3x_1 + x_2 - \lambda \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение. *Преобразуем расширенную матрицу* $B$ *системы.*

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -3 + 2\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 1 - 3\lambda & 3 - \lambda & 3 \end{array}\right)$

*Если* $-3 + 2\lambda = 0$ *(т.е.* $\lambda = \frac{3}{2}$*), то*

$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

*В этом случае ранг матрицы* $A$ *системы уравнений равен двум, а ранг расширенной матрицы* $B$ *равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.*

*Пусть* $\lambda \neq \frac{3}{2}$*. Тогда*

$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -3 + 2\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 0 & (-3 + 2\lambda) \cdot (3 - \lambda) & -6\lambda - 5 \end{array}\right)$

*Если* $\lambda = 3$*, то*

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{array}\right)$$

*Тогда* $rangA = 2, rangB = 3$*. Система несовместна.*

*Если $\lambda \neq 3$, то $rangA = rangB = 3$. Система совместна и имеет единственное решение , которое найдём из системы*

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ (-3+2\lambda)x_2 = -4 \\ (-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)x_3 = -6\lambda - 5 \end{cases}$$

$x_3 = \frac{-6-\lambda-5}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$, $x_2 = \frac{-4}{-3+2\lambda}$, $x_1 = \frac{2\lambda^2+3\lambda-4}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$.

**Ответ:** *система не совместна при $\lambda = \frac{3}{2}$ или $\lambda = 3$, при $\lambda \neq \frac{3}{2}$ и $\lambda \neq 3$ система имеет единственное решение*
$x_3 = \frac{-6-\lambda-5}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$, $x_2 = \frac{-4}{-3+2\lambda}$, $x_1 = \frac{2\lambda^2+3\lambda-4}{(-3+2\lambda)\cdot(3-\lambda)}$.

## Задание к лабораторной работе.

**1.** *Исследовать системы на совместность и решить двумя способами:*
*а) по правилу Крамера;*
*б)матричным методом.*

*1.1.* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 i + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$

*1.2.* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - ix_3 = -2 - 2i \\ -x_1 + 2ix_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - ix_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

*1.3.* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} (2-i)x_1 + x_2 - x_3 = -1 - i \\ x_1 - (2+i)x_3 = 1 - 2i \\ 3x_1 - x_2 + 2ix_3 = -1 \end{cases}$

*1.4.* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} (1-i)x_1 - 2x_2 = -1 - i \\ x_1 - 2x_2 + ix_3 = 0 \\ 3x_1 - ix_2 + 2x_3 = 2 - 3i \end{cases}$

*1.5.* $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 i - x_2 + (1-i)x_3 = 1 - i \\ 2x_1 + ix_2 - 3x_3 = i - 3 \\ -3x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = -3 - 4i \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-3x_4=4 \\ x_1+3x_2-x_4=6 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=-6 \\ 3x_1+5x_2-3x_3+2x_4=5 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1+3ix_2-x_3=-1 \\ -ix_1+x_2-2x_3=-4-2i \\ 3x_1-ix_2+x_3=4 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=16 \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4=6 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=9 \\ x_2+5x_3-4x_4=-13 \end{cases}$ $\begin{cases} -2ix_1+x_2-x_3=-3i \\ x_1+(1-2i)x_2+2x_3=-1-i \\ 2x_1-ix_2+2x_3=1 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+4x_4=16 \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4=6 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=9 \\ x_2+5x_3-4x_4=-13 \end{cases}$ $\begin{cases} (1-2i)x_1+x_2-x_3=-1-i \\ x_1-(1-i)x_2+2x_3=1+i \\ -3x_1+x_2-(2+i)x_3=2i \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=-3 \\ 4x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1i-x_2+(1-i)x_3=3 \\ x_1-(1+2i)x_2=2+2i \\ -2x_1+4x_2-ix_3=-6-2i \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=-7 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=-4 \\ 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2 \\ -3x_1-x_2+4x_3-x_4=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-4ix_2+x_3=-4 \\ ix_1-2x_2-3x_3=3+i \\ -2x_1+(1-2i)x_3=3-2i \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=3 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=3 \\ -x_1+5x_2-3x_3+4x_4=14 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+2x_4=3 \end{cases}$ $\begin{cases} (2+i)x_1-x_2+2x_3=-2-3i \\ x_1-4ix_2+ix_3=i+2 \\ -2x_1+x_2-(1-i)x_3=3+2i \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=8 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-1 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=4 \end{cases}$ $\begin{cases} (-1+i)x_1+2x_2-x_3=3i-2 \\ x_1-(i+2)x_2+2x_3=2-2i \\ -3x_1+x_2-4ix_3=-10 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3-4x_4=3 \\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=-13 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=4 \\ 2x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$ $\begin{cases} (i+2)x_1-2x_2+3x_3=-2-3i \\ 2x_1-(2i+1)x_2=-1-2i \\ -3x_1+2x_2-(1-2i)x_3=4+i \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3-4x_4=11 \\ 4x_1+5x_2 3x_3+x_4=-6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-9 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=6 \end{cases}$ $\begin{cases} -ix_1+2x_2-3x_3=-2-4i \\ 2x_1-(1-i)x_2+ix_3=2-i \\ x_1-ix_2+4x_3=1+5i \end{cases}$

*1.15.* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} (3-i)x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 - 4i \\ x_1 - ix_2 + x_3 = -2i \\ -2x_1 + 2x_2 - (1-i)x_3 = 3 + i \end{cases}$

**2.** *Исследовать систему на совместность и решить тремя способами :*
*а)методом Гаусса*
*б) по правилу Крамера*
*в)матричным методом*

*2.1.* $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ *2.2.* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

*2.3.* $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$ *2.4.* $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

*2.5.* $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases}$ *2.6.* $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

*2.7.* $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$ *2.8.* $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

*2.9.* $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 10 \end{cases}$ *2.10.* $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -4 \end{cases}$

*2.11.* $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$ *2.12.* $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

*2.13.* $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$ *2.14.* $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

*2.15.* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9 \end{cases}$

**3.** *Исследовать системы на совместность. Совместную систему решить методом Гаусса.*

*3.1.* $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + ix_3 = -3 + i \\ (-1+2i)x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$

*3.2.* $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} ix_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + ix_3 = i \\ (2+i)x_1 - 5x_2 + (3+i)x_3 = -3 \end{cases}$

*3.3.* $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 2 \\ -ix_1 + x_2 - (1-i)x_3 = -2i \\ (1-i)x_1 + (1-2i)x_2 + (2+i)x_3 = 5 \end{cases}$

*3.4.* $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -8 \\ 5x_2 + x_3 = -6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + (1-2i)x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2i \\ -3x_1 + x_2 - 2ix_3 = 0 \end{cases}$

*3.5.* $\begin{cases} -x_1 + 3x2 + 7x_3 = -5 \\ 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + x_3 = -3 \\ -ix_1 + 2x_2 = -3 + i \\ (1+i)x_1 - (2+2i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

*3.6.* $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = -10 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - (1+i)x_3 = 2i \\ -x_1 + ix_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 2 \end{cases}$

*3.7.* $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 1 - i \\ -x_1 + 4ix_2 - 4x_3 = 2 + i \\ 2x_1 + 2ix_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

*3.8.* $\begin{cases} -3x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ ix_1 + x_2 = -i \\ (1+i)x_1 + (1-i)x_2 + (1-i)x_3 = 5 \end{cases}$

*3.9.* $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ix_1 - (2+i)x_2 - x_3 = -1 \\ 2ix_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4i \\ ix_1 + ix_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

*3.10.* $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 4ix_2 + (1+i)x_3 = 2 + i \\ -3x_1 + x_2 - ix_3 = 2 + 2i \\ 4x_1 - (1+4i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

*3.11.* $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (3i-1)x_3 = 4 + i \\ -x_1 + 4x_2 - ix_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + (4i-1)x_3 = 3 \end{cases}$

*3.12.* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 2ix_2 - (1+i)x_3 = 2 - i \\ 3x_1 - 4x_2 + ix_3 = 4 \\ 2x_1 + (2i-4)x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

*3.13.* $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 4x_3 = 13 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 - 2ix_2 + ix_3 = 1 - 2i \\ -x_1 + (4+2i)x_2 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ix_3 = 4 \end{cases}$

*3.14.* $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - (1-i)x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + ix_3 = 3 - i \\ -x_1 - 3x_2 - (1-2i)x_3 = 4 \end{cases}$

*3.15.* $\begin{cases} -3x_1+2x_2=8 \\ 2x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1+x_2-2x_3=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} ix_1+2x_2-3x_3=1-i \\ (1-i)x_1+4x_3=2i \\ x_1+2x_2+x_3=5 \end{cases}$

**4.** *Решить однородную систему:*

*4.1.* $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$ *4.2.* $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=0 \end{cases}$

*4.3.* $\begin{cases} 4x_1-x_2+10x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+3x_3=0 \end{cases}$ *4.4.* $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=0 \\ 4x_1+6x_2+3x_3=0 \\ x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$

*4.5.* $\begin{cases} 3x_1-x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$ *4.6.* $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-x_3=0 \end{cases}$

*4.7.* $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 5x_1+x_2+4x_3=0 \end{cases}$ *4.8.* $\begin{cases} 5x_1-5x_2+4x_3=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-6x_2+x_3=0 \end{cases}$

*4.9.* $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0 \\ 2x_1+5x_2-2x_3=0 \\ x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$ *4.10.* $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_1+3x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+x_2+6x_3=0 \end{cases}$

*4.11.* $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1+2x_2-4x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ *4.12.* $\begin{cases} 6x_1+5x_2-4x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$

*4.13.* $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ 7x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$ *4.14.* $\begin{cases} 8x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \\ 4x_1-7x_2+2x_3=0 \end{cases}$

*4.15.* $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0 \\ x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

**5** *Исследовать систему и найти решения в зависимости от значений параметра $\lambda$:*

$$\begin{cases} x_1+(n-7)x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-1 \\ (n-8)x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$$

*где $n$— номер варианта.*

*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7*

# МНОГОЧЛЕНЫ

Вопросы для самоконтроля

### 1. ПОСТРОЕНИЕ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ

*Последовательности, их сложение, умножение. Проверка аксиом кольца. Введение переменного x. Запись многочлена по возрастающим и убывающим степеням x. Степень многочлена. Степень суммы и произведения многочленов.*

### 2. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ В КОЛЬЦЕ МНОГОЧЛЕНОВ

*Доказательство теоремы о делении с остатком. Неполное частное, остаток.*

### 3. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

*Делимость многочленов и ее свойства. Наибольший общий делитель и его нахождение с помощью алгоритма Евклида.*

### 4. ВЫРАЖЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ ЧЕРЕЗ ИСХОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

*Доказательство теоремы о выражении НОД через исходные многочлены. Взаимно простые многочлены. Следствие теоремы для взаимно простых многочленов. Теорема о делимости произведения двух многочленов на многочлен, взаимно простой с одним из сомножителей.*

### 5. НЕПРИВОДИМЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

*Определение неприводимого многочлена. Зависимость неприводимости от поля. Свойства неприводимых многочленов. Однозначность разложения на неприводимые множители в кольце многочленов. Каноническое разложение многочлена и нахождение НОД.*

### 6. ПРОИЗВОДНАЯ МНОГОЧЛЕНА

*Определение производной многочлена и ее вычисление. Кратность неприводимого множителя и ее понижение при дифференцировании. НОД многочлена и производной.*

### 7. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

*Определение корня многочлена. Теорема Безу. Кратность корня и ее понижение при дифференцировании. Число корней многочлена и его степень. Отсутствие кратных корней многочлена.*

### 8. СХЕМА ГОРНЕРА

### 9. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

*Определение алгебраически замкнутого поля. Теорема Гаусса и ее следствия. Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел. Формулы Виета.*

## 10. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

*Теорема о сопряженности комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами и ее следствия. Разложение многочлена на множители.*

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. *В кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ найти частное $q(x)$ при делении $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ на $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Указать остаток $r(x)$.*

Решение. *Напомним, что кольцо $\mathbb{Z}_5$ состоит из элементов $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ можно записать следующим образом:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{4}, \\ g(x) &= x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{4}. \end{aligned}$$

*Разделим $f(x)$ на $g(x)$:*

$$\begin{array}{r|l} -\; x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{4} & x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{4} \\ \cline{2-2} x^4 + x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{4}x \phantom{{}+\overline{4}} & x + \overline{1} \\ \cline{1-1} -\; x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4} & \\ x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{4} & \\ \cline{1-1} \overline{2}x^2 + \overline{3}x \phantom{{}+\overline{4}} & \end{array}$$

*Следовательно, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где частное $q(x) = x + 1$, а остаток $r(x) = 2x^2 + 3x$.*

Ответ: $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x^2 + 3x$. Пример 2. *Найти НОД многочленов $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x - 2$ и $g(x) = 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2$ и выразить его через эти многочлены.*

Решение. *Используем алгоритм Евклида. Делим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком:*

$$\begin{array}{r|l} -\; 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x + 2 & 3x^2 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 & 4 \\ \cline{1-1} 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 & \end{array}$$

*Далее делим $g(x)$ на первый остаток:*

$$\begin{array}{r|l} -\; 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 & 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 \\ \cline{2-2} 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x \phantom{{}+2} & \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \\ \cline{1-1} -\; -6x^3 - 11x^2 - \frac{5}{3}x + 2 & \\ -6x^3 - 10x^2 - 4x + \frac{8}{3} & \\ \cline{1-1} -x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} & \end{array}$$

*Теперь делим первый остаток на второй:*

$$\begin{array}{r|l}
-\;9x^3+15x^2+\;6x\;-\;4 & -x^2+\frac{7}{3}x-\frac{2}{3} \\ \cline{2-2}
\underline{9x^3-21x^2+\;6x\qquad} & -9x-36 \\
-\;36x^2\qquad\;-\;4 & \\
\underline{36x^2-84x+24} & \\
84x-28 &
\end{array}$$

*Делим второй остаток на третий:*

$$\begin{array}{r|l}
-\;-x^2+\frac{7}{3}x-\frac{2}{3} & \;\;84x\;-28 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^2+\frac{1}{3}x\qquad} & -\frac{1}{84}x+\frac{1}{42} \\
-\;2x-\frac{2}{3} & \\
\underline{2x-\frac{2}{3}} & \\
0 &
\end{array}$$

*Итак, последний отличный от нуля остаток, т.е. НОД*$(f(x),g(x))$ *равен* $84x-28$. *Найдем теперь его представление через* $f(x)$ *и* $g(x)$. *Вначале запишем последовательность Евклида для данных многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$:

$$f(x)=1\cdot g(x)+r_1(x),$$

$$g(x)=(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})r_1(x)+r_2(x),$$

$$r_1(x)=(-9x-36)r_2(x)+r_3(x).$$

*Заметим, что* $r_3(x)=$ *НОД*$(f(x),g(x))$. *Теперь будем двигаться в алгоритме Евклида снизу вверх:*

$$\begin{aligned}
r_3(x) &= r_1+(9x+36)r_2(x)= \\
&= r_1(x)+(9x+36)(g(x)-(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})r_1(x))= \\
&= r_1(x)+(9x+36)g(x)-(9x+36)(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})r_1(x)= \\
&= (9x+36)g(x)+(-3x^2-6x+25)r_1(x)= \\
&= (9x+36)g(x)+(-3x^2-6x+25)(f(x)-g(x))= \\
&= (-3x^2-6x+25)f(x)+(3x^2+15x+11)g(x).
\end{aligned}$$

Ответ: *НОД*$(f(x),g(x))=84x-28=(-3x^2-6x+25)f(x)+(3x^2+15x+11)g(x)$.

Пример 3. *Разложить многочлен* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ *на неприводимые множители над полями* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{C}$.

Решение. *Найдем все корни многочлена* $f(x)$. *Возможные целые корни многочлена* $f(x)$ *являются делителями свободного члена* $(-4)$. *Легко проверить, что* $x_1 = -1$ *и* $x_2 = 2$ — *корни многочлена* $f(x)$. *Следовательно,* $f(x)$ *делится на* $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 & x^2 - x - 2 \\
\cline{2-2}
x^4 - x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2x + 2 \\
\cline{1-1}
-\,-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 & \\
-2x^3 + 2x^2 + 4x \quad\; & \\
\cline{1-1}
-\,2x^2 - 2x - 4 & \\
2x^2 - 2x - 4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

*Решая уравнение* $x^2 - 2x + 2 = 0$, *находим остальные корни:* $x_3 = 1 + i$, $x_4 = 1 - i$.

*а) Так как неприводимыми над полем* $\mathbb{C}$ *являются только многочлены первой степени, то искомое разложение* $f(x)$ *над* $\mathbb{C}$ *имеет вид*

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i).$$

*б) Неприводимыми над полем* $\mathbb{R}$ *являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Поэтому разложение* $f(x)$ *на неприводимые множители над* $\mathbb{R}$ *имеет вид*

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 2).$$

Пример 4. *Разложить многочлен* $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ *по степеням* $(x-1)$.

Решение. *Чтобы найти коэффициенты разложения многочлена* $f(x)$ *по степеням* $x-1$, *нужно по схеме Горнера поочередно разделить с остатком на* $x-1$ *многочлен* $f(x)$, *затем первое неполное частное, второе неполное частное и т.д. Получаемые при этом остатки и являются искомыми коэффициентами.*

| | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 6 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | 4 | 10 | 21 | |
| 1 | 1 | 5 | 15 | | |
| 1 | 1 | 6 | | | |
| 1 | 1 | | | | |

*Искомое разложение многочлена $f(x)$ имеет вид*

$$f(x) = 12 + 21(x-1) + 15(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Замечание. *Остаток при делении многочлена $f(x)$ на $x-a$ является значением многочлена $f(x)$ при $x = a$. Например, в примере 4 значение $f(1) = 12$.*

*Из примера 4 легко найти значение производных многочлена $f(x)$ при $x = 1$, не вычисляя самих производных. Остатки при делении $f(x)$ на $x-1$ связаны с производными*

$$\frac{f'(1)}{1!} = 21, \frac{f''(1)}{2!} = 15, \frac{f'''(1)}{3!} = 6, \frac{f^{IV}(1)}{4!} = 1.$$

*Тогда $f'(1) = 21$, $f''(1) = 30$, $f'''(1) = 36$, $f^{IV}(1) = 24$.*

Пример 5. *Определить коэффициенты $a$ и $b$ так, чтобы многочлен $g(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ делился на $(x+1)^2$.*

Решение. *Необходимо найти $a$ и $b$ так, чтобы $(-1)$ являлась двукратным корнем многочлена $g(x)$. Следовательно, должны выполняться условия*

$$\begin{cases} g(-1) = 0, \\ g'(-1) = 0. \end{cases}$$

*Найдем производную $g'(x)$: $g'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$. Условия*

$$\begin{cases} g(-1) = 0, \\ g'(-1) = 0. \end{cases}$$

*принимают вид*

$$\begin{cases} a - b + 1 = 0, \\ -4a + 3b = 0. \end{cases}$$

*Решая систему, найдем $a = 3$, $b = 4$.*

Ответ: $a = 3$, $b = 4$.

Пример 6. *Известен корень $1+i$ многочлена $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Найти все корни этого многочлена.*

Решение. *Так как коэффициенты многочлена $f(x)$ действительные числа, то число $1-i$, сопряженное корню $1+i$, также будет корнем $f(x)$. Поэтому $f(x)$ делится на многочлен*

$$(x-(1-i))(x-(1+i)) = (x-1+i)(x-1-i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2.$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3x^4-5x^3+3x^2+4x-2 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2}
3x^4-6x^3+6x^2 \qquad\qquad & 3x^2+x-1 \\ \cline{1-1}
-\,x^3-3x^2+4x-2 & \\
x^3-2x^2+2x \quad & \\ \cline{1-1}
-\,-x^2+2x-2 & \\
-x^2+2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

*Решая уравнение* $3x^2+x-1=0$, *найдем остальные корни* $x_1 = = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Ответ: $1+i$, $1-i$, $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

## *ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ*

**1.** *В кольцах* $\mathbb{R}[x]$ *и* $\mathbb{Z}[x]$ *выполнить деление с остатком:*

*1.1.* $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ *на* $x^2-3x+1$.

*1.2.* $x^4-3x^2-x-1$ *на* $x^2-2x+1$.

*1.3.* $x^4-4x^3+6x^2+x-1$ *на* $x^2-2x-3$.

*1.4.* $5x^4-x^2+6$ *на* $x^2+3x+2$.

*1.5.* $x^5+x^2-x-1$ *на* $x^3-2x+1$.

*1.6.* $2x^4+x^2+2x$ *на* $x^2-2$.

*1.7.* $x^4+2x-3$ *на* $x^3+1$.

*1.8.* $2x^5+x^2+x+1$ *на* $x^3+x+1$.

*1.9.* $x^5+2x^3-x^2+4$ *на* $x^3+2x^2-1$.

*1.10.* $2x^5+3x^3+2x^2-x+5$ *на* $x^3-2x+1$.

*1.11.* $3x^4-x^2+2x+4$ *на* $x^3-2x^2+x$.

*1.12.* $4x^5-2x+3$ *на* $x^2+3x-1$.

*1.13.* $6x^4-4x^3-2x+1$ *на* $x^3-x+3$.

*1.14.* $5x^5-4x^4+3x+2$ *на* $x^3-3x+4$.

*1.15.* $x^5-6x^4+5x^3+2$ *на* $x^3-1$.

**2.** *Пользуясь алгоритмом Евклида, найти НОД*$(f(x), g(x))$ *и выразить его через исходные многочлены:*

*2.1.* $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,$
$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$

*2.2.* $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$

*2.3.* $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35,$
$g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25.$

*2.4.* $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6,$
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2.$

*2.5.* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2,$
$g(x) = x^2 - x + 1.$

*2.6.* $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1,$
$g(x) = x^2 - x - 1.$

*2.7.* $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$
$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$

*2.8.* $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$
$g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17.$

*2.9.* $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,$
$g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1.$

*2.10.* $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$

*2.11.* $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 12,$
$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$

*2.12.* $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2,$
$g(x) = x^5 - 1.$

*2.13.* $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1,$
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$

*2.14.* $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2,$
$g(x) = x^3 + 2.$

*2.15.* $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$

**3.** *Разложить многочлены $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$:*

*3.1.* $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2,$
$g(x) = x^6 + 27.$

*3.2.* $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12,$
$g(x) = x^4 + 16.$

*3.3.* $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2,$
$g(x) = x^4 + 81.$

*3.4.* $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1,$
$g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

*3.5.* $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1,$
$g(x) = x^4 - 16.$

*3.6.* $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4,$
$g(x) = x^6 - 27.$

*3.7.* $f(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9,$
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$

*3.8.* $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54,$
$g(x) = x^6 - 1.$

*3.9.* $f(x) = x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 27x^2,$
$g(x) = x^8 - 6x^4 + 9.$

*3.10.* $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3 - x^2 - 5x + 6,$
$g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x - 1.$

*3.11.* $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5,$
$g(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$

*3.12.* $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 16,$
$g(x) = x^6 + 4x^3 + 4.$

*3.13.* $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1,$
$g(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 6.$

*3.14.* $f(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 6,$
$g(x) = x^4 - 81.$

*3.15.* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9,$
$g(x) = x^8 - 1.$

**4.** *Пользуясь схемой Горнера, вычислить* $f(x_0)$*:*

*4.1.* $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8,\ x_0 = 1 + i.$
*4.2.* $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x,\ x_0 = -3 + i.$
*4.3.* $f(x) = 4x^3 + x^2,\ x_0 = -1 - i.$
*4.4.* $f(x) = x^3 - x^2 - x,\ x_0 = 1 - 2i.$
*4.5.* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ x_0 = i.$
*4.6.* $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7,\ x_0 = 3i.$
*4.7.* $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7,\ x_0 = -2 - i.$
*4.8.* $f(x) = x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7,\ x_0 = -1 + 2i.$
*4.9.* $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i,\ x_0 = -i.$
*4.10.* $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1,\ x_0 = 1 + 2i.$
*4.11.* $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 5x + 2,\ x_0 = 2i.$
*4.12.* $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x,\ x_0 = 2 + i.$
*4.13.* $f(x) = 3x^4 - ix^3 + (1 - 2i)x^2 = 2x - 1,\ x_0 = 3i.$
*4.14.* $f(x) = 5x^4 + 2ix^3 + 5x - i,\ x_0 = 1 + i.$
*4.15.* $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i,\ x_0 = -1 +$

**5.** *Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ из задания 3 по степеням $x + 2$.*

**6.** *Определить коэффициенты $a$, $b$, $c$ так, чтобы многочлен $f(x)$ имел 1 корнем не ниже третьей кратности:*
*6.1.* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 1.$
*6.2.* $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2cx + 2.$
*6.3.* $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 1.$
*6.4.* $f(x) = x^4 - ax^3 + 2bx + c.$
*6.5.* $f(x) = -ax^4 + 2bx^3 - cx^2 + 2x.$
*6.6.* $f(x) = ax^4 + 2bx^3 + 3cx - 3.$
*6.7.* $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 4.$
*6.8.* $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 - 2cx + 3.$
*6.9.* $f(x) = ax^4 - 2bx^2 + cx - 2.$
*6.10.* $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + 2cx - 4.$
*6.11.* $f(x) = 3ax^3 + 2bx^2 - 4cx - 1.$
*6.12.* $f(x) = -2ax^4 + bx^3 - 2cx - 6.$
*6.13.* $f(x) = ax^4 - 4bx^2 + cx - 2.$
*6.14.* $f(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4.$
*6.15.* $f(x) = -2ax^3 + 2bx^2 - 6cx + 1.$

**7.** *Найти все корни многочлена $f(x)$:*

*7.1.* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9.$
*7.2.* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 50.$
*7.3.* $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12.$
*7.4.* $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 12.$
*7.5.* $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 16x - 24.$
*7.6.* $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$
*7.7.* $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 2x + 8.$
*7.8.* $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 14x + 5.$
*7.9.* $f(x) = -2x^4 + x^3 - x + 2.$
*7.10.* $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 22x - 10.$
*7.11.* $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 33x^2 - 23x + 12.$
*7.12.* $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 18.$
*7.13.* $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 37x + 20.$
*7.14.* $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16.$
*7.15.* $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 15x + 25.$

**8.** *Найти все корни многочлена $g(x)$, если $c$ — один из корней:*
*8.1.* $g(x) = x^3 - 7x^2 + 19x - 13,\ c = 3 - 2i.$
*8.2.* $g(x) = x^4 + 2x^3 + 8x + 16,\ c = 1 + \sqrt{3}i.$
*8.3.* $g(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 20x + 13,\ c = 3 - 2i.$
*8.4.* $g(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9,\ c = i.$
*8.5.* $g(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36,\ c = 2i.$
*8.6.* $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1,\ c = -i.$
*8.7.* $g(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 36x - 45,\ c = 2 - i.$
*8.8.* $g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2,\ c = 1 + i.$
*8.9.* $g(x) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20,\ c = 1 + 3i.$
*8.10.* $g(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 28x + 10,\ c = 2 - i.$
*8.11.* $g(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2,\ c = 1 + i.$
*8.12.* $g(x) = x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 52,\ c = -2 + 3i.$
*8.13.* $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x - 20,\ c = -1 + 2i.$
*8.14.* $g(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 41x - 78,\ c = -2 - 3i.$
*8.15.* $g(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 2x - 15,\ c = -2 + i.$

*ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8*

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Вопросы для самоконтроля

## 1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

*Формально-алгебраический и функциональный взгляд на многочлен. Многочлены над конечными и бесконечными полями как функции. Интерполяционная формула Лагранжа.*

## 2. ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

*Рациональные дроби и действия над ними. Поле рациональных дробей. Правильные дроби. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и правильной дроби. Сумма, разность и произведение правильных дробей. Кольцо правильных дробей.*

## 3. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

*Разложение правильной рациональной дроби в сумму правильных дробей с неприводимыми знаменателями. Простейшие рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби, знаменатель которой есть степень неприводимого многочлена, в сумму простейших. Разложение рациональной дроби в сумму многочлена и простейших дробей.*

## 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ НАД $\mathbb{C}$ И $\mathbb{R}$ И ИХ РАЗЛОЖЕНИЯ

*Простейшие рациональные дроби над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Разложение рациональной дроби над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$ в сумму многочлена и простейших дробей.*

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. *В кольце* $\mathbb{C}[x]$ *найти многочлен* $f(x)$ *степени* $\leq 3$*, для которого* $f(-1) = 1 + 2i$*,* $f(0) = 1$*,* $f(i) = 2 - 3i$*,* $f(1) = 1$*.*

Решение. *Запишем таблицу значений искомой функции* $f(x)$

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_j$ | $-1$ | 0 | $i$ | 1 |
| $b_j = f(a_j)$ | $1+2i$ | 1 | $2-3i$ | 1 |

*Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \varphi_j(x),$$

*где*

$$\varphi_j(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\dots(x-a_{n+1})}{(a_j-a_1)\dots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\dots(a_j-a_{n+1})}.$$

*В нашем случае* $n = 3$*. Найдем* $\varphi_j(x)$ *для каждого* $j = 1, 2, 3, 4$*.*

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \frac{x(x-i)(x-1)}{(-1)(-1-i)(-2)} = \frac{x(x^2-(1+i)x+i)}{2(-1-i)} = \frac{x^3 \dots}{}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} = \frac{(x+1)(x-i)(x-1)}{1\cdot(-i)(-1)} = \frac{(x^2-1)(x-i)}{i} = \frac{x^3 - \dots}{}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{(i+1)i(i-1)} = \frac{x(x^2-1)}{-2i} = \frac{x^3-x}{-2i}.$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} = \frac{(x+1)x(x-i)}{2\cdot 1\cdot(1-i)} = \frac{x(x^2+(1-i)x-i)}{2(1-i)} = \frac{x^3 + \dots}{}$$

*Тогда*

$$f(x) = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + b_3\varphi_3(x) + b_4\varphi_4(x) =$$

$$= (1+2i)\frac{x^3-(1+i)x^2+ix}{2(-1-i)} + 1\cdot\frac{x^3+(1-i)x^2-ix}{2(1-i)} + (2-3i)\frac{x^3-x}{-2i} + 1\cdot\frac{x^3-ix^2-x+i \dots}{i}$$

$$= \frac{(-3-i)}{4}(x^3-(1+i)x^2+ix) - i(x^3-ix^2-x+i) + \frac{(2i+3)}{2}(x^3-x) + \frac{(1+i)}{4}(x^3+(1-i)x^2- \dots$$

$$= x^3\left(\frac{-3-i}{4} - i + \frac{2i+3}{2} + \frac{1+i}{4}\right) + x^2\left(\frac{2+4i}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) + x\left(\frac{1-3i}{4} + i - \frac{2i+3}{2} + \frac{1-i}{4}\right) + x^0(-i \dots$$

$$= x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1.$$

*Итак,* $f(x) = x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1$.

Проверка.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + i + 1 + i + 1 = 1 + 2i, \\ f(0) &= 1, \\ f(i) &= -i - i - i + 1 + 1 = 2 - 3i, \\ f(1) &= 1 + i - 1 - i + 1 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $f(x) = x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1$.

Пример 2. *Разложить рациональную дробь*

$$F(x) = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2}$$

*в сумму многочлена и простейших дробей над полем* $\mathbb{R}$.

Решение. *Представим дробь* $F(x)$ *в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель*

$$\begin{array}{r|l} -\;x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x & x^3 - 3x - 2 \\ \cline{2-2} x^4 \qquad - 3x^2 - 2x & x \;+\; 1 \\ \cline{1-1} -\;x^3 \qquad\qquad\quad & \\ x^3 - \;3x\; - 2 & \\ \cline{1-1} 3x\; + 2 & \end{array}$$

*Следовательно,*

$$F(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{x^3 - 3x - 2}.$$

*Разложение многочлена* $x^3 - 3x - 2$ *на неприводимые над* $\mathbb{R}$ *множители имеет вид* $(x+1)^2(x-2)$. *Теперь*

$$\frac{3x+2}{x^3-3x-2} = \frac{3x+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)(x-}{(x+1)^2(x-}$$

*Тогда*

$$3x + 2 = A(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)^2.$$

*При* $x = -1$*:* $-1 = -3A$, $A = \dfrac{1}{3}$.

*При* $x = 2$*:* $B = 9C$, $C = \dfrac{8}{9}$.

*При* $x = 0$*:* $2 = -\dfrac{2}{3} - 2B + \dfrac{8}{9}$, $B = -\dfrac{8}{9}$.

Ответ: $F(x) = x + 1 + \dfrac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2} + \dfrac{-\frac{8}{9}}{(x+1)} + \dfrac{\frac{8}{9}}{(x-2)}$.

Пример 3. *Разложить рациональную дробь*

$$G(x)=\frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

*в сумму простейших дробей над полем* $\mathbb{R}$.

Решение.

$$\frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{E}{x-1}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x-1)+(Cx+D)(x^2+1)(x-1)+E(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

*Тогда*

$$x^2-2x=Ax^2+(B-A)x-B+(Cx+D)(x^3-x^2+x-1)+E(x^4+2x^2+1)=$$

$$=(C+E)x^4+(D-C)x^3+(A-D+C+2E)x^2+(B-A-C+D)x+(E-D-B).$$

*Сравнивая кэффициенты при степенях* $x$, *получим систему*

$$\left.\begin{array}{lcl} x^4 & : & C+E=0 \\ x^3 & : & -C+D=0 \\ x^2 & : & A+C-D+2E=1 \\ x^1 & : & -A+B-C+D=-2 \\ x^0 & : & -B-D+E=0 \end{array}\right\}$$

*Решая систему, получим* $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$, $E=-\frac{1}{4}$.

Ответ:

$$G(x)=\frac{\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}{(x^2+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}.$$

Пример 4. *Разложить рациональную дробь*

$$G(x)=\frac{3x-1}{(x^2+1)^2}$$

*в сумму простейших дробей над полем* $\mathbb{C}$.

Решение.

$$\frac{3x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{3x-1}{(x+i)^2(x-i)^2}=\frac{A}{(x+i)^2}+\frac{B}{(x+i)}+\frac{C}{(x-i)^2}+\frac{D}{x-i}=$$

$$= \frac{A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2}{(x^2+1)^2}.$$

*Тогда*

$$3x - 1 = A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2.$$

*При* $x = i$: $3i - 1 = -4C$, $C = \dfrac{1-3i}{4}$.

*При* $x = -i$: $-3i - 1 = -4A$, $A = \dfrac{1+3i}{4}$.

*При* $x = 0$: $D - B = \dfrac{1}{2}i$.

*При* $x = 1$: $D(1+i) + B(1-i) = -\dfrac{1}{2}$.

*Решая систему*

$$\begin{cases} D - B &= \dfrac{1}{2}i, \\ (1+i)D + (1-i)B &= -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

*получим* $B = -\dfrac{1}{4}i$, $D = \dfrac{1}{4}i$.

Ответ:

$$G(x) = \frac{\frac{1+3i}{4}}{(x+i)^2} + \frac{-\frac{1}{4}i}{x+i} + \frac{\frac{1-3i}{4}}{(x-i)^2} + \frac{\frac{1}{4}i}{x-i}.$$

## ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

**1.** *В кольце* $\mathbb{R}[x]$ *найти многочлен* $f(x)$ *наименьшей степени по данной* *таблице его значений.*

1.1

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $5$ | $7$ | $15$ |

1.2

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $5$ | $25$ | $79$ |

1.3

| $x$ | $-2$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-6$ | $3$ | $8$ | $48$ |

1.4

| $x$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $10$ | $6$ | $4$ | $-30$ |

1.5

| $x$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-30$ | $0$ | $2$ | $-5$ |

1.6

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $7$ | $3$ | $7$ |

1.7

| $x$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $1$ | $1$ | $6$ |

1.8

| $x$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $27$ |

1.9

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | $4$ | $5$ | $13$ |

1.10

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $2$ | $3$ | $31$ |

1.11

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-8$ | $9$ | $14$ | $13$ |

1.12

| $x$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $34$ | $0$ | $-4$ | $-2$ |

1.13

| $x$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-18$ | $3$ | $0$ | $-8$ |

1.14

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $1$ | $2$ | $8$ |

1.15

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-7$ | $2$ | $2$ | $5$ |

**2.** *В кольце $\mathbb{C}[x]$ найти многочлен $g(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений:*

2.1

| $x$ | $1$ | $i$ | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $3i$ | $-2+i$ | $2+i$ |

2.2

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-6-i$ | $-2-i$ | $1$ |

2.3

| $x$ | $-1$ | $-i$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $3+i$ | $1+$ |

2.4

| $x$ | $-i$ | $i$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $2$ | $0$ | $-1$ |

2.5

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-8-2i$ | $-i$ | $4-i$ |

2.6

| $x$ | $-1$ | $2i$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $3-3i$ | $-6-$ |

2.7

| $x$ | $0$ | $1$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1+i$ | $-2$ | $1+i$ |

2.8

| $x$ | $-i$ | $0$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $3$ | $2$ | $1+2i$ |

2.9

| $x$ | $-1$ | $i$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1+i$ | $i$ |

2.10

| $x$ | $-2$ | $0$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1-2i$ | $1$ | $1-i$ |

2.11

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-2i$ | $-2-i$ | $-8$ |

2.12

| $x$ | $1$ | $i$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1+i$ | $3+$ |

2.13

| $x$ | $-1$ | $0$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-2i$ | $-1-2i$ | $-2-2i$ |

2.14

| $x$ | $-i$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $4+2i$ | $2$ | $-1+i$ |

2.15

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $1+2i$ | $1$ |

**3.** *Представить рациональные дроби $F(x)$ и $G(x)$ в виде суммы много-*

*члена и правильной рациональной дроби.*

| | $F(x)$ | $G(x)$ |
|---|---|---|
| 3.1 | $\dfrac{2x^4-3x^3-4x^2+3x+2}{x^3-2x^2-x+2}$, | $\dfrac{2x^4+11x^2-x+1}{x^4+4x^2}$. |
| 3.2 | $\dfrac{3x^4+3x^3-2x^2-34x+4}{x^3+x^2-x-10}$, | $\dfrac{x^4+3x^3-2x^2-2x+3}{x^4-2x^2+1}$. |
| 3.3 | $\dfrac{-x^4-2x^3+2x^2+7x+6}{x^3+2x^2-x-2}$, | $\dfrac{-2x^4+x^3-x^2+2x+3}{x^4+x^3-x-1}$. |
| 3.4 | $\dfrac{-2x^4-x^3+6x^2-2x-1}{x^3+x^2-x-1}$, | $\dfrac{x^4+x^3+x^2-2x-10}{x^4+3x^3-x^2-13x-10}$. |
| 3.5 | $\dfrac{-3x^4-x^2-25x+2}{x^3+x+10}$, | $\dfrac{-3x^4-x^3+9x^2+3x+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$. |
| 3.6 | $\dfrac{-x^4+8x^3-24x^2+42x-31}{x^3-2x^2+2x-1}$, | $\dfrac{2x^4-x^3+2x^2+x}{x^4-2x^3+2x-1}$. |
| 3.7 | $\dfrac{-2x^4+8x^3-7x^2+1}{x^3-4x^2+6x-3}$, | $\dfrac{x^4-x^3+x^2-4}{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$. |
| 3.8 | $\dfrac{3x^4+13x^3+2x^2-11x-12}{x^3+4x^2-x-4}$, | $\dfrac{x^4-5x^3+2x^2-x-1}{x^4-5x^3+10x^2-9x+3}$. |
| 3.9 | $\dfrac{3x^4-11x^3+16x^2-9x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$, | $\dfrac{-2x^4+2x^3-x+5}{x^4-x^3-x^2-x-2}$. |
| 3.10 | $\dfrac{-x^4+2x^3+2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$, | $\dfrac{x^4-x^3+x^2-2x+2}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$. |
| 3.11 | $\dfrac{-x^4+2x^3+x^2+5x+1}{x^3-1}$, | $\dfrac{2x^4+x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$. |
| 3.12 | $\dfrac{x^4+4x^3+8x^2+9x+2}{x^3+3x^2+4x+4}$, | $\dfrac{-2x^4-x^3-6x^2-4x-8}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$. |
| 3.13 | $\dfrac{2x^4-9x^3+14x^2-x-3}{x^3-5x^2+8x-4}$, | $\dfrac{x^4-x^2+x-4}{x^4+2x^3+x^2-4}$. |
| 3.14 | $\dfrac{x^4+5x^3+11x^2+4x+1}{x^3+5x^2+9x+5}$, | $\dfrac{x^4+x^2-4x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$. |
| 3.15 | $\dfrac{2x^4-3x^3+10x^2-12x+3}{x^3-x^2+4x-4}$, | $\dfrac{2x^4+3x^3-3x^2-2x}{x^4+x^3-3x^2-x+2}$. |

**4.** *Разложить рациональную дробь* $R(x)$ *в сумму простейших дробей:*

4.1 $\dfrac{2x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}$. 4.2 $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

4.3 $\dfrac{x-1}{(x-2)^3(x+2)}$. 4.4 $\dfrac{3x-2}{(x+3)^3(x-1)}$.

4.5 $\dfrac{x-5}{(x-3)^2(x+2)^2}$. 4.6 $\dfrac{-3x+2}{(x-5)^2(x+1)^2}$.

4.7 $\dfrac{5x-4}{(x-4)^3(x-1)}$. 4.8 $\dfrac{-4x+3}{(x+4)(x+1)^3}$.

4.9 $\dfrac{x-1}{(x-3)^2(x+4)^2}$. 4.10 $\dfrac{3x-5}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

4.11 $\dfrac{2x-4}{(x+5)(x-1)^3}$. 4.12 $\dfrac{-3x+5}{(x-5)^2x^2}$.

4.13 $\dfrac{2x-4}{(x+2)^3x}$. 4.14 $\dfrac{-x+3}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

4.15 $\dfrac{x+1}{x^3(x-2)}$.

**5.** *Разложить рациональную дробь* $K(x)$ *в сумму простейших дробей над полем* $\mathbb{R}$*:*

5.1 $\dfrac{2x^2-x}{(x^2-x+2)^2}$. 5.2 $\dfrac{2x^2-1}{(x^2+x+2)^2}$.

5.3 $\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+2)^2}$. 5.4 $\dfrac{x^2-1}{(x^2+3x+4)^2}$.

5.5 $\dfrac{4x^2-5x+2}{(x^2+1)^2}$. 5.6 $\dfrac{3x^2-x}{(x^2+4)^2}$.

5.7 $\dfrac{2x^2-2}{(x^2+3)^2}$. 5.8 $\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-x+3)^2}$.

5.9 $\dfrac{5x^2-6x+1}{(x^2+3)^2}$. 5.10 $\dfrac{x^2-2x}{(x^2+5)^2}$.

5.11 $\dfrac{5x^2-4x}{(x^2+3x+5)^2}$. 5.12 $\dfrac{6x^2-1}{(x^2+2x+2)^2}$.

5.13 $\dfrac{x-2}{(x^2+2)^2}$. 5.14 $\dfrac{2x+1}{(x^2-x+2)^2}$.

5.15 $\dfrac{-x+3}{(x^2+1)^2}$.

**6.** *Разложите рациональные дроби* $F(x)$ *и* $G(x)$ *из задания 3 в сумму многочлена и простеших дробей над полем* $\mathbb{R}$, *над полем* $\mathbb{C}$.