УДК 512.572

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ $\mathfrak{F}$-ПРОФРАТТИНИЕВЫХ ПОДАЛГЕБР МУЛЬТИКОЛЕЦ КЛАССУ $\mathfrak{F}$

С.П. Новиков

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ABOUT BELONGING OF $\mathfrak{F}$-PREFRATTINI SUBALGEBRAS OF MULTIRINGS TO CLASS $\mathfrak{F}$

S.P. Novikov

Belarusian State University of Transport, Gomel

Рассматриваются условия, при которых любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра мультикольца A принадлежат классу $\mathfrak{F}$.

***Ключевые слова**: мультикольцо, $\mathfrak{F}$-центральный фактор, фраттиниевый главный фактор, $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра, $\mathfrak{F}$-нормализатор.*

Conditions at which any $\mathfrak{F}$-prefrattini subalgebra of multiring A belong to class $\mathfrak{F}$, are considered.

***Keywords**: multirings, $\mathfrak{F}$-central factor, frattini chief factor, $\mathfrak{F}$-prefrattini subalgebra, $\mathfrak{F}$-normalizer.*

Введение

Используются обозначения и определения из [1]. Все рассматриваемые мультикольца полагаются принадлежащими некоторой формации φ-разрешимых мультиколец с главными рядами.

В отличие от $\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-полупроекторов, $\mathfrak{F}$-нормализаторов $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры не всегда принадлежат классу $\mathfrak{F}$. Это приводит к задаче, поставленной Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой в [1], – описать условия, при которых $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры мультикольца A принадлежат классу $\mathfrak{F}$. Настоящая работа посвящена рассмотрению условий, при которых все $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры мультикольца принадлежат классу $\mathfrak{F}$.

1 Критерий принадлежности $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебр мультикольца классу $\mathfrak{F}$

Для произвольного класса мультиколец $\mathfrak{F}$ обозначим через $\Psi(\mathfrak{F})$ класс мультиколец, у которых все $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры принадлежат $\mathfrak{F}$; через $\Upsilon(\mathfrak{F})$ – класс мультиколец, у которых любой фраттиниевый главный фактор $\mathfrak{F}$-централен.

***Лемма* 1.1.** Для любой непустой формации мультиколец $\mathfrak{F}$ класс $\Psi(\mathfrak{F})$ – непустая формация.

Доказательство. Пусть $A \in \Psi(\mathfrak{F})$, N – идеал в A, M / N – $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A / N. Тогда по теореме 1 из [2] $M = N + B$, где B – некоторая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A. Поэтому $M / N = B + N / N \simeq B / B \cap N \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что N_1 и N_2 – идеалы мультикольца A, $A / N_1 \in \Psi(\mathfrak{F})$, $A / N_2 \in \Psi(\mathfrak{F})$, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$, T – $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. По теореме 1 из [2] $T + N_1 / N_1$ и $T + N_2 / N_2$ – $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры в A / N_1 и A / N_2 соответственно. Следовательно, $T + N_1 / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $T + N_2 / N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому $T / T \cap N_1 \in \mathfrak{F}$ и $T / T \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как $(T \cap N_1) \cap (T \cap N_2) = \{0\}$, а $\mathfrak{F}$ – формация, то $T \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Лемма доказана.

***Теорема* 1.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация мультиколец. Тогда любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра T произвольного мультикольца A принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $A \in \Psi(\mathfrak{F})$. Тогда $A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$ и $T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$.

Достаточность. Пусть для любой $\mathfrak{F}$-профраттиниевой подалгебры T мультикольца A выполняется условие $T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} = \{0\}$. Так как $A / A^{\Psi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{F}$, а по теореме 1 из [2] $T + A^{\Psi(\mathfrak{F})} / A^{\Psi(\mathfrak{F})}$ – $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в $A / A^{\Psi(\mathfrak{F})}$, то $T + A^{\Psi(\mathfrak{F})} / A^{\Psi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$T \simeq T / \{0\} = T / T \cap A^{\Psi(\mathfrak{F})} \simeq T + A^{\Psi(\mathfrak{F})} / A^{\Psi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{F}.$$

Значит, $A \in \Psi(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

2 Пример класса мультиколец, у которых все $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры принадлежат $\mathfrak{F}$

***Лемма* 2.1.** Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация мультиколец, то $\Upsilon(\mathfrak{F})$ – непустая формация.

Доказательство. Пусть $A \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, N – идеал в A, $H/N/K/N$ – фраттиниевый главный фактор в A/N. Тогда фактор H/K фраттиниев в A и так как $A \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, то $H/K \rightthreetimes A/C_A(H/K) \in \mathfrak{F}$. Поэтому

$$(H/N/K/N) \rightthreetimes A/N/C_{A/N}(H/N/K/N) \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $A/N \in \Upsilon(\mathfrak{F})$ и, следовательно, $\Upsilon(\mathfrak{F})$ – гомоморф.

Пусть теперь A – мультикольцо с наименьшей длиной главного ряда, для которого найдутся такие идеалы N_1 и N_2, что $A/N_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, $A/N_2 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, но $A \notin \Upsilon(\mathfrak{F})$. В силу соображений индукции можно полагать, что $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Пусть L_1 и L_2 – минимальные идеалы в A, содержащиеся в N_1 и N_2 соответственно. Тогда $A/L_1/N_1/L_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$ и $A/L_1/L_1+N_2/L_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$. По индукции

$$A/L_1/(N_1/L_1 \cap (L_1+N_2)/L_1) =$$
$$A/L_1/N_1 \cap (L_1+N_2)/L_1 =$$
$$A/L_1/(L_1+(N_1 \cap N_2))/L_1 = A/L_1/L_1/L_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F}).$$

Следовательно, $A/L_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$. Аналогично показывается, что $A/L_2 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$.

Если хотя бы один из факторов $L_1/\{0\}$ или $L_2/\{0\}$, например $L_1/\{0\}$, нефраттиниев, то так как $A/L_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, любой фактор A-главного ряда, проходящего через L_1, $\mathfrak{F}$-централен. Значит, ввиду леммы 3.34 из [1] $A \in \Upsilon(\mathfrak{F})$. Полученное противоречие означает, что факторы $L_1/\{0\}$ и $L_2/\{0\}$ фраттиниевы в A. Тогда фактор $L_1+L_2/L_1/L_1/L_1$ фраттиниев в A/L_1. Так как $A/L_1 \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, то фактор $L_1+L_2/L_1/L_1/L_1$ $\mathfrak{F}$-централен. А поскольку фактор L_1+L_2/L_1 проективен фактору $L_2/\{0\}$, то последний фактор $\mathfrak{F}$-централен. Таким образом, любой фактор A-главного ряда, проходящего через L_2, $\mathfrak{F}$-централен. Значит, ввиду леммы 3.34 из [1] $A \in \Upsilon(\mathfrak{F})$. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

***Теорема* 2.1.** Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственная формация конечных мультиколец, $\mathfrak{F}$ – непустая насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация и $A \in \mathfrak{X} \cap \Upsilon(\mathfrak{F})$. Если класс $\mathfrak{X}$ регулярен в классе $\mathfrak{F}$, то любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A является $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Доказательство. Пусть T – $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра в A. По теореме 13.8 из [1] в A найдется $\mathfrak{F}$-нормализатор H, содержащийся в T. Ввиду теорем 12.12 и 13.4 из [1], если A-главный фактор $\mathfrak{F}$-централен, то T и H его покрывают. Если A-главный фактор H/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален, то так как $A \in \Upsilon(\mathfrak{F})$, фактор H/K нефраттиниев. По лемме 1 из [3] фактор H/K A-абелев. Значит, ввиду теорем 12.12 и 13.4 из [1] T и H его покрывают. По лемме 2 из [3] порядки T и H равны произведению порядков $\mathfrak{F}$-центральных факторов A-главного ряда. Следовательно, $T = H$. Теорема доказана.

***Замечание* 2.1.** Так как $\mathfrak{F}$-нормализаторы мультиколец принадлежат классу $\mathfrak{F}$, из теоремы 2 автоматически вытекает следующий результат:

***Следствие* 2.1.** Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственная формация конечных мультиколец, $\mathfrak{F}$ – непустая насыщенная в $\mathfrak{X}$ формация, класс $\mathfrak{X}$ регулярен в классе $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{X} \cap \Upsilon(\mathfrak{F}) \subseteq \Psi(\mathfrak{F})$.

***Замечание* 2.2.** В классе конечных групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым корадикалом условие регулярности класса $\mathfrak{X}$ в классе $\mathfrak{F}$ выполняется автоматически. Кроме того, каждая конечная группа φ-разрешима. Поэтому в этом случае из утверждений работы получаются новые результаты для конечных групп, имеющие более простой вид. Например, из теоремы 2.1 вытекает как частный случай следующее утверждение:

***Следствие* 2.2.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая насыщенная формация конечных групп. Тогда $\Upsilon(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \Psi(\mathfrak{F})$ и любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подалгебра группы $A \in \Upsilon(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$ является $\mathfrak{F}$-нормализатором в A.

Заключение

Таким образом, в работе получен критерий принадлежности $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебр мультикольца классу $\mathfrak{F}$ и приведен конструктивный пример класса мультиколец, у которых все $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры принадлежат $\mathfrak{F}$. Для конечных групп из утверждений статьи автоматически вытекают новые результаты, имеющие в этом случае более простой вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

2. *Новиков, С.П.* О Ω-профраттиниевых подалгебрах мультиколец / С.П. Новиков // Вопросы алгебры. – Минск : Изд-во «Университетское», 1992. – № 6. – С. 7–12.

3. *Новиков, С.П.* Связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебр и $\mathfrak{F}$-нормализаторов мультиколец / С.П. Новиков // Вестник БГУ. Серия 1. – 1996. – № 1. – С. 46–48.

Поступила в редакцию 10.07.12.